



高等学校理工类学习辅导丛书

材料力学 问题与范例分析

第2版

单辉祖 编著

高等教育出版社



高等学校理工类学习辅导丛书

材料力学 问题与范例分析

第2版

CAILIAO LIXUE WENTI YU FANLI FENXI

单辉祖 编著

高等教育出版社·北京

内容简介

本书通过大量的问题与范例分析,着重阐述材料力学的分析与求解方法,引导学生深入理解与掌握材料力学的基本概念与理论,开阔学生思路,培养学生分析问题与解决问题的能力。

本书分为“基本”与“进一步研究”两大部分。“基本”部分的内容与体系,紧密结合本科材料力学教学;“进一步研究”部分,则涉及材料力学中某些扩展性问题,以满足学生进一步提高的要求。

全书精心编写材料力学问题与例题 300 个。对于一些学生难于理解与需要深入探讨的重要问题,提供了既简明又深入的论述。在例题编写方面,注意典型性、多样性、概念性、思考性、实用性与综合性,既包括计算与理论分析题,也包括少量实验题与利用计算机求解的问题。

本书包括:绪论;轴向拉压应力;轴向拉压变形;扭转;弯曲内力;弯曲应力;非对称弯曲与特殊梁;弯曲变形;应力应变状态分析;强度理论;组合变形;压杆稳定;能量法;静不定问题分析;动载荷;疲劳;弯曲问题进一步研究;稳定问题进一步研究等共 18 章。

本书是一本学习材料力学的教学参考书,适用于学习材料力学的大学生、考研人员以及参加材料力学竞赛的学生,对于相关教师与工程技术人员,相信也会有所裨益。

本书也可作为“材料力学方法”等类课程的基本教材。

图书在版编目(CIP)数据

材料力学问题与范例分析 / 单辉祖编著. --2 版.
--北京:高等教育出版社, 2016.5
ISBN 978-7-04-045257-0

I. ①材… II. ①单… III. ①材料力学-高等学校-
教学参考资料 IV. ①TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 083460 号

策划编辑 黄 强	责任编辑 周 婷	封面设计 李卫青	版式设计 马 云
插图绘制 杜晓丹	责任校对 吕红颖	责任印制 尤 静	

出版发行 高等教育出版社	网 址 http://www.hep.edu.cn
社 址 北京市西城区德外大街 4 号	http://www.hep.com.cn
邮政编码 100120	网上订购 http://www.hepmall.com.cn
印 刷 北京京科印刷有限公司	http://www.hepmall.com
开 本 787mm×960mm 1/16	http://www.hepmall.cn
印 张 26.25	版 次 2003 年 7 月第 1 版
字 数 470 千字	2016 年 5 月第 2 版
购书热线 010-58581118	印 次 2016 年 5 月第 1 次印刷
咨询电话 400-810-0598	定 价 39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 45257-00

第2版前言

《材料力学问题、例题与分析方法》(第1版)属于“北京高等教育精品教材”,本书是修订版,更名为《材料力学问题与范例分析》(第2版)。

该书第1版出版后,得到兄弟院校广大师生的普遍好评与欢迎。这次修订主要是进一步充实反映材料力学教学基本要求的内容,适当删减部分较偏的问题,论述更系统,更简明深入,教学适用性更强。

编者在修订本书时,仍保持其原有特色,即通过问题与实例分析,着重阐述材料力学的分析与求解方法,引导学生深入理解与掌握材料力学的基本概念与理论,培养学生分析问题与解决问题的能力。

本书仍分为“基本”与“进一步研究”两大部分。“基本”部分的内容与体系,紧密结合本科材料力学教学;“进一步研究”部分,则涉及材料力学中某些扩展性问题,以满足学生进一步提高的要求,在书中并用*号标示。“基本”部分是全书的主体。

本书包括:绪论;轴向拉压应力;轴向拉压变形;扭转;弯曲内力;弯曲应力;非对称弯曲与特殊梁;弯曲变形;应力应变状态分析;强度理论;组合变形;压杆稳定;能量法;静不定问题分析;动载荷;疲劳;弯曲问题进一步研究;稳定问题进一步研究等共18章。

