技术数学

学习与研究

◎史成堂 主编

JISHU SHUXUE

XUEXI YU YANJIU

JISHU SHUXUE

XUEXI YU YANJIU

JISHU SHUXUE

XUEXI YU YANJIU

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

技术数学学习与研究/史成堂主编. 一开封:河南大学出版社,2003.6(2006.12 重印)
ISBN 7-81091-012-4

Ⅰ.技… Ⅱ.史… Ⅲ.工程数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 016108 号

责任编辑	程 庆	**责任校对**	文 严
责任印制	王 慧	**封面设计**	马 龙

出 版	河南大学出版社		
	地址:河南省开封市明伦街 85 号	**邮编**:475001	
	电话:0378—2825001(营销部)	**网址**:www. hupress. com	
经 销	河南省新华书店		
排 版	河南大学出版社印务公司		
印 刷	河南省瑞光印务股份有限公司		
版 次	2005 年 8 月第 2 版	**印 次**	2006 年 12 月第 4 次印刷
开 本	850mm×1168mm 1/32	**印 张**	9.75
字 数	245 千字	**印 数**	8243—12110 册
定 价	14.00 元		

(本书如有印装质量问题请与河南大学出版社营销部联系调换)

前　　言

本书是与《技术数学》(河南大学出版社出版)配套的学习指导书。

本书按《技术数学》的章节次序编写,每节均包含学习要求、重点、难点和学习指导四部分(我们仅作出前十章的学习指导,而对实验篇、建模篇,由于考虑到很多因素,没有编入)。

技术数学是高等工程教育的一门重要基础课和工具课。读者往往对这门课中的基本概念和重要理论理解不透或产生错误,对解题方法和技巧的掌握感到困难。教材不可能对学习中可能遇到的问题一一详述。而由于学生的实际水平各不相同,不同层次的学生有不同的要求,为了帮助学生克服学习中的困难,也为了照顾到很多学生专升本以及今后工作的需要,我们编写了这本学习与研究。它既是与教学同步的学习参考书,又是复习阶段的指导书,也是专升本的辅导书。它有助于学生对数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法更全面地理解和掌握,有利于培养学生分析问题和解决问题的能力。其中标有 * 的内容对在校生不做要求,仅供统考以及参加专升本时使用(但这些内容非常有用,仅仅是因为教材的篇幅所限,而没有写入)。

每章后的阶段测验作业,要求学生独立完成,以检查自己对基本知识和重点内容的掌握情况。

为了不同层次的学生都能使用,我们在后面加入了几个附录。附录一和附录二为日校专科生考试模拟试卷,附录三和附录四为函授专科生考试模拟试卷,附录五为四年来河南省专升本考试试卷、模拟试卷。最后给出了阶段测验作业和各附录的参考答案。

我们希望本书能为高等专科学生学好技术数学课程提供有效的帮助。

本书由史成堂主编，王家德教授主审。具体执笔分工为：崔英健编写第一、二章，李玉凯编写第三、四章，史成堂编写第五～十章以及附录。全书由史成堂修改定稿。

本书在出版过程中得到责任编辑程庆同志的大力协助，对他付出的艰辛劳动，我们由衷地表示感谢。

由于编者的水平有限，时间仓促，书中的缺点和错误在所难免，恳请同行和读者提出宝贵意见和建议，以便今后修改。

编　者

2005 年 4 月

目　　录

第一章　函数、极限与连续

§1.1　函　　数

一、学习要求

1. 理解函数的概念，掌握求初等函数定义域的方法，了解分段函数；

2. 理解复合函数的概念，会分析复合函数的复合过程；

3. 知道函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性；

4. 了解反函数的概念；

5. 熟悉基本初等函数的性质及图形；

6. 会建立简单实际问题中的函数关系.

二、重点

1. 函数的概念；

2. 函数的几种特性；

3. 基本初等函数及其图形.

三、难点

1. 函数的概念；

2. 复合函数的分解与复合过程.

