普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

曹殿立 主编

线性代数

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材
理工类大学数学教学丛书
河南省精品课程配套教材

线性代数

主　编　曹殿立
副主编　马宝林　温　建
编　者　李艳华　潘全香

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是理工类大学数学教学丛书中的一本. 全书由行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换、线性方程组、矩阵的相似变换、二次型6章组成. 每章除理论教学内容及相应习题外，还设有与教学内容相应的数学软件应用、数学文化欣赏以及分层次测试题，以方便读者使用.

本书注重内容的科学性、系统性、文化性和时代性，注重教材的适用性和通用性. 在内容的编排上，注意概念实际背景的介绍，突出对基本概念的系统理解和对解题方法的把握. 本书起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰、详略适当、重点突出. 书中例题、习题的编写参考了历年研究生入学试题，题型丰富、难度适中，并且在书后附有相应的参考答案.

本书可作为高等学校非数学专业理工类线性代数课程教材，也可以作为相关专业的教材、教学参考书以及考研学习或自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 曹殿立主编. —北京 ：科学出版社，2012
(普通高等教育"十二五"规划教材·理工类大学数学教学丛书)
ISBN 978-7-03-033758-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 曹… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 038770 号

责任编辑：张中兴　昌　盛 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2012年3月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2012年3月第一次印刷　印张：17
字数：350 000
定价：29.00元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

丛书序

随着我国高等教育"大众化"阶段的到来，尤其是2004年高中施行"新课改"以来，高等教育在培养目标和教学要求等方面已呈现出多层次、多元化的新情况，不同层次高校的学生和学科对数学的需求也是多样化的. 如何保证和提高地方普通高校大学数学类课程的教学质量，以及如何进行地方普通高等院校创新型人才的培养，成为当前我国地方普通高等院校最重要的研究课题之一. 尤其是作为地方普通高等院校教学第一线的教师来说，十分需要适用于这一层次生源特点和基础水平的大学数学类教材. 河南省教学名师奖获得者、河南省精品课程的主持人郭运瑞教授，2005年以来将"大学数学分层次教学的研究与改革实践"和"高中新课改后大学数学教学改革的研究与实践"作为其主持的重要研究课题，这两项课题被列入河南省普通高等教育教学改革项目，并获得了"河南省普通高等教育省级教学改革成果奖". 在这些实践的基础上编写的本套丛书是她带领的教学团队与兄弟院校的教学团队多年奋斗在教学和教学改革第一线的研究与实践的成果.

本套丛书的特色在于，它适应大众教育时代地方普通高等院校的学生和学科的特点及要求，能更好地适应学生专业学习与发展的要求，适应学生自身条件和发展目标的个性化需求. 本套丛书为地方普通高等院校大学数学类课程分层次教学提供了很好的教材. 丛书内容加强了数学概念与实际问题的联系，将数学建模的思想和方法渗透到教材中去，重视培养学生应用数学知识以及数学软件解决实际问题的意识与能力. 同时还注意到对学习内容主线的适当延伸，这有助于开拓学生的思路和眼界，加强数学与其他学科之间的实践联系，体现了数学的应用性. 本套丛书将在大学数学类课程中渗透数学文化的理念贯穿始终，注重学生数学素质的培养. 内容编写简繁得当，叙述简洁明了，前后衔接自然，对学生把握知识之间的联系十分有益.

本套丛书的作者们借鉴了国内外同类教材之长，吸收了众多最新的教学和科研成果，将自己多年的科研成果和教学经验融入了教材中，使教材内容更加充实、更加有新意. 相信本套丛书将会在我国大学数学类课程教学改革和发展的过程中发挥积极有益的作用，满足广大读者的学习需要.

感谢丛书的作者们为我国大学数学教学改革和发展所作的努力.

