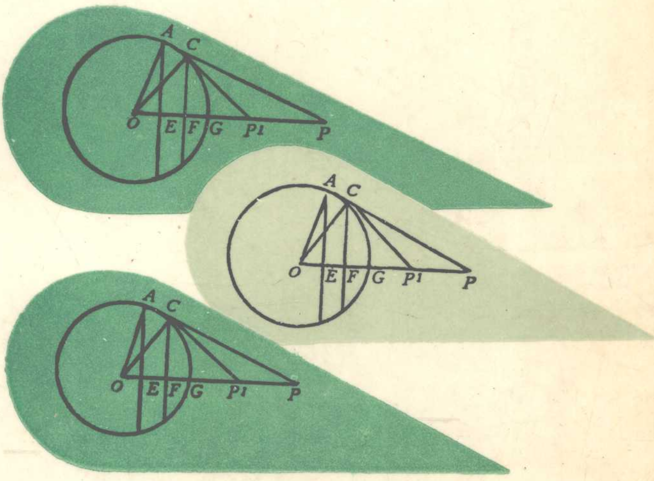
高考复习三段法系列丛书

数学应试技巧

俞绍康　姚　凯　周去难　梁子木　编

化学工业出版社



GAOKAO FUXI SANDUANFA XILIE CONGSHU

高考复习三段法系列丛书

数学应试技巧

俞绍康　姚　凯　周去难　梁子木　编

化学工业出版社

(京)新登字039号

内 容 提 要

本书总结了作者多年的数学教学经验和研究成果，紧扣新实施的教学大纲，集中体现了三段复习法的特点，即抓基础、促提高、应高考、达水平。全书分三个部分：第一部分，平时学习抓基础，注重对基本概念、定律的认识理解；第二部分，考前复习抓提高，强调综合运用基本知识的解题能力，弥补知识上的漏洞和能力上的欠缺，并通过典型例题举一反三，避免陷入盲目的题海战术之中；第三部分，临考复习抓重点，并针对高考心理作了分析。书末还附有1993年高考试题与解答。

本书既可作阶段学习之用，更是一部理想的综合复习参考书：既是广大考生不可缺少的高考资料，也是广大教师教学的有力助手。

高考复习三段法系列丛书
数学应试技巧
俞绍康　姚　凯　周去难　梁子木　编
责任编辑：张平元
封面设计：季玉芳
•
化学工业出版社　出版
（北京市朝阳区惠新里3号）
河北省三河市印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
•
开本787×1092 1/32 印张14 1/4 字数329千字
1994年2月第1版　1994年2月北京第1次印刷
印　数　1—4,600
ISBN 7-5025-1241-1/G·323
定　价 10.50 元

目　　录

第一部分　平时学习抓基础

第二部分　考前复习抓提高

第三部分　临考复习抓重点

第一部分　平时学习抓基础

第一章　代　　数

一、集　　合

（一）重点

了解集合的概念，掌握集合的表示方法，理解并掌握子集、真子集、交集、并集、补集、空集和全集等概念。能识别有关符号并能进行有关集合的运算。

（二）难点

集合的符号表示，用抽象的集合符号进行运算。

（三）重点、难点知识分析

集合这部分内容，重点在于掌握好有关的概念，并能应用它们熟练地进行有关运算。对于较抽象的集合问题，可以借助于图形来解决。

例1　下列各题中表示集合的是：

（A）本次义务劳动中参加劳动的全体同学；

（B）本次劳动中表现突出的同学；

（C）本次劳动中表现出雷锋精神的同学。

解： 对于一个集合，集合中的元素是确定的，对于一个集合的描述必须是明确的，确定一个元素是否为某一个集合中的元素应有明确的标准。本题（B）、（C）中“表现突出”、“雷锋精神”都没有一个明确的标准，因而不能构成集合，因此本题应选（A）。

例2 用适当的方法表示下列集合。

（1）全体正数；

（2）小于10的质数；

（3）方程$x^2+3x+2=0$的解；

（4）方程组$\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=6\end{cases}$的解；

（5）方程$x^3+1=0$的解；

（6）方程$x^3+1=0$的实数解。

解：（1）用描述法：{正数}或$\{x|>0,\ x\in R\}$；

（2）$\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$或{小于10的质数}；

（3）$\{x|x^2+3x+2=0\}$或$\{-2,\ -1\}$；

（4）$\left\{(x,\ y)\middle|\begin{cases}2x+y=3\\x+2y=6\end{cases}\right\}$或$\{(x,\ y)|2x+y=3\}\cup\{(x,\ y)|x+2y=6\}$或$\{(0,\ 3)\}$；