四、学习指导

1. 高等数学的主要内容是用分析的方法研究初等函数，本节对所学过的函数知识进行了概括和提高. 只有理解、掌握所学过的知识，才能为学习新知识奠定牢固的基础.

2. 要理解函数的定义. 函数是一个变量对另一个(或多个)变

量的依赖关系的抽象模型.函数概念是数学中重要概念之一.目前函数的定义有两种.第一种为“依赖关系”定义,即:“若对于变量 x 在允许值范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则有惟一的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$.”第二种为“集合对应”定义,即:“设 A,B 为两个集合,如果按照某种对应关系 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有惟一的元素和它对应,那么,这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,又称为函数.”两种定义各有优点,我们的教材采用了目前高等理工院校的高等数学教材中较多采用的“依赖关系”定义.

函数定义的主要特征为:x 的允许范围,即函数的定义域;对应规则,即函数的依赖关系.可以说,函数概念的两个基本要素就是定义域和对应规则.只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时,才能认为它们是同一个函数.

例如:$y_1=x$,$y_2=\sqrt{x^2}$,它们的定义域相同,但对应规则不同,所以 $y_1\neq y_2$.

又如,$y_1=2\ln x$,$y_2=\ln x^2$,虽然它们的对应规则表面上相同,但其定义域不同,所以 $y_1\neq y_2$.

由于函数的定义中并没有限制“对应规则”与 y 的取值特点,因此可能出现:

(1) 当自变量 x 的值变动时,变量 y 的取值并不一定随 x 的变化而变化,y 可能总取一个值.

如 $y=2$ 表示不论 x 取什么值,所对应的 y 的值总是 2,因此它符合函数的定义.可以说 $y=2$ 是函数,通常 $y=c$(c 为常数)称为常量函数.

(2) 函数对应规则的形式没有限制,是多种多样的:

① 如果函数对应规则的形式是解析表达式 $y=f(x)$,则可称函数为显式表示.

② 如果函数对应规则的形式是方程 $F(x,y)=0$,则可称 y 为

x 的隐函数.

③ 如果函数对应规则是由几个不同解析表达式分段表示的,如:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x+1, & 0\leqslant x<1\\ x^2, & x\geqslant 1\end{cases}$$

则称 $f(x)$ 为分段函数. 注意:这里不可以说 $f(x)$ 是三个函数,应该说 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,它是由三个解析表达式来分段表达的.

④ 如果对应规则是由表格或图形表示出来的,那么常称这种函数表示法为表格表示法或图形表示法.

⑤ 如果 x 与 y 通过第三个变量而联系起来,如:

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases}$$

则称这种函数为参数方程表示的函数(t 为参数).

3. 在研究函数的单调性、有界性时,一定要注意自变量的变化范围.

例如:$y=x^2$ 在 $x<0$ 时为单调减少函数,在 $x>0$ 时为单调增加函数.

同样,如果 $y=x^2$,可知其在 $(0,1)$ 内为有界函数,而在 $(-\infty,+\infty)$ 内为无界函数.

如果说函数 $f(x)$ 为单调函数或有界函数,而没有指明其范围,通常要理解为是在整个定义域内而言的.

4. 复合函数的定义可以解释为:若对于 x 在某一范围内的每一个确定的值,u 按某种规则有一个确定值与之相对应,$u=g(x)$;而对此 u 的值,y 按某种规则有确定值与之相对应,$y=f(u)$,这样就确定了 y 与 x 之间的函数关系 $y=f[g(x)]$,并且称 y 是由 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的 x 的函数.

考察 $y=\ln u$，其定义域为$(0,+\infty)$，而 $u=x-\sqrt{1+x^2}$的值为$(-\infty,0)$中的数，即 u 的函数值为负值，u 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，对于任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$y=\ln u=\ln(x-\sqrt{1+x^2})$都无意义. 可知，$y=\ln u$ 与 $u=x-\sqrt{1+x^2}$不能复合为 $y=y(x)$. 只有当 $y=f(u)$的定义域与 $u=g(x)$的值域有公共部分时，才能复合成复合函数 $y=f[g(x)]$.