本书是一本材料力学教学参考书,适用于学习材料力学的学生、考研人员以及参加材料力学竞赛的学生,对于相关教师与工程技术人员,相信也会有所裨益。本书也可作为“材料力学方法”等类课程的基本教材。

本书承大连理工大学郑芳怀教授审阅,提出了许多精辟而中肯的意见,谨此致谢。

本书虽经编者多次修改与反复推敲,但难免仍存在一些不足之处,欢迎读者批评指正。

编者

2015年10月

第1版前言

本书是高等教育出版社“高等教育百门精品课程教材建设计划”的立项项目，也是“北京高等教育精品教材”的立项项目。

本书通过大量的问题与实例分析，着重阐述材料力学的分析与求解方法，引导学生深入理解与掌握材料力学的基本概念与理论，开阔学生思路，培养学生分析问题与解决问题的能力。

本书分为“基本”与“进一步研究”两大部分。“基本”部分的内容与体系，紧密结合本科材料力学教学；“进一步研究”部分，则涉及材料力学中一些较深、较难与某些扩展性问题，以满足学生进一步提高的要求，在书中并用*号标示。

本书虽然以问题与例题的形式编写（统一按问题的形式排序），但力求保持较强的系统性，所编选的问题与例题，既有层次，又有一定内在联系。在编排上，与材料力学基本教材相一致，采取章内设节的架构，以便于学生学习。

全书精心编写材料力学问题与例题 300 个。对于一些学生难于理解与需要深入探讨的重要问题，提供了既简明又深入的论述。在例题编写方面，注意典型性、多样性、概念性、思考性、实用性与综合性，既包括计算与理论分析题，也包括一些实验题，还包括少量利用计算机求解的例题。对于每个例题，不仅给出完整的求解过程，还特别注重解题思路分析与结果讨论，起到举一反三的作用，提高学生分析与解题的能力。

在 1986 至 1995 年，本书作者曾以“材料力学方法”为课程名称，先后三次为本科学生开课，学生普遍反映收获很大，“是在材料力学学习方面的一次升华”。在 1996, 2000 与 2004 年，北京航空航天大学材料力学教研室的有关教师，又主要以上述教学内容，培训参加全国基础力学（材料力学与理论力学）竞赛的北京航空航天大学学生，竞赛结果，在第三届（1996 年）、第四届（2000 年）与第五届（2004 年）全国基础力学竞赛中，北京航空航天大学学生一直名列前茅。本书即是在上述“材料力学方法”课程讲稿的基础上，经整理、修改与扩展而成，特别是大量增加了反映材料力学教学基本要求的内容，即上述“基本”部分。

本书由单辉祖编著。北京航空航天大学吴鹤华、崔德瑜与蒋持平教授参加

校订。

本书是一本学习材料力学的教学参考书，给正在学习材料力学的学生、考研人员以及参加材料力学竞赛的学生，提供了全面、系统与详细的指导，而对相关教师与工程技术人员，相信也会有所裨益。

本书也可作为“材料力学方法”等类课程的基本教材。

本书承大连交通大学陶学文教授审阅，提出了许多精辟而中肯的意见。在编写过程中，还得到了北京航空航天大学的相关领导与同志的支持与帮助。谨此一并致谢。

由于编者水平有限，加之编写时间仓促，书中难免存在一些不足之处，欢迎读者批评指正。

编者

2005年9月

目录

第 1 章 绪论	1
§ 1-1 内容提要	1
§ 1-2 内力与截面法	3
§ 1-3 正应力与切应力	5
§ 1-4 正应变与切应变	8
§ 1-5 胡克定律	9
第 2 章 轴向拉压应力	11
§ 2-1 内容提要	11
§ 2-2 轴力与轴力图	13
§ 2-3 拉压杆的应力	15
§ 2-4 材料拉压力学性能	18
§ 2-5 拉压强度计算	20
§ 2-6 剪切与挤压	25
第 3 章 轴向拉压变形	30
§ 3-1 内容提要	30
§ 3-2 拉压杆的变形	32
§ 3-3 节点位移分析	36
§ 3-4 拉压应变能	41
§ 3-5 简单拉压静不定问题	44
§ 3-6 热应力与初应力	51
§ 3-7 拉压问题弹塑性分析	56
第 4 章 扭转	59
§ 4-1 内容提要	59