（5）$\{x|x^3+1=0,\ x\in C\}$或

$$\left\{-1,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$；

（6）$\{x|x^3+1=0,\ x\in R\}$或$\{-1\}$

例3 设全集$I=R$，$A=\{x|x^2+3x+2<0\}$，$B=\{x|x^2+5x+6<0\}$，$C=\{x|x^2+3x\geqslant 0\}$

求：（1）$A\cap B$；　　（2）$(A\cup B)\cap C$；

（3）$A\bar{\cap}(B\cup C)$；　　（4）$(\overline{A\cap B})\cap C$。

解：$A=\{x|x^2+3x+2<0\}=\{x|-2<x<-1\}$

$B=\{x|x^2+5x+6<0\}=\{x|x>-2或x<-3\}$

$C=\{x|x^2+3x\geqslant 0\}=\{x\geqslant 0或x\leqslant -3\}$

利用数轴求解得：

（1）$A\cap B=A=\{x|-2<x<-1\}$；

（2）$(A\cup B)\cap C=\{x|x<-3或x\geqslant 0\}$；

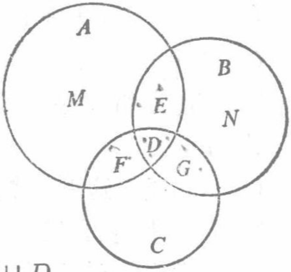
（3）$\overline{A}\cap(B\cup C)=\{x|x\leqslant-3$或$x\leqslant-1\}$；

（4）$(\overline{A\cap B})\cap C=\{x|x\leqslant-3$或$x\geqslant0\}$。

说明：交集是两条线的重叠部分，并集是求两条线覆盖的所有部分。

例4 某班在校运动会中，有18人获第一名，20人获第二名，10人获第三名，同时获第一、二名的有3人，同时获一、三名的有5人，同时获二、三名的有6人，一、二、三名都获得的有2人，求参加项目的有多少同学。

〔分析〕本题涉及到不同集合的元素重复，较难求解，若画出图形来，则简单、直观。



解：如图

设 $A=\{$获第一名的同学$\}$

$B=\{$获第二名的同学$\}$

$C=\{$获第三名的同学$\}$

则 $A\cap B=D\cup E$，

$B\cap C=D\cup G$，$A\cap C=F\cup D$。

用n表示各集合中的元素，则$n(A)=18$，$n(B)=20$，$n(C)=10$，$n(D)=2$

$n(E)=n(A\cap B)-n(D)=3-2=1$

$n(G)=n(B\cap C)-n(D)=6-2=4$

$n(F)=n(A\cap C)-n(D)=5-2=3$

$n(M)=n(A)-n(E)-n(D)-n(F)$

$=18-1-2-3=12$

$n(N)=n(B)-n(E)-n(D)-n(G)$

$=20-1-2-4=13$

设I为全集，即参加比赛的全体同学

$\therefore n(I)=n(C)+n(M)+n(N)+n(E)=10+12+13+1$

$=36$（人）

说明：直接计算的公式为

$$n(I)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$$
$$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)。$$

应在正确理解的基础上，熟练应用，以加快解题速度。在解交集、并集的有关问题中，可用作图法，它能有效地将抽象的东西用具体的形式表达出来。

例5 下列命题正确的是：

（A）无限集的子集是有限集；

（B）任何一个集合A必有两个子集；

（C）空集ϕ与集合$\{\phi\}$表示同一集合；

（D）集合$\{0\}$与集合$\{\phi\}$都是单元素集。

〔分析〕(A)错误，如有实数集是实数集的子集，但有理数不是有限集；

（B）错误，这里只考虑A为非空集时它有两个子集，这两子集为ϕ和A本身。若A本身为空集，则它只有一个子集ϕ；

（C）错误，ϕ是不含任何元素的集合，而$\{\phi\}$是以一个集合ϕ为元素的单元素集合，故ϕ与$\{\phi\}$不是同一集合；

（D）正确，$\{0\}$与$\{\phi\}$都是单元素集合。

解：应选（D）。

二、函　　数

（一）重点

理解函数的有关概念，如定义域、值域、反函数等；掌握函数的有关性质，如奇偶性、单调性、周期性，会画函数的图象，熟悉函数变换的有关方程，重点掌握二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的图象与性质。

