高等学校教材经典同步辅导丛书数学专业类(一)

配高教社《数学分析》第三版 下册 华东师范大学数学系 编

数学分析

下册 华东师大第三版

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 何联毅
本书主编 清华大学 曾 捷

◇紧扣教材 ◇知识精讲 ◇习题全解

◇应试必备 ◇联系考研 ◇网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步

数学分析

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　何联毅
本书主编　清华大学　曾　捷

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是高等教育出版社出版，华东师范大学数学系编的《数学分析》(第三版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、知识点归纳、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析、课后习题全解及考研考试指导等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校数学分析课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关研究人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(下册)同步辅导及习题全解/曾捷主编.
徐州:中国矿业大学出版社，2006.8
(高等学校教材经典同步辅导丛书)
ISBN 7-81107-399-4

Ⅰ.数… Ⅱ.曾… Ⅲ.数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 086919 号

书　　名 数学分析(下册)同步辅导及习题全解
主　　编 曾　捷
责任编辑 罗　浩
选题策划 孙怀东
特约编辑 王丽娜
出版发行 中国矿业大学出版社
印　　刷 北京市昌平百善印刷厂
经　　销 新华书店
开　　本 720×960　1/16　**本册印张** 20.5　**本册字数** 499 千字
印　　次 2008 年 5 月第 1 版第 4 次印刷
总 定 价 81.60 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前 言

PREFACE

《数学分析》是数学类专业重要的基础课之一，也是报考该类专业硕士研究生的专业考试课程。华东师范大学数学系编的《数学分析》(第三版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材，被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程，掌握更多知识，我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《数学分析同步辅导及习题全解》。本书旨在使广大读者理解基本概念，掌握基本知识，学会基本解题方法与解题技巧，进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材，具有较强的针对性、启发性、指导性和补充性的特点。考虑到《数学分析》这门课程的特点，我们在内容上做了以下安排：

1. 课程学习指南 从该课程的知识体系出发，对各个章节在全书的位置，以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述，使学习更有重点。

2. 知识点归纳 串讲概念，总结性质和定理，使得知识全面系统，便于掌握。

3. 典型例题与解题技巧 精选各类题型，涵盖本章所有重要知识点，对题目进行深入、详细的讨论与分析，并引导学生思考问题、能够举一反三，拓展思路。

4. 历年考研真题评析 精选历年考研真题进行深入的讲解。

5. 课后习题全解 本书给出了华东师范大学数学系《数学分析》(下册)(第三版)各章课后习题的答案。我们不仅给出了详细的解题过程，而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结，从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

6. 考研考试指导 首先归纳了本课程的考研考点，然后精选了清华大学等名校的最新考研考试试题并给出了参考答案，以帮助学生顺利通过相关考试。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此，谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网： http://www.huatengedu.com.cn

电子邮件： huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

CONTENTS

课程学习指南

数学分析是数学类各专业必修的一门主干核心理论基础课程，也是以后继续深化系统学习数学理论的基础课程，同时也是数学类各专业硕士研究生入学考试的必考科目，因此学好本门课程，掌握好基础理论对以后的学习是非常重要的。

学习数学分析课程的目的是了解掌握数学分析的基本理论，进而提高自己解决实际问题的能力。在社会经济高速发展的今天，数学分析在工程方面的应用越来越普遍。

数学分析课程具有很强的理论性和系统性，需要一定的理论分析能力与逻辑思维能力，因此在学习本课程之前最好有计划地进行适当预习，并了解一下相关理论的发展历程，对所学的课程有一个体系性的把握。同时本课程又是一门指导性的学科，对它的掌握直接关系到数学专业的其他课程。

		实变函数
		复变函数
数学分析	⇒	泛函分析
		常微分方程

本册书包含十二章内容，可分为三个部分。第一部分为级数，包括第十二至第十五章，主要介绍数项级数、函数列与函数项级数、幂级数和傅里叶级数，第二部分为多元函数的微分，包括第十六至第十八章，主要介绍极限与连续，多元函数微分学和隐函数定理及其应用。第三部分为多元函数的积分，包括第十九至第二十三章主要介绍含参量积分、曲线积分、重积分、曲面积分、流形上微积分学初阶。

数学分析是一门逻辑性很强的课程，因此学习这门课程有一定难度。为了学好这门课程，建议在学习过程中应按以下方法学习：

1. **理解掌握基本概念与定理，掌握基本方法。**
2. **注意，理论前后发展的系统性与联系性，要融会贯通，保持知识的连续性。**
3. **要注意应用所学的理论分析实际问题，做到理论与实际相结合。**
4. **要养成综合分析，认真思考的良好学习习惯。**

此外，为了帮助学生在考研、期末考试等考试中取得良好成绩，我们提出以下建议：

1. **勤动脑、爱思考**。将课程中所学的理论知识与实际问题相结合，认识到知识的力量在应用实践。

2. **多阅读、善分析**。要重点阅读一些数学分析方面的书籍，提高自己的分析能力及综合理论素质，并归纳总结解题的思维方法，做到学为所用，举一反三。

第十二章 数项级数

知识点归纳

一、定义

给定一个数列$\{u_n\}$,对它的各项依次用“+”号连接起来的表达式

$$u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots \qquad ①$$

称为数项级数或无穷级数(也常简称级数),其中u_n称数项级数①的通项.数项级数①记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$或$\sum u_n$.

