Operations Research

运筹学

大学数学编写委员会《运筹学》编写组

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

运　筹　学

Yunchouxue

大学数学编写委员会
《运筹学》编写组

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容简介

本书共 14 章，内容包括：线性规划、求解线性规划的方法、对偶理论与灵敏度分析、线性规划的应用、整数规划、非线性规划的基本理论、单变量函数的极值问题、无约束极值问题、约束极值问题、动态规划、运输问题、多目标规划、随机规划、相关软件及应用程序等运筹学的主要理论和算法，具有较高的理论价值与实用价值。

本书可作为高等学校数学、经济、管理、交通运输、计算机、信息等本科专业以及各类硕士研究生的教学用书，也可作为工程技术人员、管理人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/大学数学编写委员会《运筹学》编写组编. —北京：高等教育出版社，2011.8

ISBN 978-7-04-033435-7

Ⅰ.①运… Ⅱ.①大… Ⅲ.①运筹学-高等学校-教材 Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 150557 号

策划编辑 李晓鹏　责任编辑 贾翠萍　封面设计 张志奇　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹　莉　责任校对 俞声佳　责任印制 张福涛

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 北京天来印务有限公司
开　　本 787mm × 960mm　1/16
印　　张 21.5
字　　数 530 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
　　　　 http://www.landraco.com.cn
版　　次 2011 年 8 月第 1 版
印　　次 2011 年 8 月第 1 次印刷
定　　价 33.60 元

物 料 号 33435-00

大学数学编写委员会

主　编： 尚有林
副主编： 李保安　秦　青
编　委： 丁孝全　王春伟　王锋叶　陈金兰
陈　鹏　杨万才　杨德伍　李二强
李小申　徐翠霞　常志勇

前　言

伴随着电子计算机的应用与发展,以最优化作为终极目标的"运筹学"得到了迅速的成长,已经成为各级管理人员与工艺技术设计者的重要工具。为了适应高等学校教学与科研的需要,也为了给从事实际工作的技术人员提供一个优化设计的参考资料,我们编写了这本书。本书主要针对大学本科数学与应用数学专业的特点及要求,同时兼顾管理、经济、系统工程等专业的要求,论述了运筹学各主要分支的模型、基本概念与理论、主要算法和应用,可作为这些专业"运筹学"课程的教材,也可以作为相关专业硕士研究生的教材,还可供从事运筹学、管理科学的工作者和工程技术人员做参考。

本书的特点是:突出应用、兼顾理论、深浅相宜、与世界接轨。教材对各主要分支的基本理论和主要方法给出了较为严密的论述;内容上有所侧重和更新,体现了现代运筹学的特点,使读者对本领域的情况有较为全面的了解,便于今后的发展与提高。本书简单地介绍了各主要分支的当前发展动向和新成果,并在相关章节介绍了主要算法所适用的计算机的通用软件,在各章末附有内容适当、数量充分的习题。

本书于2009—2010年以讲义形式在河南科技大学和几个兄弟院校中教学使用,反映良好,得到了广大师生和同行专家的认同和好评,也吸收了一些中肯的建议。根据我们的教学实践和经验及同行专家和兄弟院校的宝贵建议,编写组成员对讲义进行了仔细的修改和润色,在保持原稿结构和风格的前提下,更加注重思维的启迪和开拓,内容和方法的实用性、先进性和系统性,习题搭配的合理性等。

本书由大学数学编写委员会《运筹学》编写组编写,其中尚有林编写第1、2、12、13、14章,秦青编写第4、5、6章,徐翠霞编写第8、9、10章,王锋叶编写第3、7、11章,尚有林、秦青任主编并完成统稿工作。在编写过程中,同济大学的濮定国教授、上海大学的张连生教授、大连理工大学的夏尊铨教授给予了我们热情的指导和帮助,并提出了宝贵的修改意见;河南师范大学的申培萍教授对书稿的内容提出了很多建设性的意见;河南科技大学数学与统计学院的老师们给予了大力的支持和关心。在编写过程中我们还汲取了国内外的一些著作中的营养,在

此，一并表示诚挚的谢意。

由于水平有限，书中难免有不足和错误之处，恳切希望得到运筹学界同仁及读者的批评和指正。

编　者

2011 年 6 月

目　　录

第一章　线 性 规 划

1.1　线性规划的数学模型

1.1.1　问题的提出

我们用下面的例子来说明什么是线性规划问题.