§1.2 极　　限

一、学习要求

1. 理解数列极限与函数极限的定义；

2. 理解左、右极限的概念，掌握函数极限存在的充要条件；

3. 会求分段函数的极限；

4. 理解无穷大量与无穷小量的概念及其相互关系，知道无穷小量的性质，了解具有极限的函数与无穷小量的关系；

5. 能表述极限的四则运算法则，并能用这些法则求函数极限；

6. 熟记两个重要极限，并能用它们求一些函数的极限；

7. 理解两个无穷小的阶的比较的意义，掌握等价无穷小和高阶无穷小的记号.

二、重点

1. 极限的概念和极限的运算法则；

2. 两个重要极限及其应用；

3. 无穷小量与无穷大量的概念；

4. 无穷小量的性质.

三、难点

1. 理解极限的概念；

2. 求函数的极限.

四、学习指导

1. 极限方法是高等数学中解决问题的基本方法，极限描述了函数在给定的变化过程中的变化趋势，所以要理解极限的概念.

2. 本节从数列的极限出发，引入了函数的极限，要从中领会极限的实质与其定义的进展情况.

3. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的极限存在与否，与 $f(x)$ 在点 x_0 是否有定义无关，因为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是研究 x 无限趋近于 x_0 而不等于 x_0 时 $f(x)$ 的变化趋势. 例如：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$，而 $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 并无定义.

4. 函数极限存在的充要条件是它的左、右极限都存在且相等，而左、右极限是考察自变量 x 在某一确定方向趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 的变化趋势的，因而，即使 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 都存在，也不一定能保证两者相等. 例如：$f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{x^2}}-\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x^2}}$，当 $x\to 0$ 时，左、右极限都存在，但不相等(仔细计算即知). 故以下情况要考察函数在点 x_0 的左、右极限.

(1) 当研究函数 $f(x)$ 在自变量趋于区间 $[a,b]$ 端点时的极限时只考虑其某侧极限.

(2) 当分段函数 $f(x)$ 在分界点 x_0 时，左、右两侧解析式不同，必须考察它在点 x_0 的左、右极限. 例如.

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$$

因为 $x=1$ 是 $f(x)$ 的分界点，所以讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 时必须考察它在点 $x=1$ 的左、右极限. 因为

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1,\quad \lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的左、右极限都存在，但不相等，因此，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$不存在.

(3) 有些函数虽然不是分段函数，但在某些点 x_0 的左、右两侧的变化趋势不同，求这些点上的极限，就必须考虑其左、右极限.例如 $f(x)=\text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$，考察点 $x_0=0$. 因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\text{arc tg}\,\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\text{arc tg}\,\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\text{arc tg}\,\dfrac{1}{x}$不存在.

5. 极限的四则运算法则是求极限的基本方法，法则 I 和法则 III 可以分别推广到有限个有极限的函数的代数和与积的情形.

6. 使用法则求极限时，一定要注意条件.

例如：求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$. 正确的方法应为：

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$|\sin x|\leqslant 1$，$\sin x$ 为有界函数，根据“无穷小量与有界函数之积仍为无穷小量”这一性质即知，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

而若写为：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x=0\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x=0,$$

即为错误(因为$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在)，亦即当把极限符号分配其中时，必须每一个函数都有极限才行.

7. 无穷小量在高等数学中占有极为重要的地位，必须注意.单从“无穷小量”字面上看似乎是讨论量的大小，有些初学者常把它和很小很小的数等同，这是错误的. 无穷小量仅是表达在某个变

化过程中，$|f(x)|$无限地变小，即若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f(x)$为在 $x\to x_0$ 时的无穷小量. 例如：10^{-10}是一个很小的数，但不能说它为无穷小量. 常数中只有零为无穷小. 同时，说无穷小，一定不能离开变化趋势. 例如$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，则说$\frac{1}{x}$为当 $x\to\infty$时的无穷小量，而不能简单地说$\frac{1}{x}$是无穷小量.

