普通高等教育“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

FUBIANHANSHU YU JIFENBIANHUAN

刘瑞芹　王文祥　主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

复变函数与积分变换

FUBIANHANSHU YU JIFENBIANHUAN

主　编　刘瑞芹　王文祥
副主编　高艳辉　王　清　张守成
编　写　隋丽丽　杨文光　于　健
主　审　张凤元

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。全书共九章，主要内容包括复数与复变函数，解析函数，复变函数的积分，解析函数的级数表示，留数及其应用，共形映射，傅里叶变换，拉普拉斯变换，数学软件在复变函数与积分变换中的应用。全书知识体系完整，结构严谨，内容精练，选题灵活，推理简明，通俗易懂，旨在培养学生的数学素质，提高其应用数学知识解决实际问题的能力。

本书可作为理工科院校复变函数与积分变换课程的教材，还可作为学习复变函数与积分变换人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数与积分变换/刘瑞芹，王文祥主编．—北京：中国电力出版社，2011.9

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-2157-1

Ⅰ.①复… Ⅱ.①刘… ②王… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5②O177.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第196763号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http：//www.cepp.sgcc.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2011年11月第一版 2011年11月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 9.25印张 223千字

定价 **18.00** 元

前 言

复变函数理论产生于18世纪，19世纪是其创立并全面兴起的时期。柯西、黎曼、维尔斯特拉斯是它的三个主要奠基人，他们三人分别从分析的角度（微分和积分）、几何的角度（保形变换）、代数角度（幂级数展开）对复变函数进行研究，他们杰出的工作汇集在一起，使得复变函数理论成为一个重要的数学分支。复变函数是数论、代数、方程等理论研究中的重要方法之一。在数学学科之外，复变函数已被广泛应用于流体力学、电学、天文学、信息学、控制学等方面的研究。因此，复变函数理论不仅是提高学生数学素质的基础性课程，而且也是解决实际问题的一门应用性课程。

在数学中，往往可以通过适当的变换把一个复杂的运算转化为一个简单的运算，如对数变换，它可以把方幂运算转化为乘除运算，把乘除运算转化为加减运算，再通过取反对数得原来数量的方幂或积商。积分变换也属于这种情况。

随着科学技术的迅速发展，复变函数与积分变换的理论和方法已广泛应用于许多工程技术和科学研究领域，"复变函数与积分变换"课程是面向高等院校理工科学生继高等数学、线性代数、概率论与数理统计课程之后的又一门数学基础课。通过对本课程的学习，使学生掌握复变函数与积分变换的基本理论及工程技术中常用的数学方法，为学习相关的后续课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础。为了更好体现本课程的实用性和工科学生学习的特点，同时，为了满足教学改革和课程建设的需要，我们编写了这本教学用书。

本书遵照教育部制定的对本课程的教学基本要求，并结合编者多年讲授本课程的经验编写而成。本书具有以下几个特点：

（1）吸取了国内同类教材的优点，保持本课程传统的知识体系，考虑到理工科学生学习本课程的目的主要在于后续课程的应用，编写中侧重于对基本概念和解题方法的讲解，基本概念的引入尽可能简化，并淡化了一些理论证明，在学生获取知识的同时，培养学生的推理、归纳、演绎和创新能力。

（2）在内容的安排上力求由浅入深，循序渐进，使之能更好地适合理工科学生阅读。为了更好地便于学生自学，在注意编写的科学性和严谨性及知识的系统性的同时，力求叙述简洁，内容精练，推理简明，通俗易懂。

（3）例题和习题丰富。本书每一章都安排了适量的例题与习题，并注意到例题和习题选择上的典型性与多样性，有利于学生掌握所学内容，提高学生分析问题、解决问题的能力。

（4）增加了数学软件在复变函数与积分变换中的应用，使用常用数学软件Mathematica和MATLAB来进行复变函数与积分变换的各种运算，提高学生应用数学软件与编程的能力。学时不足时第九章可作为选修内容。

本书由华北科技学院的刘瑞芹、王文祥主编，高艳辉、王清、张守成副主编，隋丽丽、杨文光、于健编写。具体分工是：第一章和第九章由刘瑞芹编写，第二章由高艳辉编写，第三章和第四章由王清编写，第五章由张守成编写，第六章～第八章及附录由王文祥编写，习

题一～习题三由隋丽丽编写，习题四～习题六由杨文光编写，习题七和习题八由于健编写。全书由刘瑞芹、王文祥统稿，北京化工大学张凤元教授主审。

限于编者水平，书中疏漏和错误之处在所难免，恳请读者和同行专家、学者批评指正。

编 者

2011 年 7 月

目 录

第一章　复数与复变函数

自变量为复数的函数叫复变函数，它是本课程的研究对象. 复数的概念和运算是学习本课程的基础. 本章首先讨论复数的基本概念、代数运算、三角表示、乘幂与方根等知识及复平面上区域的概念，然后给出复变函数的概念，再将高等数学中极限、连续的概念移植到复变函数中.