【例 1－1】　某厂在一个生产周期内生产甲、乙两种产品. 生产每单位甲产品需用 A 材料 20 千克,B 材料 10 千克,并可获得利润值 500 元. 生产每单位乙产品需用 A 材料 10 千克,B 材料 15 千克,并可获得利润值 600 元. 工厂现有 A 材料 4 000 千克,B 材料 3 000 千克. 问:该厂安排生产甲、乙两种产品各多少时,方可获得最大利润?

解　假设该厂安排生产甲产品 x_1 个单位、乙产品 x_2 个单位,这些产品完全销售之后,可获得的利润总值(元)为

$$z=500x_1+600x_2,$$

总值 z 为变量 x_1 与 x_2 的线性函数,称为问题的目标函数.

在使目标函数达到最优化的过程中,产量 x_1 与 x_2 必须在资源条件的约束之下,即受材料 A、B 的数量限制,以及对产量 x_1 与 x_2 的非负要求. 也就是说,x_1 与 x_2 要满足不等式组:

$$\begin{cases}20x_1+10x_2\leqslant 4\ 000\\10x_1+15x_2\leqslant 3\ 000\\x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

的要求,而该不等式组是 x_1 与 x_2 的线性不等式组,称为问题的约束条件.

把目标函数与约束条件写在一起,用下面形式表示:

$$\operatorname{Max} z = 500x_1 + 600x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}20x_1 + 10x_2 \leqslant 4\ 000\\10x_1 + 15x_2 \leqslant 3\ 000\\x_1 \geqslant 0,x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

记号：Max（Min）——表示目标函数取最大值（最小值），

s.t. ——英文 subject to 的缩写，表示约束于.

【例 1－2】 运输问题

设某种货物有 m 个产地：$A_1, A_2, \cdots, A_m$，联合供应 n 个销售地：$B_1, B_2, \cdots, B_n$. 各地的产量（单位：t）、各地的销量（单位：t）、各个产地到各个销售地的单位运价（单位：元/t）如表 1－1 所示. 问如何调运，才能使总运费最少？

表 1－1 m 个产地与 n 个销售地的单位运价表

单价（元/t） 销售地 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量（t）
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	a_m
销量（t）	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表中：$a_i (i=1,2,\cdots,m)$ 表示产地 A_i 的产量；

$b_j (j=1,2,\cdots,n)$ 表示销售地 B_j 的销量；

$c_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 表示从产地 A_i 到销售地 B_j 的单位运价.

解 设 x_{ij} 表示从产地 A_i 运往销售地 B_j 的物资数量. 当产地的总产量与销售地的总需求量相等时，即 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ 时，则含有 mn 个变量的变量组：$x_{ij} (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$，应满足的目标函数与约束条件如下：

$$\text{Min } z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{array}\right\} & (1) \\ \left.\begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{array}\right\} & (2) \\ \left.\begin{array}{r} x_{ij} \geqslant 0 \\ i = 1,2,\cdots,m \\ j = 1,2,\cdots,n \end{array}\right\} & (3) \end{cases}$$

目标函数表示:总运费要取最小值.

约束条件表示:

(1) 表示从任意一个产地发到各个销售地的发量之和应等于该产地的产量;

(2) 表示从各个产地发到某个销售地的总发量之和应等于该销售地的销量;

(3) 表示各调运量非负.

上述两个例题的共同特征就是求一组非负变量,使这组变量在满足线性的等式或不等式的约束条件之下,使得线性的目标函数达到最优值. 我们称此类问题为线性规划问题.

