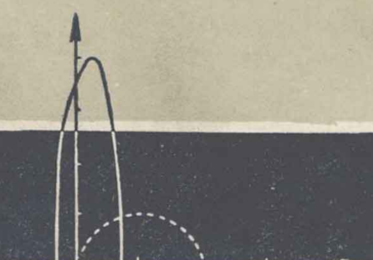
# 平面三角双基训练

第二版

主编 翟连林



数学自学丛书

中国农业机械出版社

数学自学丛书

# 平面三角双基训练

## 第二版

主编 翟连林
编者 蒋省吾 王书 吴秉国

中国农业机械出版社

## 内容简介

本书是《数学自学丛书》之一。

本书第一版出版后，深受广大读者欢迎。这是第二版，作者在第一版的基础上经过认真修改，充实了基础知识的内容，突出了能力的培养与训练。本书主要内容包括：三角函数、三角函数的性质和图象、加法定理及其推论、解三角形、反三角函数、三角方程、三角函数式的证明、三角不等式的证明与极值问题、综合训练等。

本书可供自学青年、职工、高中学生以及中学数学教师参考。

平面三角双基训练

（第二版）

主编 翟连林

编者 蒋省吾 王 书 吴秉国

*

中国农业机械出版社出版

北京市海淀区阜成路东钓鱼台乙七号

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

*

787×1092 32开 $17\,^3/_4$ 印张 390千字

1983年8月北京第一版

1985年11月北京第二版·1985年11月北京第二次印刷

印数：100,001—120,800 定价：3.10元

统一书号：7216·43

# 序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》（第一版）问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广泛

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和

大专学生自修参考用，以及中学数学老师进修提高用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是说每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

# 前　言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；

2. 《平面几何双基训练》；

3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；

2. 《立体几何双基训练》；

3. 《平面三角双基训练》；

4. 《平面解析几何双基训练》；

5. 《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1. 《一元微积分双基训练》；

2. 《多元微积分双基训练》；

3. 《线性代数双基训练》；

4. 《概率统计双基训练》；

5. 《复变函数双基训练》；

6. 《逻辑代数与BASIC语言双基训练》。

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

由于我们的水平有限，加之时间仓促，书中的不妥和错误之处，敬希广大读者批评指正。

编者

1985年3月

# 目　　录

# 第一章　三角函数

## 一、基础知识提要

### （一）锐角三角函数

1．角的概念

角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的．按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角，按顺时针方向旋转所成的角叫做负角．当这条射线没有做任何旋转时，我们把这个角叫做零角．

2．锐角

对一个角 $\alpha$，当 $0^\circ<\alpha<90^\circ$ 时，我们把这个角叫做锐角；当 $90^\circ<\alpha<180^\circ$ 时，叫钝角；当 $\alpha=90^\circ$ 时，叫直角．

在直角三角形中，除直角外的两个角都是锐角．

3．锐角三角函数

在直角三角形中，如果用 $\alpha$ 表示直角三角形中的一个锐角，则

$$\sin\alpha=\frac{\alpha\text{的对边}}{\text{斜边}};$$

$$\cos\alpha=\frac{\alpha\text{的邻边}}{\text{斜边}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\alpha\text{的对边}}{\alpha\text{的邻边}};$$

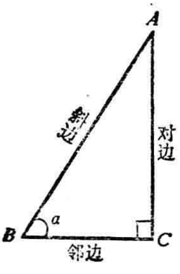



图　1-1

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\alpha\text{的邻边}}{\alpha\text{的对边}}.$$

在上面这几个关系式中，对于锐角 $\alpha$ 的每一个确定的值，边的比都有一个确定的值和它对应．我们把在直角三角形中所研究的角与边之间关系的函数，叫做锐角三角函数．

4．常用的几个锐角的三角函数值

锐角的三角函数值可以查表求得．钝角的三角函数值可以将钝角三角函数化为锐角三角函数再查表求得．几个特殊角的三角函数值（如 30°、45°、60°等）在计算、证明中经常应用，应该熟记．

30°、45°、60°的三角函数值如下表：

| 三角函数值 \ 三角函数 \ $\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| 30° | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| 45° | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 | 1 |
| 60° | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

## （二）弧度制

1．角度制

用“度”做单位来量弧与角的制度叫做角度制．我们把等于整个圆周的 $\frac{1}{360}$ 的弧所对的圆心角叫做 1 度的角．则有

$$1\text{周角} = 360^\circ,\ 1^\circ = 60',\ 1' = 60''.$$

2．弧度制

用"弧度"做单位来度量弧与角的制度叫做弧度制．在弧度制中，我们把圆心角所对的弧长（$l$）与半径（$R$）的比值，叫做该角（$\alpha$）或其所对弧的弧度制．若一段圆弧的长度等于半径的长度时，这段圆弧所对的圆心角的大小称为1弧度或1经，并规定，正角的弧度数为正数，负角的弧度数为负数，零角的弧度数为零，任一已知角$\alpha$的弧度数的绝对值为

$$|\alpha| = \frac{l}{r}.$$

其中　$l$为以角$\alpha$作为圆心角时所对圆弧的长，$r$为圆弧的半径．

根据上面的规定，有

$$360^\circ = 2\pi\ (\text{弧度}),$$
$$180^\circ = \pi\ (\text{弧度}).$$

用弧度量弧与角时，弧度单位常略去不写．如$\angle AoB = 1$弧度，可写成$\angle AoB = 1$；$\frac{\pi}{4}$弧度的正弦可写成$\sin\frac{\pi}{4}$．