第一节　复数及其运算

一、复数的概念及代数运算

1. 复数的概念

形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 的数称为复数，其中 x，y 为实数. 实数 x 和 y 分别称为复数 z 的实部与虚部. 记为

$$x=\mathrm{Re}z,\quad y=\mathrm{Im}z$$

虚部为零的复数为实数，虚部不为零的复数称为虚数，实部为零、虚部不为零的复数称为纯虚数. 复数 $z=x-\mathrm{i}y$ 和 $z=x+\mathrm{i}y$ 为共轭复数，z 的共轭复数记为 $\bar{z}$.

2. 复数的四则运算

设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，复数的四则运算定义为

加（减）法：$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$

乘法：$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)$$

除法：$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\frac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0)$$

相等：$z_1=z_2$ 当且仅当 $x_1=x_2$，$y_1=y_2$

复数的四则运算满足以下运算律

(1) 加法交换律　$z_1+z_2=z_2+z_1$

(2) 加法结合律　$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$

(3) 乘法交换律　$z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

(4) 乘法结合律　$z_1\cdot(z_2\cdot z_3)=(z_1\cdot z_2)\cdot z_3$

(5) 乘法对加法的分配律　$z_1\cdot(z_2+z_3)=z_1\cdot z_2+z_1\cdot z_3$

全体复数在加法和乘法运算下构成域，称为复数域. 在复数域中，复数没有大小. 全体复数构成的集合用 **C** 表示.

共轭复数的运算性质

(1) $\bar{\bar{z}}=z$；(2) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$；(3) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$；(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

例 1　计算复数 $\frac{3-2\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}}$.

解 方法一（商的公式）

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)+\mathrm{i}\left(\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\right)$$
$$=\frac{3\cdot 2+(-2)\cdot 3}{2^2+3^2}+\mathrm{i}\,\frac{2\cdot(-2)-3\cdot 3}{2^2+3^2}=-\mathrm{i}$$

方法二（共轭性质）

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}=\frac{(3-2\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}{(2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})}$$
$$=\frac{(6-6)+\mathrm{i}(-4-9)}{2^2+3^2}=-\mathrm{i}$$

例 2 求复数 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ $(z\neq 1)$ 的实部和虚部.

解

$$w=\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+z)(1-\bar{z})}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}$$
$$=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}+\mathrm{i}\,\frac{2\mathrm{Im}z}{|1-z|^2}$$

所以

$$\mathrm{Re}w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2},\quad \mathrm{Im}w=\frac{2\mathrm{Im}z}{|1-z|^2}$$

二、复数的三角表示和指数表示

1. 复平面

一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 本质上由一对有序实数唯一确定，于是能够确定平面上全部的点和全体复数间一一对应的关系. 如果把 x 和 y 当作平面上的点的坐标，复数 z 就与平面上的点一一对应起来，这个表示复数的平面叫做复平面或 z 平面，x 轴称为实轴，y 轴称为虚轴（见图 1－1).

在复平面上，从原点到点 $z=x+\mathrm{i}y$ 所引的向量 $\overrightarrow{OP}$ 与复数 z 也构成一一对应的关系，且复数的相加、减与向量相加、减的法则是一致的，即满足平行四边形法则（见图 1－2).