1.1.2 线性规划模型

线性规划问题的数学模型的一般形式是:

$$\mathrm{Min}(\mathrm{Max})\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (\text{或} \geqslant, \text{或} =) b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中:$a_{ij}, c_j, b_i (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$都是已知的常数.

线性规划问题是规划论中,理论最为完整、应用最为广泛的一类极值问题. 由于它具有独特的线性特点,所以它有特殊的解法. 我们称满足约束条件的解为可行解或可行点. 可行解集合称为可行区域或约束区域. 使目标函数达到最优值的可行解,称为线性规划问题的最优解.

1.2 线性规划的图解法

对于只含有两个变量的线性规划问题,可以利用图解法求解. 即在平面上将可行区域具体画出,结合目标函数的平行直线族与可行区域的几何关系来求解线性规划问题.

【例 1-3】 解线性规划问题

$$\mathrm{Max}\ z = 500x_1 + 600x_2$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}20x_1 + 10x_2 \leqslant 4\,000 \\ 10x_1 + 15x_2 \leqslant 3\,000 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

解 我们把变量 x_1 与 x_2 看作平面直角坐标系上的坐标.

第一步 在平面直角坐标系中,画出满足约束条件的可行区域.

等式:$20x_1+10x_2=4\ 000$ 表示平面直角坐标系中的一条直线 AB,只要在平面内找出满足该等式的任意两点,其连线就是直线 AB.

该直线把平面分成两个半平面.不等式 $20x_1+10x_2\leqslant 4\ 000$ 表示其中的一个半平面,判断究竟是哪个半平面的方法是:在平面内任找一点,譬如坐标系的原点(0,0),该点的坐标若满足不等式,则该点所在的半平面就是该不等式所表示的半平面.否则,就是另一个半平面.

同理,可画出不等式:$10x_1+15x_2\leqslant 3\ 000$,$x_1\geqslant 0$,$x_2\geqslant 0$ 所表示的其他三个半平面.这样,约束条件中的四个不等式的解集,就是四个半平面相交部分构成的公共区域.即图 1-1 中的四边形 $OABC$ 是线性规划问题的可行区域.

显然,若可行区域不存在的话,则线性规划问题无解.

第二步 在直角坐标系中,画出目标函数所表示的直线.

令目标函数中的变量 z 取不同的常数,就得到不同的直线.例如,令 $z=0$,就得出过原点的直线 l:$500x_1+600x_2=0$,直线 l 上的任意点的坐标都能使 z 的值为 0,因此称此直线为等值线.z 取不同的值时,就得到不同的等值线,所有等值线的斜率均相等,所以,它们是一簇平行的直线.在与等值线垂直的方向上,等值线的值单调增加或单调减少.

下面考虑等值线的增大方向.

考虑原点(0,0)到直线 $500x_1+600x_2=z$ 的距离:

$$d=\left.\frac{|500x_1+600x_2-z|}{\sqrt{500^2+600^2}}\right|_{(0,0)}=\frac{|z|}{100\sqrt{61}},\quad 则\ z=\pm 100\sqrt{61}d$$

这说明,d 的值越大,z 的绝对值也就越大;d 的值越小,z 的绝对值也就越小.

线性规划的实质就是从约束条件中找出最优解.从几何上来说,就是从这些平行的等值线中找出一条既与原点距离最远,且与约束区域相交的直线,而这条等值线与约束区域的交点 B 的坐标正好就是线性规划问题的最优解.

第三步 求最优解及最优值.

从图 1-1 中可以看出:B 点是直线 $20x_1+10x_2=4\ 000$ 与 $10x_1+15x_2=3\ 000$ 的交点坐标,故解方程组:

$$\begin{cases}20x_1+10x_2=4\ 000\\10x_1+15x_2=3\ 000\end{cases}$$

得

$$x_1=150,\quad x_2=100$$

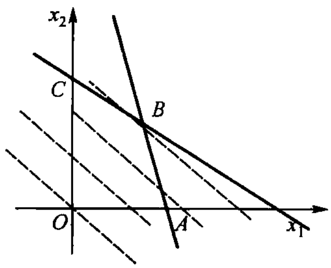

图 1-1

这就是例 1-1 的最优解.即在现有的条件

下，该厂安排生产甲产品150个单位、乙产品100个单位，方可获取最大利润. 最大利润值：

$$z = 500 \times 150 + 600 \times 100 = 135\ 000(\text{元}).$$

【例1-4】 用图解法，求解线性规划问题

$$\text{Max}\ z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 5 \\ x_1 \leqslant 3 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 如图1-2，在直角坐标系中，约束区域是五边形 $OABCD$.