§ 4-2 扭矩与扭矩图	63
§ 4-3 圆轴扭转应力与强度计算	65
§ 4-4 圆轴扭转变形	69
§ 4-5 扭转应变能	73
§ 4-6 圆轴扭转静不定问题	76
§ 4-7 薄壁杆扭转	85
§ 4-8 扭转连接	87
第 5 章 弯曲内力	94
§ 5-1 内容提要	94
§ 5-2 剪力、弯矩方程与剪力、弯矩图	97
§ 5-3 剪力、弯矩与分布载荷集度间的关系	100
§ 5-4 剪力、弯矩与分布力偶集度间的关系	106
§ 5-5 刚架与曲梁的内力	108
§ 5-6 叠加法画弯矩图	112
第 6 章 弯曲应力	115
§ 6-1 内容提要	115
§ 6-2 对称弯曲正应力	118
§ 6-3 对称弯曲切应力	124
§ 6-4 梁的强度计算与合理强度设计	128
§ 6-5 弯曲连接	133
§ 6-6 双对称截面梁的非对称弯曲	138
第 7 章 非对称弯曲与特殊梁	141
§ 7-1 内容提要	141
§ 7-2 主轴与主惯性矩	144
§ 7-3 非对称弯曲正应力	149
§ 7-4 薄壁梁的弯曲切应力与截面剪心	153
§ 7-5 复合梁与曲梁的应力	158
第 8 章 弯曲变形	163
§ 8-1 内容提要	163
§ 8-2 挠曲轴与相关基本方程	165

§ 8-3 计算梁位移的积分法	168
§ 8-4 计算梁位移的叠加法	173
§ 8-5 静不定梁	179
§ 8-6 直梁接触问题	189
第 9 章 应力应变状态分析	198
§ 9-1 内容提要	198
§ 9-2 平面应力状态应力分析	202
§ 9-3 空间应力状态应力分析	205
§ 9-4 应变分析	210
§ 9-5 应力应变关系	212
第 10 章 强度理论	217
§ 10-1 内容提要	217
§ 10-2 最大拉应力与最大拉应变理论	219
§ 10-3 最大切应力与畸变能理论	221
§ 10-4 莫尔强度理论	224
§ 10-5 承压薄壁圆筒	226
第 11 章 组合变形	232
§ 11-1 内容提要	232
§ 11-2 弯拉(压)组合	234
§ 11-3 截面核心	240
§ 11-4 弯扭组合与弯拉(压)扭组合	243
§ 11-5 矩形截面杆组合变形一般情况	250
第 12 章 压杆稳定	254
§ 12-1 内容提要	254
§ 12-2 弹性支持刚性杆的临界载荷	256
§ 12-3 细长弹性压杆的临界载荷	263
§ 12-4 压杆稳定性计算	270
第 13 章 能量法	274
§ 13-1 内容提要	274

§ 13-2	外力功与应变能	278
§ 13-3	互等定理	281
§ 13-4	卡氏定理	285
§ 13-5	变形体虚功原理	290
§ 13-6	单位载荷法	292
§ 13-7	非线性与温度等问题分析	298
§ 13-8	图形互乘法	303
第 14 章	静不定问题分析	306
§ 14-1	内容提要	306
§ 14-2	用力法分析外力静不定问题	307
§ 14-3	用力法分析内力静不定问题	314
§ 14-4	对称与反对称静不定问题分析	320
§ 14-5	非线性与温度等静不定问题分析	330
§ 14-6	静不定刚架空间受力分析	333
§ 14-7	位移法解静不定问题	339
第 15 章	动载荷	342
§ 15-1	内容提要	342
§ 15-2	惯性力引起的应力	343
§ 15-3	冲击应力	346
* § 15-4	冲击应力进一步研究	355
第 16 章	疲劳	361
§ 16-1	内容提要	361
§ 16-2	循环应力	363
§ 16-3	对称循环应力下的疲劳强度计算	365
§ 16-4	非对称循环应力下的疲劳强度计算	367
* 第 17 章	弯曲问题进一步研究	370
* § 17-1	直梁纵向截面上的正应力	370
* § 17-2	初曲梁的弯曲变形	373
* § 17-3	梁的剪切挠度与轴向位移	376
* § 17-4	弯曲接触问题进一步研究	379