3．角度与弧度的换算

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}(\text{弧度}) = 0.01745\ (\text{弧度}),$$

$$1\text{弧度} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57.30^\circ = 57^\circ 18'.$$

下面是几个常见的角的度数与弧度数的换算表，应当熟记．

| 度 | $0^\circ$ | $15^\circ$ | $30^\circ$ | $45^\circ$ | $60^\circ$ | $90^\circ$ | $180^\circ$ | $270^\circ$ | $360^\circ$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 弧度 | $0$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

### （三）任意角的三角函数

设 $\alpha$ 为任意角，以它的顶点为原点，以它的始边为 $x$ 轴的正方向建立直角坐标系，$P(x, y)$ 是角 $\alpha$ 的终边上任意一点，原点到这点的距离是 $r=\sqrt{x^2+y^2}$（如图 1-2）。

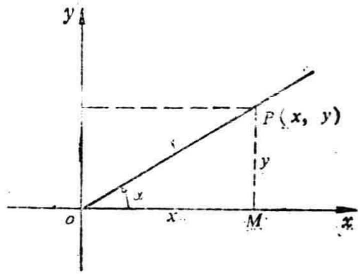



图 1-2

角 $\alpha$ 所对应的六个比值：

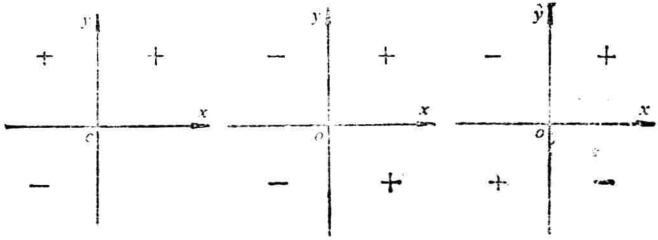
$$\frac{y}{r}, \quad \frac{x}{r}, \quad \frac{y}{x}, \quad \frac{x}{y},$$

$\frac{r}{x}$，$\frac{r}{y}$，都是跟随 $\alpha$ 的确定而确定的。因而每一个比值都是 $\alpha$ 的函数，这六个比值分别称为 $\alpha$ 的正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数。且依次记为：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}, \quad \cos\alpha=\frac{x}{r}, \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}, \quad \sec\alpha=\frac{r}{x}, \quad \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

这六个三角函数统称为三角函数。




$\sin\alpha, \csc\alpha$ $\cos\alpha, \sec\alpha$ $\operatorname{tg}\alpha, \operatorname{ctg}\alpha$

图 1-3

由于 $r$ 总是取正值，$P$ 点的坐标为（$x$，$y$），则由于 $\alpha$ 所在的象限不同，$x$、$y$ 可以是正的，也可以是负的.因此，各象限角的三角函数值的符号可以为正，也可以为负. $\alpha$ 在不同象限时，各三角函数值的符号，如图 1-3 所示.

**（四）同角三角函数的基本关系式**

1. 倒数关系

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1;\\ &\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;\\ &\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.\end{aligned}}$$

2. 商数关系

$$\boxed{\begin{aligned} &\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\\ &\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.\end{aligned}}$$

3. 平方关系

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\\ &1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;\\ &1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha.\end{aligned}}$$

**（五）诱导公式**

诱导公式可分为下列五组：

$$(\mathrm{I})\quad\begin{cases}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha,\\ \operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\\ \operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.\end{cases}$$

$$
(\text{II})\quad \begin{cases} \sin(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\sin\alpha, \\ \cos(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(k\cdot 360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}
$$

$$
(\text{III})\quad \begin{cases} \sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha, \\ \cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}
$$

$$
(\text{IV})\quad \begin{cases} \sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha, \\ \cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}
$$

$$
(\text{V})\quad \begin{cases} \sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha, \\ \cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(360^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \\ \operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha. \end{cases}
$$

上述这些诱导公式可以概括叙述如下：

$-\alpha$、$180^\circ+\alpha$、$180^\circ-\alpha$、$360^\circ-\alpha$、$k\cdot 360^\circ+\alpha$（$k\in Z$）的三角函数值等于$\alpha$的同名函数值，前面放上一个把$\alpha$看作锐角时原函数在相应象限内的符号，为了便于记忆，这二十个公式还可以用两句口诀来概括：“函数名称不改变，符号就看原象限”．

我们还应该知道，事实上，诱导公式中的角$\alpha$是可以为任意角的．

利用诱导公式求任意角的三角函数时，一般可按下面的