令 $z=5,4,2,0$，得到一系列的目标函数等值线，目标函数等值线离原点距离越远，值就越大. 离原点距离最远的等值线与可行区域的交点恰恰是边 BC，这就是说边 BC 上的任何一个点都是最优解. 所以该线性规划问题有无穷多个最优解.

【例1-5】 用图解法，求解线性规划问题

$$\text{Max}\ z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 如图1-3，先在直角坐标系中画出约束区域，即图中的凸域 $ABCD$ 是一个无界的区域. 让平行线族 $z = x_1 + x_2$ 沿着法向量 $(1,1)^{\mathrm{T}}$ 移动，可以无限制移动下去，所以该问题的最大值是正无穷大，没有最优解，即该问题无界.

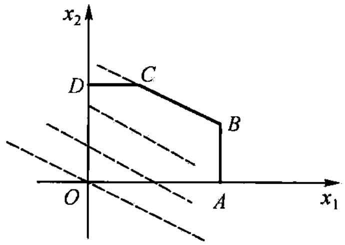

图1-2

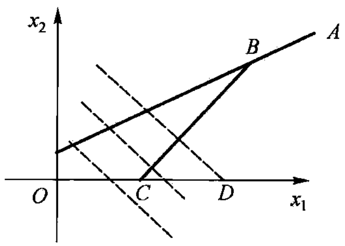

图1-3

【例1-6】 用图解法，求解线性规划问题.

$$\text{Min}\ z = 2x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 在直角坐标系中画出约束不等式区域,如图 1-4.

可以看到约束不等式的交集是空集,即线性规划问题的可行区域不存在.所以该问题无解.

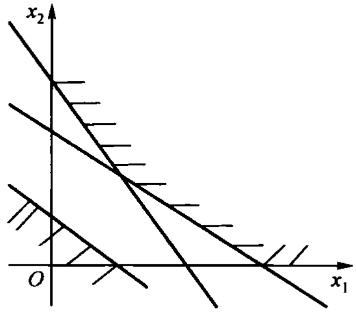

图 1-4

从图解法中可以得出线性规划问题的以下几点直观结论:

(1) 线性规划问题的可行区域可能存在,也可能不存在.若不存在,则线性规划问题一定无解.

(2) 若可行区域存在,它是若干个半平面的交集,形成了一个有界或无界的凸多边形,且存在有限个顶点.

(3) 若线性规划问题存在最优解,那么最优解一定在可行区域的某个顶点上达到.

(4) 若线性规划问题存在最优解,它可能是唯一的,也可能是无穷多个,此时,它们是某两个最优顶点的连线段.

1.3 线性规划的标准形与基本概念

1.3.1 标准形

为了研究的方便,我们往往将线性规划问题转化为下列形式:

$$\operatorname{Min} z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geqslant 0, & j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

注意,这里要求 $b_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots,m$.

我们称以上形式为线性规划问题的标准形.

若记:$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{X}\geqslant 0$ 表示 $\boldsymbol{X}$ 的分量都大于或等于 0,则线性规划问题的标准形的矩阵表达形式为:

$$\operatorname{Min} z = \boldsymbol{c}\boldsymbol{X}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

这里,我们称 $\boldsymbol{A}$ 为线性规划问题的约束矩阵,$\boldsymbol{X}$ 为决策向量,$\boldsymbol{c}$ 为价值向量,$\boldsymbol{b}$ 为右端向量或资源向量.