顾　沛

2012年3月

于南开大学

前 言

线性代数是高等院校理工、经管等专业的一门重要基础课，也是自然科学和工程技术各领域中应用广泛的数学基础. 在科学技术特别是在计算机技术日新月异的今天，线性代数在理论和应用上的重要性更显突出. 因此各专业不但对线性代数的内容在深度和广度上提出了要求，更在如何提高学生把握知识和运用知识解决实际问题的能力方面给予了更多的关注.

本教材按照教育部高等学校非数学类专业线性代数课程基本要求和最新的全国硕士研究生入学统一考试大纲，结合作者长期的线性代数教学实践以及线性代数教材建设的经验，并在充分借鉴当前国内外同类教材的基础上编写而成. 在编写过程中，集思广益、精益求精，并在内容上着力突出以下几个特点：

1. 体系结构完整. 全书依照教育部对高等学校非数学类专业线性代数课程教学内容的基本要求和全国硕士研究生入学统一考试大纲组织内容，涵盖了全国硕士研究生入学统一考试数学大纲中有关线性代数的全部内容，且在核心部分有所展开与加强，力求使学生全面地掌握线性代数的知识体系，为进一步深造打好基础.

2. 适用性、通用性强. 在内容的编排上，选择符合学生认知规律且已获得众多教师普遍认同的从行列式、矩阵、消元法解线性方程组、向量组的线性相关性、线性方程组解的结构、矩阵的相似变换到二次型的体系结构. 该体系起点低、坡度缓、难点分散、脉络清晰，便于教师教学和学生学习. 虽然部分背景的引入是以工科为基础的，但整体内容对其他学科也是适用的.

3. 强调应用背景的引入. 对于重要的概念和理论，加强实际背景的介绍. 利用对实际问题的讨论，帮助学生理解抽象的代数概念，提高学生运用知识解决实际问题的能力.

4. 突出基本概念的教学. 针对线性代数概念多，概念之间关系复杂的特点，首先在正文讲清概念的基础上，设置较多的实例来进一步强化；其次在节后习题中设置了较多的判断题，更在每一章的分层次测试题中安排了大量的填空题和选择题.

5. 加强解题训练. 对于重要的计算和证明问题，一方面从问题的不同角度设置不同的例题，另一方面给出同一问题的多种解法，并给出数目较多的习题以强化练习.

6. 适应不同能力学生的学习要求. 每章末安排的分层次测试题 A 难易适中. 通过测试的学生即达到了教学要求. 对于学有余力的学生，可进一步尝试完成测试题 B，这些题目多为历年来研究生入学的全国统考试题. 对于准备参加考研的同学来

说，测试题 B 是很好的练习题.

7. 加强与数学软件的结合. 当前，能够使用数学软件进行数学计算和证明已成为大学生应该具备的能力. 本书在每一章末，针对本章内容安排了 Mathematica 数学软件的应用，以方便教师的实验数学. 虽然限于课时，很多老师没有时间去讲授这部分内容，但也能方便学生自学.

8. 重视数学文化的熏陶. 在教材的每一章中，设置了数学文化欣赏内容. 内容多与课程相结合. 不但有助于学生对知识背景的理解，而且培养了学生的数学素质，同时也是舒缓学生紧张学习的一杯香茶.

本书可作为高等学校非数学专业理工类线性代数课程教材，也可以作为经济管理类等各专业的教材、教学参考书以及考研学习或自学用书.

参加本教材编写的有河南农业大学的曹殿立、温建、李艳华，河南科技学院的马宝林、潘全香，最后由曹殿立统一定稿.

河南农业大学梁保松教授仔细审阅了全稿，并提出了许多建设性的意见和建议，在此谨表示由衷的谢意！

该教材的出版得到了科学出版社高等教育出版中心数理出版分社的关心和大力支持，在此深表感谢！

向参考文献的作者们表示感谢！

虽然我们十分努力，但由于水平有限，定有错误与不妥之处，恳请广大师生和读者批评指正.

