新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 7

数学建模

袁震东　赵小平　吴长江　编著

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 7

数学建模

袁震东　赵小平　吴长江　　编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程.高中数学 7 数学建模/袁震东,赵小平,吴长江编著.—上海:华东师范大学出版社,2005.6
ISBN 978-7-5617-4245-7

Ⅰ.新... Ⅱ.①袁...②赵...③吴... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 066232 号

新专题教程

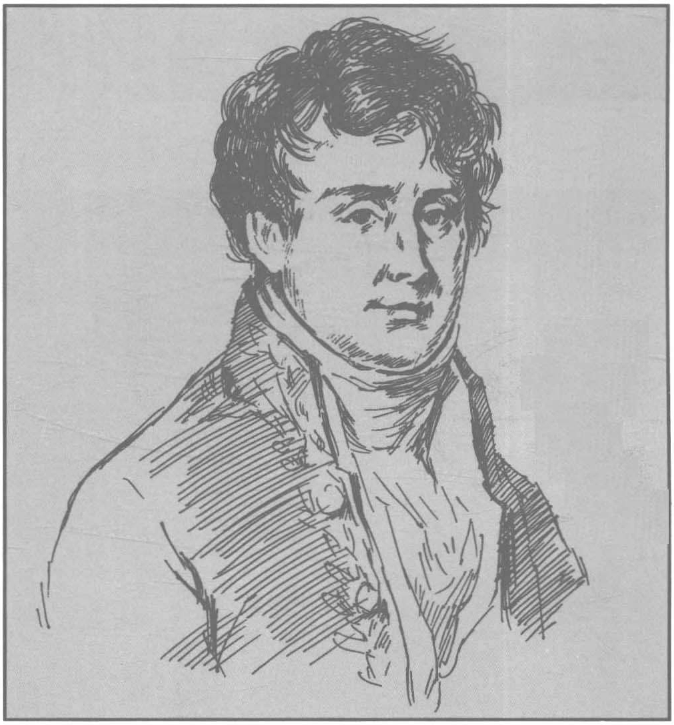
高中数学 7 · 数学建模

编　　者　袁震东　赵小平　吴长江
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　徐　金
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　江苏省句容市排印厂
开　　本　787×960　16 开
印　　张　4.5
字　　数　76 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 4 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-4245-7/G·2453
定　　价　6.00 元

出 版 人　朱杰人



对自然界的深刻研究是数学最富饶的源泉。

——傅里叶

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册。

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎。但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进。根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订。新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握。

丛书有以下特点。

作者权威 编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成。他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性。

材料典型 丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练。总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果。

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性。

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果。丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力。

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生。

华东师范大学出版社
教辅分社

为什么从上海到华盛顿不是按地图上上海与华盛顿之间的直线路径飞行，而是先向东北方向按弧形路径飞行？为什么诺贝尔奖的基金增长必须按复利来计算？这些问题用数学方法和数学模型来解释，不仅清楚而且有数量作依据，具有说服力。

有人说数学是科学的皇冠，因为数学十分抽象和十分严密。同时，数学又是科学的仆人，它不仅为自然科学的各门学科服务，也为经济学、社会科学和生产、日常生活提供服务。

数学模型是实现这种服务的桥梁，数学建模就是讨论如何建立这种“桥梁”的问题。只有建立了适当的数学模型，才有可能用数学工具去解决我们所遇到的实际问题。众所周知，如果你想学会骑自行车，那么你必须亲自去尝试骑车，即使开始时免不了跌跤；如果你要学会游泳，那么你必须亲自下水去尝试，即使开始时会灌几口水。同样的道理，如果你要学会数学建模，你就得尝试用数学方法解决实际问题。

正如体育教练要做示范动作一样，本书给出一些数学建模的范例，目的在于引导学生去学习数学建模，了解数学建模的一般步骤和方法。我们希望同学们喜欢这些范例，甚至可进一步引起大家对数学的兴趣。如果通过范例的学习，你们今后能够在用数学工具解决实际问题时少走弯路，那么我们写书的目的就达到了。

前 言

《中小学数学课程标准(试行稿)》要求高中学生:“在实践应用中逐步积累有关发现、叙述、总结数学规律的经验,知道一些基本的数学模型,初步形成数学建模能力,能解决一些简单的实际问题。”并在拓展型课程(数学 C)中列出了函数模型、线性规划模型、数列模型、概率模型、统计模型等学习主题。

目前写给中学生看的数学建模书很少,我们作此尝试,定有许多不足,甚至错误,欢迎读者批评指正。

袁震东

CONTENTS
目　录

高中数学7·数学建模

CONTENTS

目 录

高中数学7·数学建模

专题 1

从列方程解应用题到数学建模

可以发现，在我们的周围存在着许多可用数学方法来解决的实际问题. 例如：如果有多条道路通往学校，走哪一条路径费时最少的问题；旅行社如何组织旅游团才能获得最大利润的问题；飞机飞行路线问题；追截走私船问题；电话号码增号问题；人口发展问题等等.