二、级数收敛的柯西准则

级数①收敛的充要条件是:任给$\varepsilon>0$,总存在自然数N,使得当$m>N$和任意的自然数p,都有

$$|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}|<\varepsilon$$

反之,级数①发散的充要条件是:存在某正数ε_0,对任何自然数N,都存在$m_0>N$和自然数p_0,有

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon$$

由此易得:若级数①收敛,则$\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=S$.

三、正项级数收敛性的判别方法

(1)正项级数$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$收敛的充要条件是:部分和数列$\{S_n\}$有界,即存在某正数$M$,对一切自然数$n$有$S_n<M$.

(2)比较原则

(3)比较原则的极限形式

(4)达朗贝尔判别法(或称比式判别法)

(5)比式判别法的极限形式

(6)柯西判别法(或称根式判别法)

(7)根式判别法的极限形式

(8)积分判别法

(9)拉贝判别法

(10)拉贝判别法的极限形式

四、一般项级数收敛性的判别方法

(1)级数 $\sum |u_n|$ 收敛,则级数 $\sum u_n$ 绝对收敛,若 $\sum u_n$ 收敛, $\sum |u_n|$ 发散,称级数 $\sum u_n$ 为条件收敛.

(2)莱布尼兹判别法

(3)阿贝耳判别法

(4)狄利克雷判别法

典型例题与解题技巧

例 1　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,证明: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛($a_n>0$).

【分析】　本题主要考查正项级数的判敛,要求灵活运用正项级数的几种判敛法.

证

$$0<\frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}<\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$$

易知: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛(积分判别法),又 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n^2$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n\ln^2 n}\right)$ 收敛.

由比较判别法知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}$ 收敛($a_n>0$).

例 2　设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有连续的二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

【分析】　本题考查级数与之前所学知识的综合运用.级数的绝对收敛的判定.

证　由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$,又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数,可推出

$$f(0)=0,\quad f'(0)=0$$

将 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内展成一阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \quad (\xi 在 0 与 x 之间)$$

又由题设 $f''(x)$ 在属于邻域内包含原点的一个小闭区间连续,因此 $\exists M>0$,使 $|f''(x)|\leqslant u$,

于是

$$|f(x)|=\frac{1}{2}|f''(\xi)|x^2\leqslant\frac{u}{2}x^2$$

令 $x=\frac{1}{n}$,则 $|f(\frac{1}{n})|\leqslant\frac{u}{2}\cdot\frac{1}{n^2}$,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

历年考研真题评析

题 1　(中山大学,2007 年)级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是:对任意的正整数序列 $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ 都有 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$.

【分析】　本题考查对级数收敛的定义的理解程度.

证　必要性　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以对 $\forall \varepsilon>0, \exists N>0$,当 $n>N$ 及 $\forall P\in N$,有

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon$$

特别地

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n}|<\varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$$

充分性　用反证法. 若 $\sum a_n$ 发散,则 $\exists \varepsilon_0>0, \forall N>0, \exists n>N$ 及自然数 p,使

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n+p}|\geqslant\varepsilon_0$$

特别地 $N_1=1, \exists n_1>1$ 及自然数 r_1 使

$$|a_{n+1}+\cdots+a_{n_1+r_1}|\geqslant\varepsilon_0$$

$N_2=\max\{n_1, 2\}, \exists n_2>N_2$,及自然数 r_2,使

$$|a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2+r_2}|\geqslant\varepsilon_0$$

…………

这与 $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+r_n})=0$ 的假设矛盾.

题 2　(同济大学,2006 年)证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ ($\forall x\neq0$)都是条件收敛的.

【分析】　本题考查条件收敛的判断,莱布尼兹判别法与比较判别法的灵活运用.

证　不妨设 $x>0$,则 $\exists N_x>0$,当 $n>N_x$ 时,$0<\frac{x}{n}<\frac{\pi}{2}$,此时 $\sin\frac{x}{n}>0$,且 $\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$ 为单调递减数列,且 $\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{x}{n}=0$.

由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ 收敛.

而当 $n>N_x$ 时,$\left|(-1)^n\sin\frac{x}{n}\right|=\sin\frac{x}{n}>0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}=1$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n}$ 发散,由比较判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}$ 也发散.