（二）难点

函数及反函数的概念，求函数值域的方法，函数的有关性质、图象变换以及有关二次函数最值的讨论问题。

（三）重点、难点知识分析

函数部分的内容比较多，应重点掌握好以下基本技能和基本方法。

1.能熟练地求函数的定义域和值域。关于求值域的问题，可以从解析式的类型和求值域的方法类型上进行归纳总结。

2.会求简单函数的反函数以及反函数的定义域或值域。注意反函数存在的充要条件。

3.能利用有关函数的单调性进行比较大小，利用函数的单调性定义证明有关问题；会判断有关函数的奇偶性，能利用奇偶函数的图象性质解决简单问题。

4.能熟练地画出二次函数、幂函数、指数函数、对数函数的图象，能熟练地进行图象的平移、对称、放缩变换。

5.能较熟练地解决有关二次函数最值的讨论问题，注意正确区别定义域上的最值与给定闭区间上的最值。

例6 求下列函数的定义域：

（1）$y=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$；

（2）$y=\lg(x+\sqrt{x^2-1})$；

（3）$y=\dfrac{x^2+1}{1+x}+2$。

〔分析〕 求函数的定义域主要根据几个基本函数的定义域，把一个函数分为几个基本函数，分别求出定义域，再求它们的交集。

解：（1）分为两个基本函数$f(x)=\lg x$，$f(x)=\sqrt{x}$则定义域为不等式组$\begin{cases}x^2+1\geqslant 0\\ x+\sqrt{x^2+1}>0\end{cases}$的解集，解集为$R$，故定义

域为R。

（2）由$\begin{cases}x^2-1\geqslant 0\\ x+\sqrt{x^2-1}>0\end{cases}$ 解集为$\{x|x\geqslant 1\}$，故定义域为$x\geqslant 1$。

（3）由$x+1\neq 0$，定义域为$x\neq -1$。

例7 求下列函数的极值：

（1）$y=\dfrac{1+x^2}{1+x}$； （2）$y=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3$；

（3）$y=x^2+4x+6$。

〔分析〕 求极值常用的方法有：配方法、判别式法、利用基本不等式法。

解：（1）用一元二次方程根的判别式来求。将原函数式变为$x^2-yx-y+1=0$，$\Delta=y^2+4(y-1)\geqslant 0$，即$y^2+4y-4\geqslant 0$，解得$y\geqslant 2(\sqrt{2}-1)$或$y\leqslant -2(\sqrt{2}+1)$。

（2）解1：配方$y=x^2+\dfrac{1}{x^2}+3=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+5\geqslant 5$

解2：利用不等式$x^2+y^2\geqslant 2xy$（$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$）

$$y=x^2+\frac{1}{x^2}+3\geqslant 2|x|\cdot\frac{1}{|x|}+3=5.$$

（3）配方：$y=x^2+4x+6=(x+2)^2+2\geqslant 2$

说明：这里所求的极值，也可以说是在一确定区域内的最值，而不是最大值或最小值．比较这些极值，才能得到最值，本例（1）只有极值而无最值。

对于本例中的（2）若配方为$y=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+1\geqslant 1$，这是错误的，因为$x+\dfrac{1}{x}$不可能等于0。

求出了函数的极值，也就确定了函数的值域，因此求函数值域的一般方法与求极值的方法相同。

例8 下列命题中正确的是：

（A）偶函数的图象一定与纵轴相交；

（B）奇函数的图象一定过原点；

（C）既是奇函数又是偶函数的函数是不存在的；

（D）偶函数的图象关于纵轴对称。

〔分析〕要从基础知识奇、偶函数的图象入手。奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于y轴对称，要通过举反例排除错误的答案。（A）$y=x^{-2}$为一偶函数，但并不与y轴相交；（B）$y=\frac{1}{x}$为奇函数，但图象不过原点；（C）函数$f(x)=0$既是奇函数又是偶函数；只有（D）正确。

解此类题要对幂函数、指数函数、对数函数的定义域、图象、性质很熟悉，才能恰当地举出适当的列题加以说明。

例9 求下列函数在定义域内的增减性：

（1）$f(x)=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$；（2）$f(x)=x^{2}-\frac{1}{x_{2}}$。

解：（1）设x_1、x_2为定义域内任意两个自变量，且$x_2>x_1$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{1}{2}[(e^{x_2}-e^{x_1})+(e^{-x_1}-e^{-x_2})]$$