若记:$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n)$,$\boldsymbol{p}_j$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列向量,于是,线性规划问题的标准形的向量表示形式为:

$$\text{Min } z=\boldsymbol{cX}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_j\boldsymbol{p}_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

我们在实际建模时,建立的线性规划的模型的形式具有一般性,并不完全是标准形.因此,将线性规划问题的模型转化为标准形成为我们需要解决的问题.根据实际问题的模型形式,我们将此过程归纳为以下情形:

(1) 目标函数为 Max $z=\boldsymbol{cX}$ 时,

令 $z'=-z$,此时,目标函数变为 Min $z'=-\boldsymbol{cX}$.

(2) 约束条件是不等式时,

可在不等式的左边加入一个非负变量或减去一个非负变量,使之成为等式.

如果第 k 个约束条件为:

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n\leqslant b_k$$

可在不等式的左边加上一个非负变量 x_{n+k},我们称之为松弛变量,使不等式变为:

$$a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\cdots+a_{kn}x_n+x_{n+k}=b_k$$

如果第 e 个约束条件为:

$$a_{e1}x_1+a_{e2}x_2+\cdots+a_{en}x_n\geqslant b_e$$

可在不等式的左边减去一个非负变量 x_{n+e},我们称之为剩余变量,使不等式变为:

$$a_{e1}x_1+a_{e2}x_2+\cdots+a_{en}x_n-x_{n+e}=b_e$$

此时,所有引入的松弛变量或剩余变量在目标函数中的系数均为零.

(3) 某个变量 x_j 是自由变量时,

可令:

$$x_j=x_j'-x_j'',\quad x_j'\geqslant 0,\quad x_j''\geqslant 0$$

并代入目标函数与约束条件之中,使之所有的变量均满足非负要求.

【例 1-7】 将以下线性规划问题化为标准形:

$$\text{Max } z=x_1-2x_2+3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 4 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 （1）令 $z' = -z$；

（2）令 $x_3 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geqslant 0$；

（3）第一个不等式左端添加松弛变量 x_6，第二个不等式左端添加剩余变量 x_7. 得到标准形：

$$\text{Min } z' = -x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 3x_5 + 0x_6 + 0x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 4 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 6 \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,4,5,6,7 \end{cases}$$

1.3.2 基本概念

定义 1－1 设线性规划问题的约束矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m，即 $\text{rank}(\boldsymbol{A}) = m$，则 $\boldsymbol{A}$ 中任何一个 m 阶的可逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为线性规划问题的一个基矩阵，简称基 $\boldsymbol{B}$.

如果基 $\boldsymbol{B}$ 是单位矩阵，则称基 $\boldsymbol{B}$ 为现行基.

线性规划问题的基不止一个，但最多有 C_n^m 个.

基 $\boldsymbol{B}$ 中的每一列称为基向量，$\boldsymbol{A}$ 中基之外的列称为非基向量. 基向量对应的变量称为基变量，非基向量对应的变量称为非基变量. 现行基的基向量是标准单位向量. 现行基变量在某个方程中的系数为 1，在其他方程中的系数为零.

定义 1－2 解约束方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 时，令非基变量等于零，求得相应的基变量值，此解叫做线性规划问题的基本解.

定义 1－3 基本解中的基变量非负时，称此基本解为基本可行解. 此时，基本可行解对应的基 $\boldsymbol{B}$ 称为可行基.

基本可行解中的基变量取值全不为零时，称此基本可行解为非退化的.

基本可行解中的部分或全部基变量取值为零时，称此基本可行解为退化的.

当线性规划问题的约束条件 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 满足：

秩$(\boldsymbol{A})$ = 秩$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = m < n$

时，它必有无穷多解，但它的基本可行解最多有 C_n^m 个，这是由于基本可行解与基 $\boldsymbol{B}$ 之间有着对应关系，一旦基确定之后，基变量与非基变量也就随之确定了.

定义 1－4 使目标函数取得最优值的基本可行解，称为线性规划问题的最优基本可行解.