* § 17-5 挠曲轴四阶微分方程与弹性基础梁	383
* § 17-6 计算梁位移的奇异函数法	386
*第 18 章 稳定问题进一步研究	391
* § 18-1 弹性与刚性混合杆系的临界载荷	391
* § 18-2 弹性支持弹性杆的临界载荷	394
* § 18-3 偏心与初曲承压杆分析	398
* § 18-4 利用能量法确定压杆的临界载荷	401
参考文献	404
作者简介	

第1章 绪论

§ 1-1 内 容 提 要

构件的承载能力与安全工作要求

组成机械与结构的零、构件，统称为构件。

构件抵抗破坏（断裂或显著塑性变形）的能力，称为强度；构件抵抗变形的能力，称为刚度；构件保持原有平衡形式的能力，称为稳定性。

构件应具备足够的强度、刚度与稳定性，以保证在规定的使用条件下，不破坏、不过分变形与不丧失稳定性。

材料力学的研究对象与基本假设

一方向尺寸远大于其他两方向尺寸的构件，称为杆或杆件。杆的形状与尺寸由其轴线与横截面确定，轴线通过横截面的形心，横截面与轴线相正交。

材料力学的主要研究对象是杆，以及由杆组成的简单杆系，同时也研究一些形状与受力均比较简单的板与壳。

材料力学的基本假设：

1. 连续性假设 在构件所占空间内毫无空隙地充满物质。
2. 均匀性假设 材料的力学性能与其在构件中的位置无关。
3. 各向同性假设 材料沿各个方向具有相同的力学性能。

外力、内力与截面法

作用在构件上的载荷与约束反力，称为外力。

由于外力作用，构件内部相连部分之间的相互作用力，称为内力。

杆件横截面上的内力，可用三个内力分量与三个内力偶矩分量表示。作

用线垂直于所切横截面并通过其形心的内力分量,称为轴力;作用线位于所切横截面的内力分量,称为剪力;矢量垂直于所切横截面的内力偶矩分量,称为扭矩;矢量位于所切横截面的内力偶矩分量,称为弯矩。

将杆件假想地切开以显示内力,并由平衡方程建立内、外力间关系或由外力确定内力的方法,称为截面法。

正应力、切应力与切应力互等定理

在截面 $m-m$ 上任一点 k 的周围取一微小面积 ΔA , 并设作用于其上的内力为 ΔF , 则

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

称为截面 $m-m$ 上 k 点处的应力。应力是内力的分布集度。

应力 p 沿截面法向的分量,称为正应力,并用 σ 表示;应力 p 沿截面切向的分量,称为切应力,并用 τ 表示。

微体受力最基本、最简单的形式有两种:单向应力与纯剪切。在单向应力状态下,微体仅在一对互相平行的表面承受正应力;在纯剪切状态下,微体表面仅承受切应力。

在微体的互垂截面上,垂直于截面交线的切应力数值相等,而方向则均指向或离开该交线,称为切应力互等定理。

正应变与切应变

在构件内任一点 k 沿任意方位 ka 取一微小线段 Δs , 变形后其长度变为 $\Delta s + \Delta u$, 则

$$\varepsilon = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta s}$$

称为 k 点处沿 ka 方位的正应变。

过构件内任一点 k 取任意两互垂微线段,变形后该二微线段所夹直角的改变量,称为 k 点处沿该二微线段方位的切应变,并用 γ 表示,其单位为 rad 。

正应变与切应变均为量纲为一的量。

胡克定律与剪切胡克定律

单向应力试验表明:在正应力 σ 作用下,材料沿正应力作用方位发生正应变 ε , 如果正应力不超过一定限度,则正应力与正应变成正比,写成等式,即

$$\sigma = E\varepsilon$$

称为胡克定律。比例常数 E 称为弹性模量，其值随材料而异。

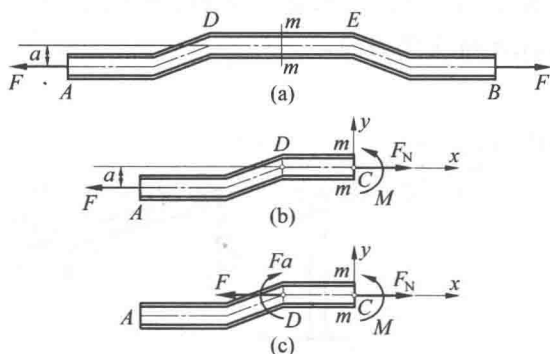
纯剪切试验表明：在切应力 τ 作用下，材料发生切应变 γ ，如果切应力不超过一定限度，则切应力与切应变成正比，写成等式，即