编　者

2011 年 12 月

目 录

第1章 行 列 式

行列式是研究线性代数的重要工具，它在数学的许多分支中有着非常广泛的应用. 本章通过引进二阶、三阶行列式和 n 元排列的概念，给出 n 阶行列式的定义和性质，最后介绍用行列式求解线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1 二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，用消元法求得的解为

$$x_1=\frac{a_{22}b_1-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \qquad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为便于记忆，将方程组(1.1)中的未知量的系数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 依它们在方程组中的位置排成两行两列，引入记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称之为**二阶行列式**，用来表示数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.3}$$

构成二阶行列式的 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 称为行列式的**元素**. 它们排成两行两列，横的各排叫做**行**，纵的各排叫做**列**. 数 a_{ij} $(i,j=1,2)$ 称为行列式的第 i 行第 j 列元素.

如果把元素 a_{11} 到 a_{22} 的连线称为行列式的**主对角线**，而 a_{21} 到 a_{12} 的连线称为行列式的**次对角线**，则二阶行列式的值就等于主对角线上元素之积减去次对角线上元素之积. 这种算法称为**对角线法则**.

线性方程组(1.1)的系数构成的行列式 D 称为方程组(1.1)的**系数行列式**.

按照二阶行列式的定义，式(1.2)中 x_1,x_2 的表达式中的分子可分别记为

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=a_{22}b_1-a_{12}b_2, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

显然,$D_i(i=1,2)$即为 D 中的第 i 列换成方程组(1.1)的常数项所得到的行列式.

于是,当 $D\neq 0$ 时,线性方程组(1.1)的解可唯一地表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.4}$$

例 1.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2=10, \\ x_1-2x_2=5. \end{cases}$$

解 由于 $D=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-10\neq 0$,且

$$D_1=\begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}=-40, \qquad D_2=\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=5,$$

由式(1.4)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=4, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=-\frac{1}{2}.$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.5}$$

将未知量的系数按它们在方程组中的位置排成 3 行 3 列,引入**三阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{1.6}$$

称 D 为线性方程组(1.5)的**系数行列式**. 再将 D 中的第 1 列、第 2 列、第 3 列分别换成方程组(1.5)的常数列,分别引入三阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中,D,D_1,D_2,D_3分别定义为

$$\begin{aligned} D&=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \\ D_1&=b_1a_{22}a_{33}+b_3a_{12}a_{23}+b_2a_{13}a_{32}-b_3a_{13}a_{22}-b_2a_{12}a_{33}-b_1a_{23}a_{32}, \\ D_2&=b_2a_{11}a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+b_3a_{13}a_{21}-b_2a_{13}a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-b_3a_{11}a_{23}, \\ D_3&=b_3a_{11}a_{22}+b_2a_{12}a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-b_1a_{22}a_{31}-b_3a_{12}a_{21}-b_2a_{11}a_{32}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

则当 $D\neq 0$ 时,

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \quad x_2=\frac{D_2}{D}, \quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

正是线性方程组(1.5)的唯一解.

三阶行列式的值仍可由**对角线法则**来记忆.

以 D 为例. 由式(1.7),D 由 6 项构成,每一项均为行列式 D 的不同行不同列的 3 个元素的乘积再冠以正负号,其规律如图 1.1 所示.

图中的 3 条实线平行于主对角线,实线上 3 个元素之积冠以正号;3 条虚线平行于次对角线,虚线上 3 个元素之积冠以负号.

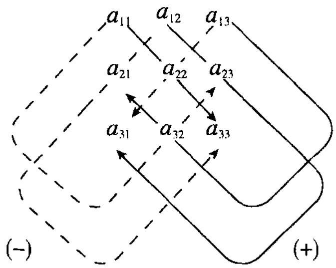

图 1.1

例 1.2　计算

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

解　$D=2\times2\times(-1)+3\times3\times1+(-1)\times1\times(-1)-(-1)\times2\times1$

$-3\times(-1)\times(-1)-2\times1\times3$

$=(-4)+9+1-(-2)-3-6=-1.$

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$.