8. 两个重要极限公式的结构形式的特点必须搞清楚，即：

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1,\quad \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},\quad \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}.$$

其中“□”可以是满足□→0 或□→∞的任何函数. 例如：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1,$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=\mathrm{e}.$$

§1.3 函数的连续性

一、学习要求

1. 理解函数在一点连续的定义，掌握函数在开区间内、闭区间上连续的概念；

2. 了解间断点的定义与分类，会判断间断点的类型；

3. 知道初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），会用介值定理证明方程根的存在性.

二、重点

1. 理解函数在一点连续的概念；

2. 理解初等函数的连续性；

3. 了解间断点的分类；

4. 会求函数在连续点 x_0 处的极限.

三、难点

1. 理解函数在一点连续的概念；

2. 求间断点及对其进行分类.

四、学习指导

自然界中遇到的许多变量都是连续的，它表现在数学上就是函数的连续性. 函数的连续性是高等数学的一个主要研究对象.

1. 与极限的概念相仿，连续性也是描述在给定过程中函数的变化趋势.

函数 $f(x)$在点 x_0 处连续性的两个定义是等价的，它们的前提条件都是设 $f(x)$在点 x_0 及其某个邻域内有定义. 其中：

(1) 若$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称 $f(x)$在点 x_0 处连续. 这意味着当自变量的增量 Δx 为无穷小时，函数的增量 Δy 也为无穷小. 常称这种定义为连续性的无穷小形式定义.

(2) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$在点 x_0 连续. 这意味着当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$以 $f(x_0)$为极限. 常称这种定义为连续性的极限形式定义.

两种定义形式不同，但本质相同，其共同特点构成了连续性的三个要素：

① 函数 $f(x)$在点 x_0 处有定义；

② 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$存在极限；

③ 极限值等于在该点处的函数值 $f(x_0)$.

2. 基本初等函数在其定义域内为连续函数，初等函数在其定义区间内为连续函数.

应该注意，基本初等函数的定义域都是区间或区间之并，而初等函数的定义域可能是一些孤立点集，如 $y=\sqrt{\sin x-1}$的定义域 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$为孤立点集，因此 $y=\sqrt{\sin x-1}$

不连续，但它是初等函数.

3. 根据连续的定义，计算函数在连续点 x_0 处的极限的简便方法是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，即将计算极限转化为计算函数在 x_0 处的函数值，也就是说，符号“$\lim\limits_{x\to x_0}$”和“f”可以交换顺序，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(\lim_{x\to x_0} x)=f(x_0).$$

4. 函数的间断点是根据函数 $f(x)$ 在间断点处是否同时存在左、右极限来分类的.

第一类间断点是左、右极限都存在的间断点；

第二类间断点是左、右极限至少有一个不存在的间断点，它又分为无穷间断点和振荡间断点两种.

若 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，不妨设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. 对于 $f(x)$ 而言，可能有两种情形：

(1) 在点 x_0 处，$f(x)$ 没有定义；

(2) 虽然 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，但是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$.

不论哪种情形，只须令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ A, & x=x_0 \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 x_0 处就连续.

正是由于上述的原因，如果 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点. 例如：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 0. & x=1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ 存在，但不等于 $f(1)=0$，此时，只需令

$$F(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1 \\ 2, & x=1 \end{cases}$$

则 $F(x)$在 $x=1$ 处就已连续.

§1.4 多元函数的极限与连续

一、学习要求

1. 理解多元函数的概念，会求二元函数的定义域，并会作出定义域的图形；

2. 知道二元函数的几何意义；

3. 理解二元函数的极限与连续概念，了解平面区域的概念；

4. 会求二元函数的极限；

5. 会判断二元函数的连续性.

二、重点

1. 多元函数的概念；

2. 二元函数的极限与连续.

三、难点

1. 求二元函数的极限；

2. 判断二元函数的连续性.

四、学习指导

1. 学习多元函数应与一元函数进行对照，找出异同点，加深理解.

2. 多元函数是在自然现象和实际问题中经常遇到的. 例如：

(1) 圆柱体的体积 V 和它的底半径 r，高 h 之间具有关系 $V=\pi r^2 h$，这里，当 r,h 在集合 $\{(r,h)\mid r>0,h>0\}$ 内取定一对值 (r,h) 时，V 的值就随之确定.