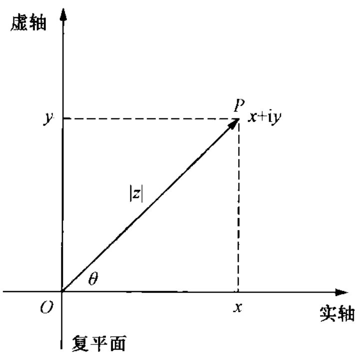


图 1－1

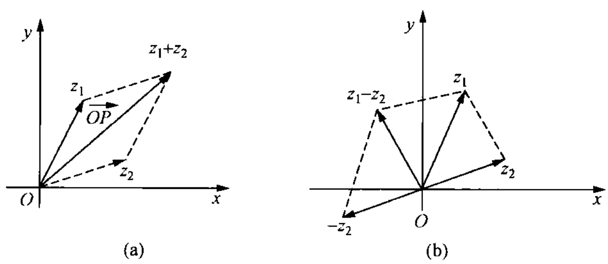


图 1－2

这样，构成了复数、点、向量之间的一一对应关系.

2. 复数的模与辐角

向量$\overrightarrow{OP}$的长度称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的模或绝对值，即

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$$

易知

(1) $|x|\leqslant|z|$，$|y|\leqslant|z|$，$|z|\leqslant|x|+|y|$

(2) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

(3) 点z_1与点z_2的距离为

$$\mathrm{d}(z_1,z_2)=|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

实轴正向到非零复数$z=x+\mathrm{i}y$所对应的向量$\overrightarrow{OP}$间的夹角θ满足

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

称θ为复数z的辐角，记为$\theta=\mathrm{Arg}z$. 任一非零复数有无穷多个辐角，以$\arg z$表其中的一个特定值，称z的主辐角（或辐角主值），且规定$-\pi<\arg z\leqslant\pi$. 所以有$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi$，$k$为任意整数. 由主辐角的定义有

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x} & x>0\\ \dfrac{\pi}{2} & x=0,y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi & x<0,y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi & x<0,y<0\\ -\dfrac{\pi}{2} & x=0,y<0\end{cases}$$

$$\theta=\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

需要注意的是，复数“零”的辐角是任意的值.

例 3 求$\arg(2-2\mathrm{i})$及$\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})$.

解 $\arg(2-2\mathrm{i})=\arctan\dfrac{-2}{2}=-\dfrac{\pi}{4}$

$\mathrm{Arg}(2-2\mathrm{i})=\arg(2-2\mathrm{i})+2k\pi=-\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$，$k$为任意整数.

3. 复数的三角表示和指数表示

设z为非零复数，r是z的模，θ为z的任意一个辐角. 则

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$$

上式右端称为复数的三角表示式.

利用欧拉公式$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，复数$z$又可表示为

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

上式右端称为复数的指数表示式.

例 4 将下列复数化成三角表示式和指数表示式.

(1) $1+\mathrm{i}$； (2) $1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi$ $(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$.

解 (1) $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

(2) $$1-\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi=2\sin^2\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\cos\frac{\varphi}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\pi-\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi-\varphi}{2}\right)$$
$$=2\sin\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi-\varphi}{2}}\quad(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$$

利用复数的指数形式作乘除法比较简单，如

$$z_1z_2=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}\cdot r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}=r_1r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}$$
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}}{r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}}=\frac{r_1}{r_2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1-\theta_2)}$$

所以有

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0)$$
$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$$
$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2$$

即：两个复数乘积的模等于它们模的乘积，辐角等于它们的辐角之和；两复数的商的模等于它们模的商，辐角等于被除数与除数的辐角之差.

例 5 用三角表示式和指数表示式计算下列复数.

(1) $(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})$； (2) $\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}$.

解 (1) $1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}$, $-\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\mathrm{e}^{-\frac{5\pi}{6}\mathrm{i}}$

所以 $$(1+\sqrt{3}\mathrm{i})(-\sqrt{3}-\mathrm{i})=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=4\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}=-4\mathrm{i}$$

(2) $$2+\mathrm{i}=\sqrt{5}\left(\cos\arctan\frac{1}{2}+\mathrm{i}\sin\arctan\frac{1}{2}\right)=\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan\frac{1}{2}}$$
$$1-2\mathrm{i}=\sqrt{5}[\cos\arctan(-2)+\mathrm{i}\sin\arctan(-2)]=\sqrt{5}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arctan(-2)}$$

所以 $$\frac{2+\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\left[\cos\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)\right]$$
$$=\mathrm{e}^{\left(\arctan\frac{1}{2}+\arctan 2\right)\mathrm{i}}$$

4. 复数的乘幂与方根

对于非零复数 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，非零复数 z 的整数次幂为

$$z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$$

当 $r=1$ 时，则得棣摩弗公式 $(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$

非零复数 z 的整数次根式 $\sqrt[n]{z}$ 为

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

注：(1) 当 $k=0$，1，2，3，…，$n-1$ 时，得 n 个相异的根；当 $k=n$，$n+1$，…时，这些根又重复出现.