有些实际问题可以化为应用题，可以用在初中学过的列方程解应用题的方法来解决，即根据题意设未知量、找出等量关系、列方程、解方程、检验、答题. 但多数实际问题与应用题不同，需要用数学建模来求解. 数学模型是运用数学工具对实际问题的数学刻画，它的呈现形式可以是函数、方程，也可以是计算程序乃至图表和图像等. 数学建模是研究如何用合适的数学工具建立数学模型，解决实际问题的全过程，它与列方程解应用题有下列四个不同之处：

数学建模不仅要找出实际问题的数学模型，而且包括用数学模型解决实际问题的全过程.

(1) 列方程解应用题中的问题，多数是经过加工的，问题中的条件是充分的，问题中的数据是给定的. 然而数学建模中的问题是现实世界中的实际问题，条件往往是不充分的，也有些条件对于问题的求解是多余的，问题中的数据是不完整的，甚至是要解题者自己收集、整理的.

(2) 由于问题中的条件不充分，解数学建模问题时常常需要作一定的假设或假定，在列方程解应用题的过程中一般是不需要作假设的.

(3) 数学建模过程中一般需要验证和讨论，而且数学建模中的验证和讨论比解应用题中的验证和讨论要复杂得多. 在数学建模中获得模型和解之后，不仅要验证方程有没有增根，而且还要验证解与实际问题是否相符，与所作的假设有没有矛盾. 如果有矛盾，必须重新作假设、建立模型、再解模型、验证，直到获得满意的结果为止.

(4) 数学建模问题往往是开放性(open ended)的，其解可能不是惟一的. 下面举例说明.

【问题陈述】

旅行社组团问题. 某旅行社组织 20～80 人的旅行团. 旅客为 20 名时，每位旅客收费为 200 元；当旅客超过 20 名时，可以适当少收旅客的旅费，例如每增加 1 名旅客少缴 2 元. 旅行社组织一次旅行的固定成本为 4 000 元，另外供给每位旅客 30 元的食品. 旅行社希望知道：旅行社的利润与旅客人数的关系，何时获得的利润最大，何时亏本？

旅客与旅行社是一种契约关系. 旅客交付旅费后，旅行社根据合同，负责支付旅客的车费、景点门票及在途中供给一定的食品等.

【建模过程】

分析： 在这个问题中，有些条件是不清楚的，例如：当旅客超过 20 名时，每增加 1 名旅客少缴 2 元，是指每位旅客少缴 2 元，还是指增加的那 1 名少缴 2 元？为此我们作如下假设.

阅读数学建模例题时，边读边算将更有收获！

假设 1： 当旅客超过 20 名时，每增加 1 名旅客少缴 2 元，指第 21 名收取 198 元，第 22 名收取 196 元，余者类推（当然，如果指每位旅客少缴 2 元，也可以，见本专题作业）.

假设 2： 旅客根据收费情况平均分摊旅费.

建立模型

设旅客有 x 名，那么 $20 \leqslant x \leqslant 80$. 设 y 表示旅行社组织 1 次旅行所得的利润. 显然，当只有 20 名旅客时，由于每位旅客只收 200 元，20 名共收取 4 000 元，恰好等于旅行社组织 1 次旅行的固定成本. 此时，旅行社还要供给每人 30 元食品，因此要亏本 600 元.

由于 20 名旅客的旅费恰好抵消旅行社的固定成本. 因此旅行社盈利或亏损可以从第 21 名旅客算起.

当 $x > 20$ 时，旅行社的利润为

$$y = 198 + 196 + \cdots + [200 - 2(x - 20)] - 30x. \qquad ①$$

旅客平均分摊的旅费为

$$\frac{4\,000 + 198 + 196 + \cdots + [200 - 2(x - 20)]}{x}$$

$$= \frac{-x^2 + 239x - 380}{x}. \qquad ②$$

解模型

对于不同的 x 值，经过直接计算，把计算结果列于下表. （x 表示旅客数，y 表示利润，p 表示平均每位旅客交付的旅费）

直接计算指直接代入①、②式计算，不需化简.