(2) 设 R 是电阻 R_1 与 R_2 并联后的总电阻，由电学知它们之间具有关系 $R=\dfrac{R_1R_2}{R_1+R_2}$，这里，当 R_1,R_2 在集合 $\{(R_1,R_2)\mid R_1>0,R_2>0\}$ 内取定一对值 (R_1,R_2) 时，R 的对应值随之确定.

(3) 一定量的理想气体的压强 p,体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系 $p=\frac{RT}{V}$,其中 R 是常数. 这里,当 V,T 在集合 $\{(V,T)\mid V>0,T>0\}$ 内取定一对值 (V,T) 时,p 的对应值就随之确定.

3. 多元函数的定义域与一元函数类似,在一般地讨论用算式表达的多元函数 $u=f(P)$ 时,就以使这个算式有确定值 u 的自变量 P 确定的点集为这个函数的定义域. 例如:

(1) $z=\ln(x+y)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x+y>0\}$,这是一个无界开区域.

(2) $z=\arcsin(x^2+y^2)$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,这是一个有界闭区域.

4. 多元函数的图形一般来说为一张曲面. 如 $z=f(x,y)$,设其定义域为 D,对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$,对应的函数值为 $z=f(x,y)$,这样以 x 为横坐标,以 y 为纵坐标,$z=f(x,y)$ 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x,y,z)$. 当 (x,y) 取遍 D 上的一切点时,得到一个空间点集 $\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$,这个点集称为二元函数的图形. 例如:

(1) $z=ax+by+c$ 为一个平面.

(2) 由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x,y)$ 的图形是球心在原点,半径为 a 的球面,它的定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2\}$. 这是一个多值函数,可以把它分成两个单值分支:$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 及 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 一般地,遇到多值函数,就可以把它拆成几个单值函数后加以讨论.

特别注意:在二元函数中,方程 $x^2+y^2=R^2$ 的图形是一个圆柱面(我们习惯上以为是一个圆),此时可以把它看成为 $x^2+y^2+0z=R^2$,意即对 z 没有限制. 一般地,若方程中 x,y,z 三个变量缺一个,则该方程表示柱面,且母线平行于所缺变量代表的轴.

5. 在求多元函数的极限时,一定要注意不能用枚举法,这是

因为 $P\to P_0$ 表示 P 以任何方式趋向于 P_0. 若设为 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$,则实际上 $P\to P_0$ 的路径有无数条,因而不可能一条一条地去验证. 这是与一元函数的求极限方法完全不同的,因为在一元函数中,$x\to x_0$ 只有左、右两个方面(亦即只有两条路径). 这一点从教材中的例 4 可以看出. 这里的实质即为由量变引起了质变.

例 1 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$ $(x^2+y^2\neq 0)$,求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解:设 $t=x^2+y^2$,则当 $x\to 0, y\to 0$ 时,$t\to 0$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{t\to 0} t\sin\frac{1}{t}.$$

因为 $\left|\sin\dfrac{1}{t}\right|\leqslant 1$ 为有界函数,所以 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

6. 对于多元函数的连续性,我们也可用 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$ 来定义. 实质上,对于一些已知曲面,是可以知道它们的间断点的. 对于间断点,与一元函数相仿(但分类细节不尽相同),也有两种情形:第一种情形为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 存在,但不等于 $f(P_0)$;第二种情形为 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 不存在.

7*. 与一元连续函数的性质相类似,在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质:

(1) (最大值最小值定理)在有界闭域 D 上的多元连续函数,在 D 上至少取到它的最大值和最小值各一次. 这就是说,在 D 上至少有点 P_1 及 P_2,使 $f(P_1)$ 为最大值,而 $f(P_2)$ 为最小值,即对于一切 $P\in D$,有 $f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1)$.

当然,若最大值或最小值在区域边界上取到,则寻找起来比较困难,它没有一元函数那么简便.

(2) (介值定理)在有界闭区域 D 上的连续函数,如果在 D 上