$$\tau = G\gamma$$

称为剪切胡克定律。比例常数 G 称为切变模量，其值随材料而异。

§ 1-2 内力与截面法

问题 1-2-1 图 a 所示杆件，两端承受载荷 F 作用，试分析横截面 $m-m$ 上的内力。



问题 1-2-1 图

解：1. 解法一

假想地沿截面 $m-m$ 将杆切开，并选切开后的左段为研究对象（图 b）。

首先可以看出，在截面 $m-m$ 上，存在一个通过截面形心 C 的轴向内力即轴力 F_N ；其次，由于轴力 F_N 与外力 F 平行但不共线，从而构成一力偶，因此，在截面 $m-m$ 上，还将存在一个矢量位于横截面的内力偶矩即弯矩 M 。

由平衡方程

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, & F_N - F &= 0 \\ \sum M_C &= 0, & M - Fa &= 0 \end{aligned}$$

分别得

$$F_N = F, \quad M = Fa$$

2. 解法二

将载荷 F 平移到杆段 DE 起始横截面的形心 D , 得作用在该点的集中力 F , 与位于 $x-y$ 平面的矩为 Fa 的附加力偶 (图 c)。可见, 截面 $m-m$ 上一定存在轴力 F_N 与弯矩 M 。

根据上述分析, 由平衡方程 $\sum F_x = 0$ 与 $\sum M_C = 0$, 同样可求得

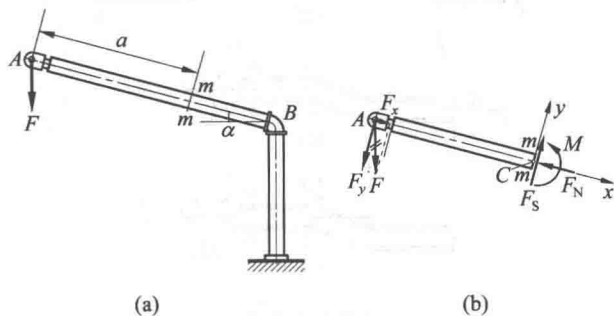
$$F_N = F, \quad M = Fa$$

3. 讨论

采用将外力平移到研究杆段的分析方法, 对于确定横截面上将存在何种内力分量, 比较简便, 当外力较复杂时更是如此。

要注意的是, 当研究对象确定后 (此处即切开后的左段), 作用在研究对象上的外力, 不能平移到非研究对象上, 同样, 作用在非研究对象上的外力, 也不能平移到研究对象上, 否则, 将改变所研究截面的内力。

问题 1-2-2 图 a 所示立柱, 承受铅垂载荷 F 作用。设斜杆 AB 的倾斜角为 α , 试分析横截面 $m-m$ 上的内力。



问题 1-2-2 图

解: 1. 问题分析

假想地沿横截面 $m-m$ 将斜杆切开, 并选切开后的左段为研究对象 (图 b)。

为了分析截面 $m-m$ 上的内力, 将载荷 F 沿斜杆的轴向与横向分解, 得相应分力为

$$F_x = F \sin \alpha, \quad F_y = F \cos \alpha$$

在轴向载荷 F_x 作用下, 截面 $m-m$ 上将引起轴力 F_N ; 而在横向载荷 F_y 作用下, 该截面上则将引起剪力 F_S 与弯矩 M 。

2. 内力计算

作用在研究对象上的各力组成一平面力系, 平衡方程为

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0, & F_x - F_N &= 0 \\ \sum F_y &= 0, & F_S - F_y &= 0 \\ \sum M_C &= 0, & M + F_y a &= 0\end{aligned}$$

