高中数学竞赛、自主招生专题讲座

Function

函数的性态及应用

◎ 李 盛 杨樟松 李世杰 著

高中数学竞赛、自主招生专题讲座

函数的性态及应用

李　盛　杨樟松　李世杰　著

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

函数的性态及应用 / 李盛，杨樟松，李世杰著. ——
杭州：浙江大学出版社，2012.1(2012.2 重印)
ISBN 978-7-308-09489-4

Ⅰ.①函… Ⅱ.①李… ②杨… ③李… Ⅲ.①函数—
研究 Ⅳ.①O174

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 272233 号

函数的性态及应用

李 盛 杨樟松 李世杰 著

责任编辑 石国华
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310007)
(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版 杭州星云光电图文制作工作室
印　　刷 临安市曙光印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 9
字　　数 191 千字
版 印 次 2012 年 1 月第 1 版 2012 年 2 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-09489-4
定　　价 18.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

编者的话

函数是描述客观世界变化规律的数学模型。德国著名数学家克莱因提出过一个重要的思想:以函数概念和思想统一数学教育的内容。他认为:“函数概念应该成为数学教育的灵魂,以函数概念为中心,将全部数学教材集中在它的周围,进行充分的综合。”可见函数是数学课程中的核心知识,它既是整个数学课程的一个主线,又是高等数学的基础,是高考与数学竞赛考查的热点和最重要的内容。

函数是高中数学的核心概念,函数的学习贯穿于整个高中阶段,在高中数学大部分章节中都涉及函数或者函数的思想方法。从某种意义上可以说,作为高中基础的函数与函数思想的掌握情况,直接决定学生数学素质的好坏,在高中数学的学习中起着举足轻重的作用。在近几年的高考和竞赛试题中,对函数知识的考查,既有函数性质的研究与论证,又有与其他知识整合令人耳目一新的新颖试题;既有容易题和中等题,又有难题;在选择题、填空题和解答题中涉及的函数内容都很多。

同时,函数是高中代数学习的一个难点。要学好函数,就要掌握好函数的基本性质,这样才能运用自如,才能学会用函数的概念和性质分析问题、转化问题并解决问题,在数学思想方法上获得飞跃。本书从六个方面全面剖析了高中函数的单调性、奇偶性、周期性、可导性和凹凸性等问题,特别注重将函数问题后面隐藏的数学背景和思想方法讲透彻,让读者感受和体验函数相关问题的内在本质,从而达到熟练掌握函数思想方法,并能充分应用函数的思想方法分析和解决问题的目的。

由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,请读者批评指正。

作　者

2011 年 10 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数的定义

知识扫描 ZHI SHI SAO MIAO

“函数”是数学中最重要的概念之一，也是整个高中数学的重点，其中函数思想是最重要的数学思想方法，函数问题在历年的高考与数学竞赛中都占据相当大的比例.

1. 函数的概念

设 A、B 是非空的数集，如果按照某种确定的对应关系 f，使对于集合 A 中的任意一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数. 记作：$y=f(x)$，$x \in A$. 其中，x 叫做自变量，x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x) \mid x \in A\}$ 叫做函数的值域（$\subseteq B$）.

注意：(1)“$y=f(x)$”是函数符号，也可以用其他的字母表示，如“$y=g(x)$”；

(2)函数符号“$y=f(x)$”中的 $f(x)$ 表示与 x 对应的函数值，是一个数，而不是 f 乘 x.

常用的函数表示法有：

(1)解析法：把两个变量的函数关系，用一个等式来表示，这个等式叫做函数的解析表达式，简称解析式；

(2)列表法：列出表格来表示两个变量之间的关系；

(3)图象法：用函数图象表示两个变量之间的关系.

2. 构成函数的三要素：定义域、对应关系和值域

学习函数的概念，首先要掌握一些基本方法.

(1)解决一切函数问题必须先确定该函数的定义域，函数的定义域包含三种形式：

①自然限制型：指函数解析式有意义的自变量 x 的取值范围（如：分式函数的分母不为零，偶次根式函数的被开方数为非负数，对数函数的真数为正数，等等）；

②人为限制型：指人为对命题的条件或自变量 x 进行限制，这是函数学习中的重点，往往也是难点，因为有时这种限制比较隐蔽，容易犯错误；

③实际应用型：解决函数的综合问题与应用问题时，要考察自变量 x 的实际意义.