(2) 在几何上，$\sqrt[n]{z}$的 n 个值是以原点为中心、$r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点.

例 6 求 $(1+\mathrm{i})^8$.

解 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$，故有

$$(1+\mathrm{i})^8=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^8=(\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{\mathrm{i}8\frac{\pi}{4}}=16\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi}=16$$

例 7 设 $z=1+\mathrm{i}$，求$\sqrt[4]{z}$.

解 因 $z=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$，故 $|z|=\sqrt{2}$，$\arg z=\frac{\pi}{4}$. 于是 z 的四个四次方根分别为

$$w_0=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{16}}，w_1=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{16}}，w_2=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{17\pi}{16}}，w_3=\sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{25\pi}{16}}.$$

例 8 求方程 $z^3+8=0$ 的所有根.

解 $$z=\sqrt[3]{-8}=2(-\mathrm{i})^{\frac{1}{3}}=2\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)\quad(k=0,1,2),$$

即三个根分别为 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$，-2，$1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

第二节 平面点集的概念

一、区域

1. 邻域

设 $\delta>0$，点 z_0 的 δ 邻域是指满足 $|z-z_0|<\delta$ 的点 z 所组成的集合. 即以 z_0 为中心，δ 为半径的圆的内部.

2. 区域

设有非空点集 G，如果满足

(1) 开集性：在 G 中的每一点 z，都必有以 z 的一个邻域含于 G 内（圆内的每点都是 G 内的点）；

(2) 连通性：G 内任意两点都可以用一条由 G 内的点所构成的折线连接.

则称 G 为区域.

3. 边界点、边界、闭区域

若点 P 不属于区域 G，但在 P 的任意邻域内总包含有 G 中的点，则点 P 叫做区域 G 的边界点. G 的所有边界点的集合叫做 G 的边界（图 1-3）. 区域 G 与它的边界一起构成闭区域或闭域，用$\overline{G}$表示.

4. 单连通域与复连通域

如果在区域 G 内任作一条简单闭曲线，而曲线的内部每一点都属于 G，则称 G 为单连通区域. 如果一个区域不是单连通区域，则称为复连通区域（见图 1-4）.

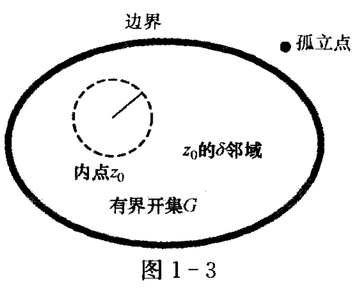


图 1-3

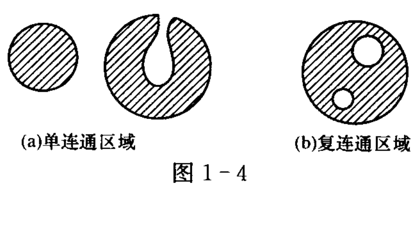


图 1-4

单连通区域的重要特征是：区域 G 内任意一条简单闭曲线，在 G 内可以经过连续的变形而缩成一点，而复连通区域不具有这个特征.

例 1 集合 $\{z \mid 2<\mathrm{Re}z<3\}$ 为一个垂直带形，它是一个单连通无界区域，其边界为直线 $\mathrm{Re}z=2$ 及 $\mathrm{Re}z=3$.

例 2 集合 $\{z \mid 2<\arg(z-\mathrm{i})<3\}$ 为一角形，它是一个单连通无界区域，其边界为半射线 $\arg(z-\mathrm{i})=2$ 及 $\arg(z-\mathrm{i})=3$.

例 3 集合 $\{z \mid 2<|z-\mathrm{i}|<3\}$ 为一个圆环，它是一个复连通有界区域，其边界为圆 $|z-\mathrm{i}|=2$ 及 $|z-\mathrm{i}|=3$.

二、简单曲线或约当曲线

1. 连续曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实变函数，则方程组 $x=x(t),y=y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 代表一条平面曲线，称为连续曲线. 如果用 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 或 $z=z(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 来表示，这就是平面曲线的复数表示式.

例 4 写出复平面上以坐标原点为圆心，以 r 为半径的圆的方程.