$\because e>1$，$x_2>x_1$ $\therefore e^{x_2}>e^{x_1}$，即$e^{x_2}-e^{x_1}>0$，

$\because -x_2<-x_1$ $\therefore e^{-x_2}<e^{-x_1}$，即$e^{-x_1}-e^{-x_2}>0$，

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$。

即函数$f(x)$在R上为增函数。

（2）为增函数（解略）。

说明：函数的单调性是对一定区间而言，区间变化，函数单调性也在变化，如函数$y=\frac{x^{2}}{1+x}$在区间〔0，$+\infty$）上为增函数，在区间（-2，-1）上为减函数；在区间（-1，0）上为

减函数，在区间（$-\infty$，-2）上为增函数。要注意两个单调区间是不能合并到一起的，如在区间（-2，-1）$\cup$（-1，0）上函数不是单调函数。

例10 比较下列各组数的大小

（1）$2.5^{\frac{2}{3}}$，$(-1.4)^{\frac{2}{3}}$，$(-3)^{\frac{1}{3}}$

（2）$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$，$\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}}$

（3）$\log_5 2$，$\frac{2}{5}$，$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$.

〔分析〕比较一组数的大小，主要利用幂函数、指数函数、对数函数的单调性，具体方法是：两两比，与0比，与1比。

解：（1）显然$(-3)^{\frac{1}{3}}<0$，$2.5^{\frac{2}{3}}>0$，$(-1.4)^{\frac{2}{3}}=1.4^{\frac{2}{3}}>0$，又函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$，当$x>0$时为增函数，则

$$2.5^{\frac{2}{3}}>1.4^{\frac{2}{3}}=(-1.4)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ 2.5^{\frac{2}{3}}>(-1.4)^{\frac{2}{3}}>(-3)^{\frac{1}{3}}.$$

（2）函数$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x$为减函数，又$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{5}$

$$\therefore\ \left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}>\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{5}}.$$

（3）$\because 2<5$，$\therefore \log_5 2<1$

函数$f(x)=\left(\frac{2}{3}\right)$为减函数，又$-2<0$，

$\therefore \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}>1$，而$\frac{2}{5}<1$，

$\because 2^5=32>5^2=25$

$\therefore 5^{\frac{2}{5}}<2$，即$\log_5 2>\frac{2}{5}$。

$\therefore \left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}>\log_5 2>\frac{2}{5}$。

例11 函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图象与x轴有唯一交点，函数取最小值时$x=2$，函数的图象与圆$x^2+y^2=4$交于y轴，求函数的表达式。

〔分析〕因为函数的图象与x轴只有一个交点，所以此交点必为最小值点，由它建立两个方程，因为有最小值，所以$a>0$，那么函数图象与y轴的交点必在x轴的上方，由此可建立关于c的一个方程，由三个方程，就可以求出a、b、c的值，进而可确定出函数表达式。

解：$\because$函数有最小值，故$a>0$。

$\because$函数的图象与x轴只有一个交点，故此交点为最小值点。

$$\therefore 有\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2 & ①\\[2ex] \dfrac{4ac-b^2}{4a}=0 & ②\end{cases}$$

$\because$圆$x^2+y^2=4$与y轴交于（0，2）、（0，-2），又$a>0$，故$c=2$。

$\therefore a=\frac{1}{2}$，$b=-2$，$c=2$。

$\therefore$函数的表达式为$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$。

说明：要充分利用题中给出的每一条信息。考虑到每一种可能性。如本题，函数$f(x)=ax^2+bx+c$有两种可能，$a=0$时图象是一条直线，$a\neq 0$时是一条抛物线，但题中给出了最小值，就排除了$a=0$的可能性，圆与y轴有两个交点，哪一个交点才是抛物线与圆的交点呢？这也可由函数有最小值推出，可见，审题很关键。

例12 解下列方程：

（1）$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=6$

（2）$4^{x+\sqrt{x^2-2}}-5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}}=6$

（3）$8^x+2^x=5(4^x-2)$。

〔分析〕 解这样的方程，关键在于找出一个量，使其它带有未知数的量都可用它表示出来，化为一个一元的简单方程来解。

解：（1）$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x+(\sqrt{3-\sqrt{8}})^x=6$