分别得

$$\begin{aligned}F_N &= F_x = F \sin \alpha \\ F_S &= F_y = F \cos \alpha \\ M &= -F_y a = -F a \cos \alpha\end{aligned}$$

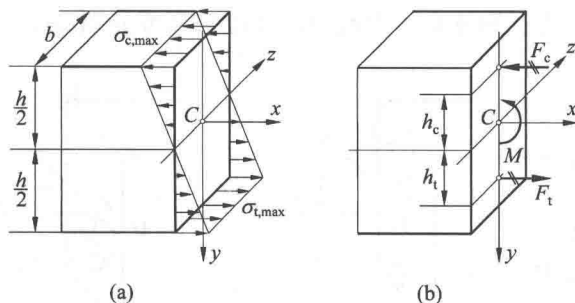
所得 M 为负, 说明弯矩 M 的实际方向与所设方向相反, 即为顺时针方向。

3. 讨论

上述问题也可采用另一方法求解。首先, 将载荷 F 平移到截面 $m-m$ 的形心 C , 得作用在该形心处的集中力 F , 以及位于 $x-y$ 平面的附加力偶。然后, 将上述集中力 F 分解为轴向与横向两个分力。最后, 根据研究对象的平衡条件, 也可确定截面 $m-m$ 上的内力。

§ 1-3 正应力与切应力

问题 1-3-1 图 a 所示矩形截面杆, C 为截面形心, 坐标轴 y 与 z 分别沿截面铅垂与水平对称轴。横截面上的正应力沿截面高度线性分布, 最大压应力与最大拉应力分别为 $\sigma_{c,\max}$ 与 $\sigma_{t,\max}$, 且数值相等, 横截面的宽度与高度分别为 b 与 h , 试分析横截面上的内力。



问题 1-3-1 图

解: 1. 问题分析

横截面上仅存在正应力, 因此, 横截面上不可能存在剪力与扭矩。其

次, 横截面上的正应力沿截面宽度均匀分布, 因此, 横截面上也不可能存在矢量沿坐标轴 y 的弯矩 M_y 。

2. 内力计算

如图 b 所示, 在拉伸区内, 由正应力所形成的合力为

$$F_t = \frac{\sigma_{t,\max}}{2} \cdot b \frac{h}{2} = \frac{bh\sigma_{t,\max}}{4}$$

而其作用点至坐标轴 z 的距离则为

$$h_t = \frac{2}{3} \frac{h}{2} = \frac{h}{3}$$

同理, 得压缩区由正应力所形成的合力及其作用点至坐标轴 z 的距离分别为

$$F_c = \frac{bh\sigma_{c,\max}}{4} = F_t$$

$$h_c = h_t = \frac{h}{3}$$

由此可见, 横截面上的轴力为

$$F_N = F_t - F_c = 0$$

而合力 F_t 与 F_c 则构成一力偶, 其矩即弯矩则为

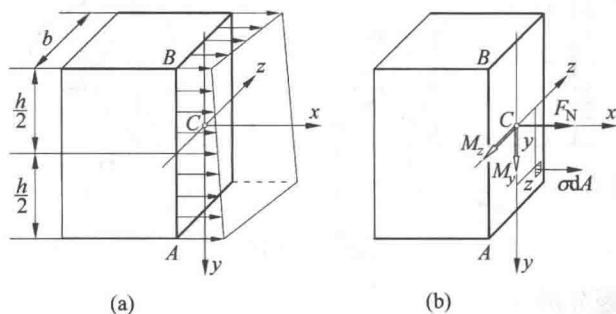
$$M = F_t(h_t + h_c) = \frac{bh\sigma_{t,\max}}{4} \left(\frac{h}{3} + \frac{h}{3} \right) = \frac{bh^2\sigma_{t,\max}}{6}$$

将合力 F_t 与 F_c 向截面形心 C 简化, 并计算主矩与主矢, 也可得到同样的结论。

问题 1-3-2 图 a 所示矩形截面杆, C 为截面形心, 坐标轴 y 与 z 分别沿截面铅垂与水平对称轴。横截面上的正应力线性分布, 其表达式为

$$\sigma = a + ky + cz$$

式中, a , k 与 c 为已知常数。横截面的宽度与高度分别为 b 与 h , 试确定横截面上的内力。



问题 1-3-2 图