表 1-1

x(名)	20	25	30	35	40	45	50
y(元)	-600	220	990	1 710	2 380	3 000	3 570
p(元)	200	198.80	196.33	193.14	189.50	185.56	181.40
x(名)	55	60	65	70	75	80	
y(元)	4 090	4 560	4 980	5 350	5 670	5 940	
p(元)	177.09	172.67	168.15	163.57	158.93	154.25	

从表 1-1 可知,最大利润为 5 940 元.

验证和讨论

利用等差数列求和公式可得

$$y=\frac{198+[200-2(x-20)]}{2}(x-20)-30x,$$

化简得
$$y=-x^2+209x-4\,380. \qquad ③$$

因为

$$\begin{aligned}y&=-(x-104.5)^2+10\,920.25-4\,380\\&=-(x-104.5)^2+6\,540.25,\end{aligned}$$

所以它的最值点在 $x=104.5$ 处,可见最值点不在[20, 80]范围内.但它在[20, 80]内是增函数,因此 $x=80$ 时获最大利润.当旅客人数少于 24 人时旅行社将亏本,因为此时

$$y=198+196+194-23\times30<0.$$

③式所示的函数在[20, 80]内是增函数,可以从它的图像获知.

旅行团有 24 名旅客时,开始盈利,此时

$$y=198+196+194+192-24\times30=60>0.$$

由数学建模的例子看到,数学建模的一般步骤可归结为下列四步:

1. 分析问题、作假设.由于实际问题的复杂性,所以要分析数学建模的目的和具体目标,分析已知条件是什么,所求的问题是什么.为简化问题,一般要对有关陈述作假设,使问题更加明确.分析问题还包括变量的设置、单位的选用等.

2. 建立数学模型.根据问题的要求和假设,利用恰当的数学方法建立各个量之间的数学关系.在能达到预期目标的前提下,应采用尽可能简单的数学方法建立容易求解的数学模

型，以便让更多的人接受和使用这种模型.

3. 解数学模型. 大多数数学模型的求解需要通过计算机计算，一般需要根据算法画出框图、编制程序、上机实现. 求解还包括画图、列表，必要时还要给出证明及制作计算机软件等.

4. 验证、讨论并修正模型. 根据已经建立的数学模型的特点和求解结果，验证、讨论数学模型的适用范围、算法的精度和各种数据计算结果的可信程度等，并根据验证、讨论的情况进行修正.

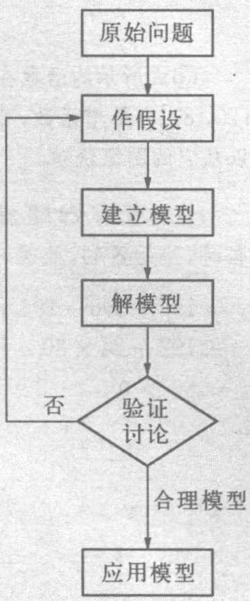
上述四个步骤可以根据实际问题的具体情况灵活运用. 有时可以合在一起，边分析边寻找数学模型，即 1 和 2 合在一起，有时可以省略某些步骤.

【建模心得】

1. 数学模型的概念

数学模型是指解决实际问题时所用的一种数学框架，它是实际问题的一种数学刻画. 数学模型可以是函数、方程、计算机程序乃至图表或图形.

数学建模过程可以表示成下列框图：



2. 数学建模的含义

数学建模是分析实际问题、作假设、建立数学模型、解模型、验证讨论，直至找到合适的数学模型的全过程.

3. 数学建模的元素

除了把一般语言化为数学公式或方程这一元素外，数学建模还包括下列四个元素：

(1) 所遇到的实际问题中条件、数据的不完整性；

(2) 一般需要作假设或假定；

(3) 验证和讨论一般是数学建模不可缺少的步骤；

(4) 有时问题的解是不惟一的.

一个数学建模问题可以包含上述所有的元素，也可以只包含其中某一些元素.

4. 数学建模的主要步骤

(1) 分析问题、作假设；

(2) 建立数学模型；

(3) 解数学模型；

(4) 验证、讨论并修正模型(重新作假设、建立模型、解模型、验证讨论).