$\therefore (1+\sqrt{2})^x+(\sqrt{2}-1)^x=6$

$(\sqrt{2}+1)^x+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^x=6$

令$(\sqrt{x}+1)^x=t$，则原方程可化为

$t^2-6t+1=0$，得$t=\dfrac{6\pm\sqrt{32}}{2}=3\pm 2\sqrt{2}$

即$(\sqrt{2}+1)^x=3\pm 2\sqrt{2}$

$\therefore x=\pm 2$。

（2）令 $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t$，原方程化为

$t^2-\dfrac{5}{2}t-6=0$。解得：$t=4$或$t=-\dfrac{3}{2}$

即$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=4$ $\therefore x+\sqrt{x^2-2}=2$

$\therefore x^2-2=x^2-4x+4$ $\therefore x=\dfrac{1}{2}$

即$2^{x+\sqrt{x^2-2}}=-\frac{3}{2}$，无解。

检验后知$x=\frac{1}{2}$是原方程的根。

（3）令$2^x=t$，则原方程可化为

$$t^3-5t^2+t+10=0$$

$$(t^3-2t^2)-(3t^2-6t)-(5t-10)=0$$

$$(t-2)(t^2-3t-5)=0$$

$$\therefore t_1=2,\ t_2=\frac{3+\sqrt{29}}{2},\ t_3=\frac{3-\sqrt{29}}{2}（舍）$$

$$\therefore 2^x=2,\ \therefore x_1=1。$$

$$\therefore 2^x=\frac{3+\sqrt{29}}{2} \qquad \therefore x_2=\log_2\frac{3+\sqrt{29}}{2}$$

检验后知x_1，x_2都是原方程的根。

例13 比较$\log_7 8$与$\log_8 9$的大小。

解1：令$\log_7 8=a$，$\log_8 9=b$，则

$$7^a=8,\ 8^b=9$$

$$7^{a-1}=\frac{8}{7},\ 8^{b-1}=\frac{9}{8}.$$

$$\because 64>63$$

$$\therefore 7^{a-1}=\frac{8}{7}>\frac{9}{8}=8^{b-1}$$

$$\because a>1,\ b>1 \quad \therefore a-1>b-1$$

$$\therefore a>b \quad 即\log_7 8>\log_8 9$$

解2：$\lg 7\cdot\lg 9<\left(\frac{\lg 7+\lg 9}{2}\right)^2=(\lg\sqrt{63})^2<(\lg 8)^2$

$$\therefore \log_7 8>\log_8 9。$$

说明：两个不同底的对数不易比大小，第一种解法是先将

它变形为指数式，比大小；第二种方法较简单，但需熟练掌握基本不等式及对数式的变形。

例14 设$f(x)$，$g(x)$在定义域内为单调函数，分别求出下列各情况下$F(x)=f[g(x)]$在定义域内的单调性。

(1) $f(x)$，$g(x)$都是减函数；

(2) $f(x)$，$g(x)$都是增函数；

(3) $f(x)$是增函数，$g(x)$是减函数；

(4) $f(x)$是减函数，$g(x)$是增函数。

解：在定义域内任取x_1、x_2，且$x_1>x_2$，则

(1) 由$g(x)$是减函数，得$g(x_1)<g(x_2)$；

又$f(x)$为减函数，得$f[g(x_1)]>f[g(x_2)]$；

$\therefore$对于任意$x_1>x_2$，有$F(x_1)>F(x_2)$，

$\therefore F(x)$为增函数。

(2) 由$g(x)$为增函数，得$g(x_1)>g(x_2)$；

又$\because f(x)$为增函数，得$F[g(x_1)]>f[g(x_2)]$；

$\therefore$对于任意$x_1>x_2$，有$F(x_1)>F(x_2)$，即$F(x)$为增函数。

(3) 由$g(x)$为减函数，得$g(x_1)<g(x_2)$；

又$\because f(x)$为增函数，$\therefore f[g(x_1)]<f[g(x_2)]$

$\therefore$对于任意$x_1>x_2$，有$F(x_1)<F(x_2)$，即$F(x)$为减函数。

(4) 由$g(x)$为增函数，得$g(x_1)>g(x_2)$；

又$\because f(x)$为减函数，$\therefore f[g(x_1)]<f[g(x_2)]$。

$\therefore$对于任意$x_1>x_2$，有$F(x_1)<F(x_2)$，即$F(x)$为减函数。

说明：对于复合函数$F(x)=f[g(x)]$，当$f(x)$、$g(x)$单调性相同时，$F(x)$为增函数，当$f(x)$、$g(x)$单调性相反时，$F(x)$为减函数。