解 $x=r\cos t,y=r\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 或 $z(t)=r\cos t+\mathrm{i}r\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$

例 5 求复平面上过 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 两点的直线方程.

解 参数方程为 $\begin{cases}x=x_1+t\ (x_2-x_1)\\ y=y_1+t\ (y_2-y_1)\end{cases}\quad(-\infty<t<+\infty)$

由参数式得复数形式参数方程为 $z=z_1+t(z_2-z_1)(-\infty<t<+\infty)$

特别地，过 z_1 与 z_2 的直线段的参数方程为 $z(t)=z_1+t(z_2-z_1)\ (0\leqslant t\leqslant 1)$.

例 6 求下列方程所表示的曲线.

(1) $|z+\mathrm{i}|=2$ (2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$ (3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$

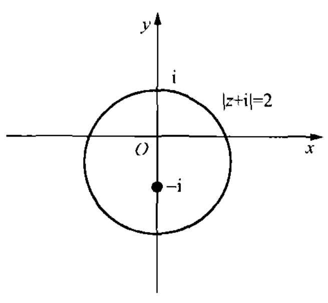


图 1-5

解 (1) $|z+\mathrm{i}|=2$ 表示与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹，即圆心为 $-\mathrm{i}$，半径为 2 的圆（见图 1-5）化为直角坐标方程：$\sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$. 化简得：$x^2+(y+1)^2=4$.

(2) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$ 表示到 $2\mathrm{i}$ 与 -2 距离相等点的轨迹，即表示连接 $2\mathrm{i}$ 和 -2 的线段的垂直平分线. 化为直角坐标方程为：$y=-x$.

(3) $\mathrm{Im}(\mathrm{i}+\bar{z})=4$. 设 $z=x+\mathrm{i}y$，那么 $\mathrm{i}+\bar{z}=x+(1-y)\mathrm{i}$ 代入得：$1-y=4$，即 $y=-3$.

2. 重点

若对 $t_1\neq t_2$，t_1、t_2 不同时是 $[\alpha,\beta]$ 的端点，有 $z(t_1)=z(t_2)$，则 $z(t_1)$ 称为曲线 c 的重点.

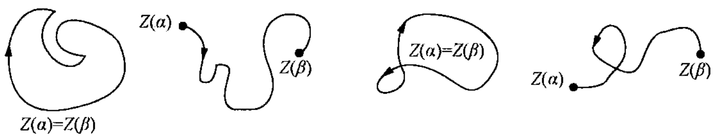
3. 简单曲线（或约当曲线）

没有重点的连续曲线称为简单曲线或约当曲线.

4. 简单闭曲线

如果简单曲线 c 的起点与终点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称曲线 c 为简单闭曲线或约当闭曲线［见图 1-6 (a)］.

因此，连续曲线有以下四种情况（见图 1－6）.



(a)简单、闭　(b)简单、不闭　(c)不简单、闭　(d)不简单、不闭

图 1－6

约当定理 任一简单闭曲线将复平面分成两个区域，它们都以该曲线为边界，其中一部分是有界区域，成为该简单闭曲线的内部，另一部分为无界区域，称为简单闭曲线的外部.

5. 光滑曲线

设函数 $x(t),y(t)$ 满足

(1) $x'(t),y'(t)$ 在区间 $[a, b]$ 内连续；

(2) 当 $t\in[a,b]$ 时，$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$.

则称曲线 $z=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ 为光滑曲线. 由若干段光滑曲线所组成的曲线称为分段光滑曲线.

例 7 $z=t^2+\mathrm{i}t^2,(-1\leqslant t\leqslant 1)$ 表示怎样的曲线?

解 它相当于 $x=t^2$，$y=t^2$，可得：$y=\pm x$.

容易验证：当 $t=0$ 时，有 $x'(0)=y'(0)=0$，曲线在 $t=0$ 处不光滑.

因此该曲线是分段光滑曲线.

第三节 复 变 函 数

在客观现象中，有很多物理量（如速度、加速度、电场强度、磁场强度等）可以用复数去刻画，这样在研究过程中会感到十分方便. 在大量的实际问题中，人们经常接触到的变量之间的关系可以用复变函数来描述，研究它很有价值.