2. 求解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1+3x_2=8, \\ x_1-2x_2=-3. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-2, \\ 2x_1+x_2-3x_3=1, \\ -x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$

3. 解方程: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=0.$

1.2　n 阶行列式

计算二、三阶行列式的对角线法,虽然简单直观,但对于高于三阶的行列式就不

再适用了.为了给出线性方程组的行列式解法,就必须研究任意阶行列式的一般算法.

观察三阶行列式 D,由式(1.7)可见:

(1)三阶行列式展开式的每一项都是其位于不同行不同列的 3 个元素之积;

(2)展开式共有 6 项,每一项的 3 个元素的行下标按自然顺序排列时,其列下标都是 1,2,3 的某个排列.1,2,3 的全排列共有 6 种,分别对应着展开式的一项;

(3)展开式的 6 个项的符号各有 3 正 3 负.带正号的 3 项,其列下标的排列分别为(123),(312),(231),它们都是自然排列 123 中的任意两个数经零次或两次(偶数次)对换得到的;而带负号的 3 项的列下标是自然排列 123 中的任意两个数经 1 次(奇数次)对换得到的.也就是说,行列式展开式的每一项的符号与排列的对换次数(奇数次或偶数次)有关.

为阐明 n 阶行列式展开项的符号规律,引入逆序数的概念.

1.2.1 排列的逆序与奇偶性

n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 按一定的次序排成的一个无重复数字的有序数组称为一个 n 级排列,记为 $i_1i_2\cdots i_n$.

显然,n 级排列共有 $n!$ 个,其中,排列 $12\cdots n$ 称为**自然排列**.

定义 1.1 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若一个较大的数排在一个较小数的前面,则这两个数构成一个逆序.一个排列中逆序的总数,称为这个排列的逆序数,记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.3 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)352461; (2)$n(n-1)\cdots 21$.

解 由逆序数的定义,任一排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数

$$\tau(i_1i_2\cdots i_n)=i_1\text{后面比 }i_1\text{小的数的个数}+i_2\text{后面比 }i_2\text{小的数的个数}+\cdots+i_{n-1}\text{后面比 }i_{n-1}\text{小的数的个数}.$$

(1)$\tau(352461)=2+3+1+1+1=8$, 352461 为偶排列;

(2)$\tau(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

而$\dfrac{n(n-1)}{2}$的奇偶性由 n 而定:

当 $n=4k$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$是偶数;

当 $n=4k+1$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=2k(4k+1)$是偶数;

当 $n=4k+2$ 时,$\dfrac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$是奇数;

当 $n=4k+3$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+3)$是奇数.

所以，当 $n=4k, n=4k+1$ 时，此排列为偶排列；当 $n=4k+2, n=4k+3$ 时，此排列为奇排列.

定义 1.2 一个排列中的某两个数 i, j 位置对调，而其余数不动，这样得到一个新排列的实施过程称为一次**对换**，用(i, j)表示. 相邻两个数的对换称为**邻换**.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 首先证明一次邻换改变排列的奇偶性.

设 n 级排列为$\cdots ij \cdots$，将相邻的两个数 i, j 对换，得到一个新的排列$\cdots ji \cdots$. 由于除 i, j 之外其余的数不动，所以，其余数之间的顺序没有变化.

若 $i>j$，则新排列的逆序数比原排列减少 1；若 $i<j$，则新排列的逆序数比原排列增加 1. 所以一次邻换改变了排列的奇偶性.

再证明一般对换的情形.

设 n 级排列为$\cdots i a_1 a_2 \cdots a_k j \cdots$，其中 i, j 之间相隔 k 个数. 要实现 i, j 的对换，得到新的排列$\cdots j a_1 a_2 \cdots a_k i \cdots$，可先将 i 与 a_1对换，再把 i 与 a_2对换，$\cdots$，这样，经过 $k+1$ 次邻换，就可以将 i 调换到 j 之后，得到排列$\cdots a_1 a_2 \cdots a_k j i \cdots$；然后再把 j 对换到 a_1之前，这需要经过 k 次邻换. 这样，共经过 $2k+1$ 次邻换，完成了 i 与 j 的对换. 所以原排列与新排列的奇偶性相反.