所以 $\forall x\neq0$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{x}{n}$ 都是条件收敛的.

课后习题全解

§1　级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性,并求其和数:

(1) $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2})+\cdots+(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

【分析】 (1) 进行积分和差的转化.(4) 以某一项拆分为两项的方式重新组合原式.

解　(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{(5k-4)(5k+1)}=\frac{1}{5}\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{5k-4}-\frac{1}{5k+1})$

$$=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{5n+1})$$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{5}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{5}$.

(2) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k})=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3^k}$

$$=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2\times 3^n}$$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}$,故级数收敛且其和为$\frac{3}{2}$.

(3) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}[\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}]$

$$=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}]$$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$,故级数收敛且其和为$\frac{1}{4}$.

(4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{2})-(\sqrt{n+1}-1)$$

$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$$

于是 $S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$，故级数收敛且其和为 $1-\sqrt{2}$.

$$(5)S_n=2S_n-S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}$$
$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{2^k}-\frac{2n-1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}(n\geqslant 2)$$

于是 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=3$，故级数收敛且其和为 3.

2. 证明：若级数 $\sum u_n$ 发散，$c\neq 0$，则 $\sum cu_n$ 也发散.

证　因为级数 $\sum u_n$ 发散，即 $\exists\varepsilon_0>0$，对任何 $N\in\mathbf{N}_+$，总有 $m_0\in\mathbf{N}_+$ 和 $p_0\in\mathbf{N}_+$ 使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant\varepsilon_0$$

所以 $|cu_{m_0+1}+cu_{m+2}+\cdots+cu_{m_0+p_0}|=|c||u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|\geqslant|c|\varepsilon_0$

根据级数发散的充要条件，$\sum cu_n$ 亦发散.

3. 设级数 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都发散，试问 $\sum(u_n+v_n)$ 一定发散吗？又若 u_n 与 $v_n(n=1,2,\cdots)$ 都是非负数，则能得出什么结论？

解　若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散，则 $\sum(u_n+v_n)$ 不一定发散.

例如，$\sum 1$ 和 $\sum(-1)$ 是发散的，但 $\sum(1+(-1))$ 是收敛的；

$\sum 1$ 和 $\sum 2$ 是发散的，$\sum(1+2)=\sum 3$ 亦是发散的.

若 $\sum u_n$，$\sum v_n$ 都发散且 $u\geqslant 0,v_n\geqslant 0$，则 $\sum(u_n+v_n)$ 发散.

由柯西收敛准则，知 $\exists\varepsilon_0,\varepsilon_1>0$，对任何的 $N\in\mathbf{N}_+$，总存在 $m_0,p_0,m_1\in\mathbf{N}_+$，使

$$|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}|=u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}\geqslant\varepsilon_0$$

和　$$|v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}|=v_{m_1+1}+v_{m_1+2}+\cdots+v_{m_1+p_1}\geqslant\varepsilon_1$$

故　$$|(u_{m_0+1}+v_{m_0+1})+(u_{m_0+2}+v_{m_0+2})+\cdots+(u_{0+p_0}+v_{m_0+p_0})|$$
$$=(u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0})+(v_{m_0+1}+v_{m_0+2}+\cdots v_{m_0+p_0})\geqslant\varepsilon_0$$

即 $\sum(u_n+v_n)$ 必发散.

4. 证明：若数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

【分析】　单项收敛则和也收敛.

证　由已知条件知，数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

故　$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$$

从而　$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_1-a_{n+1})=a_1-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=a_1-a$$

5. 证明：若数列 $\{b_n\}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则

(1) 级数$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散；

(2) 当$b_n\neq 0$时，级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

【分析】 (2) 中间项相互抵消即可.

证 (1) 因为

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(b_{k+1}-b_k)=b_{n+1}-b_1$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(b_{n+1}-b_1)=\infty$$

故$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散.

(2) 当$b_n\neq 0$时

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{b_k}-\frac{1}{b_{k+1}}\right)=\frac{1}{b_1}-\frac{1}{b_{n+1}}$$

即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{b_1}-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{1}{b_1}$$

故级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)$收敛于$\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

【分析】 (1) 积化和差将原式拆分，简化了问题. (3) 识记$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

解 (1) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+n-1}-\frac{1}{a+n}\right)$$

而数列$\left\{\frac{1}{a+n-1}\right\}$收敛于 0，故由第 4 题的结论，可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{1}{a+1-1}-0=\frac{1}{a}\quad(a\neq 0)$$

(2) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{(-1)^n}{n}-\left(-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\right]$$

而数列$\left\{-\frac{(-1)^n}{n}\right\}$收敛于 0，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}=-\frac{(-1)^1}{1}-0=1$$

(3) 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1}\right]$$

而数列$\left\{\frac{1}{n^2+1}\right\}$收敛于 0，故