一、复变函数的概念

1. 复变函数的定义

设 D 是复平面上一点集，如果对 D 中任意一点 z，通过一个确定的法则 f 有一个或若干个复数 w 与之对应，则称在 D 上定义了一个复变函数，记为 $w=f(z)$. 如果对每个 z，有唯一的 w 与之对应，则称 $w=f(z)$ 为单值函数，否则就称为多值函数. D 为定义域，w 的集合称为值域.

例如

$w=z^2+1$，$w=|z|$，$w=\bar{z}$，$w=\dfrac{z+1}{z-1}$，$(z\neq 1)$ 均为单值函数；

$w=\sqrt[n]{z}$，$(z\neq 0$，$n\geqslant 2$，n 为整数$)$ 及 $w=\arg z$，$(z\neq 0)$ 均为 z 的多值函数.

由于给定复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 就相当于给定两个实数 x、y，而复数 $w=u+\mathrm{i}v$ 同样对应两个实数 u、v，且 u、v 是 x、y 的函数.

把复变函数 $w=f(z)$ 的实部和虚部分别记为 $u(x,y),v(x,y)$，复变函数常记为 $f(z)=$

$u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$．这就是说，复变函数可以归结为一对二元实函数．因此，实变函数论的许多定义、公式、定理都可以直接移植到复变函数论中．

例 1 设 $w=z+z^2$，z 为任意复数，求 $u(x,y),v(x,y)$．

解 令 $z=x+\mathrm{i}y$，则有

$$\begin{aligned}u+\mathrm{i}v &= (x+\mathrm{i}y)+(x+\mathrm{i}y)^2\\ &= (x^2-y^2+x)+\mathrm{i}(2xy+y)\end{aligned}$$

于是有

$$u(x,y)=x^2-y^2+x, v(x,y)=2xy+y$$

2. 复变函数的几何表示

要描述 $w=f(z)$ 的图形，可取两张复平面，分别称为 z 平面与 w 平面，而把复变函数理解为两个复平面上的点集间的映射，如图 1-7 所示．具体地说，复变函数 $w=f(z)$ 给出了从 z 平面上的点集 D 到 w 平面上的点集 F 间的一个对应关系，与点 $z\in D$ 对应的点 w 称为 z 点的象点，而 z 点就称为 w 的原像．

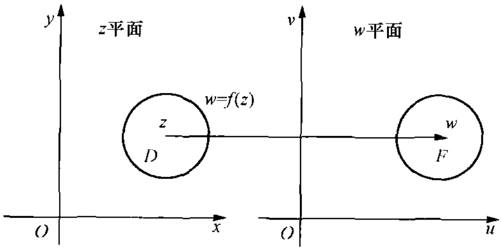


图 1-7

例如，$w=\bar{z}$ 构成的映射就把 z 平面上的点 $a+\mathrm{i}b$ 映射成 w 平面上的点 $a-\mathrm{i}b$．如把两个平面重合在一起，就是关于实轴对称的映射．

例 2 函数 $w=z^2$ 把 z 平面上的下列曲线分别变成 w 平面上的何种曲线？

(1) 以原点为圆心，2 为半径，在第一象限里的圆弧；

(2) 倾角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 的直线；

(3) 双曲线 $x^2-y^2=4$．

解 设 $z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$\omega=u+\mathrm{i}v=R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，则

$$R=r^2,\quad \varphi=2\theta$$

因此

(1) 在 w 平面上对应的图形为：以原点为圆心，4 为半径，上半平面的半圆周．

(2) 在 w 平面上对应的图形为：射线 $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$．

(3) 因 $\omega=z^2=x^2-y^2+2xy\mathrm{i}$，故 $u=x^2-y^2$，在 w 平面上对应的图形为：直线 $\mathrm{Re}\omega=4$．

例 3 函数 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 z 平面上曲线 $x^2+y^2=4$ 映成 w 平面上怎样的曲线？

解 w 平面上怎样的曲线 $\xleftarrow{w=\frac{1}{z}}$ u，v 满足怎样的关系．

$$w=\frac{1}{z}=\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}\Rightarrow u=\frac{x}{x^2+y^2}, v=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

由 $x^2+y^2=4$ 得

$$u=\frac{x}{4},\ v=\frac{-y}{4}$$

消去 x，y 得

$$u^2+v^2=\frac{1}{4}$$

表示 w 平面上的椭圆.