推论 1.1 奇排列变成自然排列的对换次数为奇数，偶排列变成自然排列的对换次数为偶数.

由定理 1.1 知，对换的次数就是排列奇偶性的改变次数，而 $12\cdots n$ 是偶排列，所以，若排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$是奇(偶)排列，则必须经奇(偶)数次对换才能变成自然排列.

推论 1.2 n 个自然数($n \geqslant 2$)共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇排列和偶排列各占一半.

证 n 级排列的总数为$n(n-1)\cdots 2 \cdot 1=n!$ 个.

设其中奇排列为 p 个，偶排列为 q 个. 若对这 p 个奇排列施行同一对换，由定理 1.1，p 个奇排列均变为偶排列，故 $p \leqslant q$；同理若对 q 个偶排列施行同一对换，则 q 个偶排列变为奇排列，故 $q \leqslant p$. 所以 $p=q$，从而 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.2.2 n 阶行列式的定义

利用排列的逆序和奇偶性的概念，三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{i_1 i_2 i_3}(-1)^{\tau(i_1 i_2 i_3)} a_{1i_1} a_{2i_2} a_{3i_3},$$

其中 $\sum\limits_{i_1 i_2 i_3}$ 表示对所有三级排列求和. 推广到 n 阶行列式,有

定义 1.3 n^2个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,称记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

为 n 阶行列式. 它是 $n!$ 个项的代数和. 这些项是一切可能取自于 D 的不同行与不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$. 项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$的符号为$(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}$,当 $i_1 i_2\cdots i_n$为奇排列时,该项符号为负,当 $i_1 i_2\cdots i_n$为偶排列时,符号为正. 即

$$D=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{1.9}$$

其中 $\sum\limits_{i_1 i_2\cdots i_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

行列式(1.8)简记为 $D=\det(a_{ij})$或 $D=|a_{ij}|$.

特别地,当 $n=1$ 时,一阶行列式$|a|=a$.

例 1.4 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在 n 阶行列式 D 的 $n!$ 个项中,考虑行列式的非零项. 由于行列式的每一项皆为不同行不同列的 n 个元素之积,因此行列式中的非零项必为 n 个非零元素的乘积.

在行列式的第 1 行中,仅有 a_{11}不为零,所以在式(1.9)中,a_{1i_1}只能取 a_{11},而 a_{2i_2}只能取 a_{22},不能取 a_{21},因为 a_{21}与 a_{11}同列. 同理 a_{3i_3}也只能取 a_{33},…,最后一行只能选 a_{nn},从而,

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式主对角线上方的元素全为零,称之为下**三角行列式**;相应地,主对角线下方的元素全为零的行列式,称为**上三角行列式**.

同理,上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地,主对角线以外元素全为零的行列式(称为**对角行列式**,记为 Λ)

$$\Lambda=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

同理,可以定义关于次对角线的**对角行列式以及三角行列式**. 利用行列式的定义,关于**次对角线的对角行列式以及上、下三角行列式**,分别有如下结论:

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & \\ \vdots & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1};$$

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

需要指出的是,n 阶行列式(1.8)的定义有多种形式.

例如,把 n 阶行列式每项的列下标按自然顺序排列,则行下标是某个 n 级排列 $j_1 j_2\cdots j_n$,便有行列式(1.8)的另一定义:

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}. \tag{1.10}$$

若 n 阶行列式每项的行下标按 $i_1i_2\cdots i_n$ 排列,列下标按 $j_1j_2\cdots j_n$ 排列,此时行列式(1.8)还可以定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{1.11}$$

例 1.5 已知 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 是某六阶行列式中的一项,试确定 i,j 的值以及该项的符号.