【练习作业】

1. 如果在本专题例题的数学建模过程中假设：当旅客超过20名时，每增加一名旅客每名旅客的旅费均少缴2元，问题的解将如何？

2. 如果在本专题的例题中，供给每位旅客的食品费改为20元，问题的解将如何？

专题 2

韩信点兵的数学模型

【问题陈述】

我们先看一个古代的传说：话说当年，在楚汉相争的年代，韩信是刘邦的大将军. 有一天，刘邦亲临韩信的军营，而在练兵场上有近 2 000 名士兵在操练. 韩信命令士兵们先后以 7 人一组、11 人一组及 13 人一组集结成小组，并把每次余下不能组成 7(或 11、13)人小组的人数报上，然后他便可以快速地算出士兵的确切数目. 例如，在组 7 人小组时余下 3 人；组 11 人小组时余下 4 人；组 13 人小组时余下 8 人，韩信很快便算出确切数目是 1 984 人；其后用一个一个数数的方法确认士兵的人数正是 1 984. 而刘邦暗中吩咐数名近卫军混入士兵中，以防韩信事前已知道士兵数目. 请问韩信是怎样算出士兵的确切数目的呢？

【建模过程】

根据上面的问题，可设 x 为操场上士兵的总数，已知当 x 被 7、11、13 除，其余数分别为 3、4、8，且 $1\,500 < x < 2\,000$，求未知数 x. 要解决这个问题必须发展一种解决该问题的方法.

为此我们考虑更一般的问题，x 为操场上士兵的总数，已知当 x 被 7、11、13 除，其余数分别为 r_1、r_2、r_3，即余数集为 $\{r_1, r_2, r_3\}$. 根据已知的余数集不能完全确定士兵总数 x，但可以给解决问题某种启示.

你能举出两个被 7、11、13 除余数集为 $\{1, 0, 0\}$ 的正整数吗？

如果数 x_1 被 7、11、13 除，其余数集为 $\{1, 0, 0\}$，这就是说 x_1 被 11 和 13 整除，而被 7 除余数为 1，那么 x_1 必为 11×13 的倍数，可表示为

$$x_1 = (11 \times 13)k_1 = 143k_1,\ k_1 \in \mathbf{N}^*, \qquad ①$$

$143k_1$ 被 7 除，余数为 1 的最小 $k_1 = 5$，此时 $x_1 = 715$.

如果数 x_2 被 7、11、13 除，其余数集为 $\{0, 1, 0\}$，这就是说

x_2 被 7 和 13 整除，而被 11 除余数为 1，那么 x_2 必为 7×13 的倍数，可表示为

$$x_2=(7\times13)k_2=91k_2,\ k_2\in\mathbf{N}^*, \tag{②}$$

$91k_2$ 被 11 除，余数为 1 的最小 $k_2=4$，此时 $x_2=364$.

如果数 x_3 被 7、11、13 除，其余数集为$\{0,\ 0,\ 1\}$，同理，x_3 可表示为

$$x_3=(7\times11)k_3=77k_3,\ k_3\in\mathbf{N}^*, \tag{③}$$

$77k_3$ 被 13 除，余数为 1 的最小 $k_3=12$，此时 $x_3=924$.

可以验证形如 $r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3$ 的数被 7、11、13 除，其余数集为$\{r_1,\ r_2,\ r_3\}$，而且

$$\begin{aligned}&r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3-k(7\times11\times13)\\=&r_1x_1+r_2x_2+r_3x_3-1\,001k,\ k\in\mathbf{Z}\end{aligned} \tag{④}$$

被 7、11、13 除，其余数集不变.

经凑试法算得，当 $k=9$ 时，④式的值最接近 2 000，即

$$3\times715+4\times364+8\times924-9\times1\,001=1\,984.$$

验证：$1\,984\div7$ 商为 283 余 3；$1\,984\div11$ 商为 180 余 4；$1\,984\div13$ 商为 152 余 8，符合题意. 由此可知，操场上的士兵总数为 1 984 人.

由于韩信预先算好了 x_1、x_2、x_3 的值，并已记在心中，因此只要知道余数集，可以立即推算出士兵总数，而不用一个一个地数.

【建模心得】

1. 在求解上述剩余问题时，当余数中只有一个是 1，其余都是 0 的情形，不仅容易解答，而且可以用它表述一般情形的解.

2. 可以推广到 n 个数的情形：设 $x_1,\ x_2,\cdots,x_n$ 是一组正整数，被一组公因数为 1 的(互质的)除数($p_1,\ p_2,\cdots,p_n$)去除，其余数集分别为

$$\{1,\ 0,\ \cdots,\ 0\},\ \{0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0\},\ \cdots,\ \{0,\ \cdots,\ 0,\ 1\},$$

那么 $x=r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n$ 就是余数集为$\{r_1,\ r_2,\ \cdots,$