3. 反函数（逆映射）

设函数 $w=f(z)$ 定义域为 z 平面上的集合 G，值域为 w 平面上的集合 G^*，那么 G^* 中每一点 w 将对应 G 中的点 z，按函数定义，在 G^* 上确定一个函数 $z=\varphi(w)$，称为 $w=f(z)$ 的反函数或逆映射，记 $w=f^{-1}(z)$.

二、复变函数的极限

1. 复变函数的极限

设函数 $w=f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\rho$ 内有定义，A 是一个复常数. 如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，可以找到一个与 ε 有关的正数 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，使得对满足 $0<|z-z_0|<\delta(0<\delta\leqslant\rho)$ 的一切 z，都有

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

则称 A 为函数 $f(z)$ 当 z 趋于 z_0 时的极限，记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A \text{ 或 } f(z)\to A(\text{当 } z\to z_0)$$

注：(1) 对极限概念的几何说明如下：

不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的是 z 平面上的一个去心邻域，即除去了中心 z_0 的一个 δ 邻域.

$f(z)$ 在点 z_0 以 A 为极限的意思是：先在 w 平面上给定一个以 A 为中心，半径为 ε 的圆，而后能找到 z_0 的一个去心 δ 邻域，使得 D 中含于此去心邻域内的点的像在上述 ε 圆内(见图 1-8).

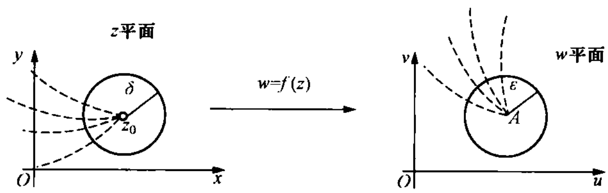


图 1-8

先后顺序关系：ε 圆是先给的，去心的 δ_ 邻域则是后找的，即当变点 z 进入 z_0 的去心邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，对应的 w 就进入 A 的 ε 邻域 $|f(z)-A|<\varepsilon$.

(2) 因为自变量 z 是平面上的点，所以 z 趋向 z_0 是按任意的方式进行的，路径是任意的. 具体地说，即使当 z 沿任何射线方向趋向于 z_0 时，$f(z)$ 都趋向于数 A，仍不能说 $f(z)$ 在点 z_0 以 A 为极限.

例 4 问函数 $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{z}$ 在 $z=0$ 有无极限?

解 设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则 $f(z)=\dfrac{r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)}{r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}=\cos2\theta-\mathrm{i}\sin2\theta.$

当 θ 等于 0 时，$\lim\limits_{z\to0}f(z)=\cos0-\mathrm{i}\sin0=1.$

当 θ 等于 $\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\lim\limits_{z\to0}f(z)=\cos\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2}=-\mathrm{i}.$

故 $f(z)$ 在原点无极限.

求复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 的极限问题可转化为求两个二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 的极限问题.

定理 1 设函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$，$A=u_0+\mathrm{i}v_0$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A\Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

证 必要性：$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得 $0<|z-z_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|=|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|=\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}<\varepsilon$，而

$$|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|\geqslant|u-u_0|$$

$$|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|\geqslant|v-v_0|\Rightarrow\forall\varepsilon>0$$

当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|u-u_0|<\varepsilon$ 与 $|v-v_0|<\varepsilon$，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0,\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0$$

充分性：已知 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)=u_0$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)=v_0,\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|u-u_0|<\frac{\varepsilon}{2}$，$|v-v_0|<\frac{\varepsilon}{2}$，而

$$\begin{aligned}|f(z)-A|&=|(u-u_0)+\mathrm{i}(v-v_0)|\\&\leqslant|u-u_0|+|v-v_0|\end{aligned}$$

所以当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时，有 $|f(z)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$$

2. 复变函数极限的运算

关于极限的和、差、积、商等性质可以不加改变地推广到复变函数中.

定理 2 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A,\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$，则

(1) $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\cdot g(z)=A\cdot B$;

(3) $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{A}{B},(B\neq 0)$.

三、复变函数的连续性

若 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$，则称 $f(z)$ 在 z_0 处连续；如果 $f(z)$ 在 D 中每一点连续，则称 $f(z)$ 在 D 上连续.

定理 3 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

上述定理告诉我们：判断复变函数是否连续，只需看其实部、虚部是否连续. 在数学分析中，闭区间上的连续函数有三个重要性质：有界性、达到最值及一致连续性，对复变函数也有类似性质.