解 根据行列式的定义,行列式是其不同行不同列元素乘积的代数和,因此行下标 $2,3,i,6,5,1$ 应取自 1 至 6 这六个数字,故 $i=4$. 同理 $j=2$.

或者调换项 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}$ 中元素的位置,使行下标为自然排列,得 $a_{23}a_{31}a_{ij}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{ij}a_{56}a_{64}$,显然 $i=4$. 同理,若使列下标为自然排列,则知 $j=2$.

关于此项所带的符号,可有两种思路:

(1)使行下标为自然排列,$a_{23}a_{31}a_{42}a_{64}a_{56}a_{15}=a_{15}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{64}$,此时右端列下标排列为 531264. 因 $\tau(531264)=4+2+0+0+1=7$,即列的逆序数为奇数,所以该项

应带负号.

(2)直接计算行的逆序数和列的逆序数,因 $\tau(234651)+\tau(312465)=6+3=9$,即行、列逆序数之和为奇数,所以该项符号为负.

习题 1.2

1. 确定下列排列的逆序数,并确定排列的奇偶性:

(1)25143;　(2)6573421;　(3)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$.

2. 确定下列五阶行列式的项所带的符号:

(1)$a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{55}$;　(2)$a_{31}a_{42}a_{23}a_{14}a_{55}$;　(3)$a_{31}a_{42}a_{24}a_{13}a_{55}$.

3. 下列乘积中,哪些可以构成相应阶数的行列式的项?

(1)$a_{34}a_{21}a_{43}a_{12}$;　(2)$a_{12}a_{23}a_{34}a_{14}$;　(3)$a_{41}a_{32}a_{23}a_{14}a_{55}$.

4. 写出四阶行列式中含有 a_{32} 且带有负号的项.

5. 用行列式的定义计算下列行列式:

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　(2)$\begin{vmatrix} a & b & -a & c \\ -a & b & c & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ -b & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$;　(3)$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

6. 根据行列式的定义,确定函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数.

1.3 行列式的性质

对于一般的行列式,直接根据行列式的定义来计算非常麻烦.本节给出行列式的性质,利用这些性质可以简化行列式的计算.

考虑 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把 D 的行与列依次互换,得到的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T}. 显然,$(D^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式的值相等.

证 将 D^{T} 记为

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 从而

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}b_{i_1 1}b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n}=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}=D.$$

这表明,行列式的行和列具有同等地位. 因而对于行成立的性质,对列同样也成立. 反之亦然.

性质 1.2 交换行列式的两行(或两列),行列式只改变一个符号.

证 给定行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中,D_1 是由行列式 D 交换其 i,j 两行得到的行列式.

因为 D 的任一项为 $(-1)^{\tau(i_1\cdots s\cdots t\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{is}\cdots a_{jt}\cdots a_{ni_n}$,与之对应的 D_1 中的一项为 $(-1)^{\tau(i_1\cdots t\cdots s\cdots i_n)}a_{1i_1}\cdots a_{jt}\cdots a_{is}\cdots a_{ni_n}$. 由定理 1.1 得

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots s\cdots t\cdots i_n)}=(-1)(-1)^{\tau(i_1\cdots t\cdots s\cdots i_n)},$$

即 D 与 D_1 对应项的符号相反,从而,$D=-D_1$.

注 为方便起见,以 r_i 表示行列式的第 i 行,c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i,j 两行记为 $r_i\leftrightarrow r_j$,交换 i,j 两列记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

推论 1.3 如果行列式中有两行(列)完全相同,则行列式的值为零.

证 设行列式 D 的第 i 行与第 j 行相同 $(i\neq j)$. 由性质 1.2,交换这两行后,行列式改变符号,所以新的行列式值为 $-D$;但另一方面,交换相同的两行,行列式并没有改变,因此 $D=-D$,即 $D=0$.

性质 1.3 用数 k 乘以行列式,等于数 k 乘以行列式中某一行(列)的所有元素. 换言之,如果行列式某一行(列)的元素有公因子 k,则可将 k 提到行列式记号外相乘. 即