(2)求函数定义域一般有三类问题：

①给出函数解析式的：函数的定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合；

②实际问题：函数的定义域的求解除要考虑解析式有意义外，还应考虑使实际问题有意义；

③已知 $f(x)$的定义域求 $f[g(x)]$的定义域，或已知 $f[g(x)]$的定义域求 $f(x)$的定义域.

特别地，若已知 $f(x)$的定义域为$[a,b]$，其复合函数 $f[g(x)]$的定义域应由 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 解出.

值得指出的是：

①函数的定义域不可以是空集.函数是建立在两个非空集合上的一种特殊映射，对应法则是函数概念的核心，定义域是灵魂，值域实际上可由对应法则和定义域决定.所以函数的定义域不可以是空集.如 $y=\sqrt{-1-x^2}$，其实不是函数.

②函数的定义域不一定是函数式有意义的实数 x 的集合.这种说法一般情况下可能是成立的，但还要看问题的背景或实际意义.如函数：$y=x^2$，$x\in[1,+\infty)$，显然它的定义域就不是函数式有意义的实数 x 的集合.假如问题有实际意义或几何意义，除了考虑函数式有意义外，还要由问题本身的情况所决定，函数的定义域是函数式有意义的实数 x 的集合的子集.

(3)求函数解析式的常见题型及常用方法

①已知函数类型，求函数的解析式，常用待定系数法；

②已知 $f(x)$求 $f[g(x)]$或已知 $f[g(x)]$求 $f(x)$，常用换元法、配凑法；

③已知函数图象，求函数解析式，常用代点法；

④若 $f(x)$满足某个等式，这个等式除 $f(x)$外还有其他未知量，需构造另一个等式，常用解方程组法；

⑤应用题求函数解析式，常用方法有待定系数法等.

求出函数的解析式应注明定义域.

(4)函数值域

函数的值域是由其对应法则和定义域共同决定的.其类型依解析式的特点可分三类：

①求常见函数值域；②求由常见函数复合而成的函数的值域；③求由常见函数作某些“运算”而得函数的值域.

高中数学要求能用初等方法，求一些简单函数的值域问题.常用方法有：

①直接法：利用常见函数的值域来求.如

一次函数 $y=ax+b(a\neq 0)$的定义域为 $\mathbf{R}$，值域为 $\mathbf{R}$；

反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，值域为$\{y|y\neq 0\}$；

二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的定义域为 $\mathbf{R}$，

当 $a>0$ 时，值域为$\left\{y\middle|y\geqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$；当 $a<0$ 时，值域为$\left\{y\middle|y\leqslant\frac{4ac-b^2}{4a}\right\}$.

②配方法：转化为二次函数，利用二次函数的特征来求；常转化为：$f(x)=ax^2+bx+c$，$x\in(m,n)$的形式；

③分离常数法；

④换元法：通过变量代换转化为能求值域的函数；

⑤单调性法：函数为单调函数，可根据函数的单调性求值域；

⑥数形结合：根据函数的几何图形，利用数形结合的方法来求值域.

3. 两个函数的相等

函数的定义中含有三个要素，即定义域 A、值域 C 和对应法则 f. 当函数的定义域及从定义域到值域的对应法则确定之后，函数的值域也就随之确定. 因此，定义域和对应法则为函数的两个基本条件. 当且仅当两个函数的定义域和对应法则都分别相同时，这两个函数才是同一个函数.

4. 映射的概念

一般地，设 A、B 是两个非空的集合，如果按某一个确定的对应法则 f，使对于集合 A 中的任意一个元素 x，在集合 B 中都有唯一确定的元素 y 与之对应，那么就称对应 $f:A\to B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个映射. 记作“$f:A\to B$”.

函数是建立在两个非空数集间的一种对应，若将其中的条件“非空数集”弱化为“任意两个非空集合”，按照某种法则可以建立起更为普遍的元素之间的对应关系，这种对应关系就叫映射.

注意：(1)这两个集合有先后顺序，A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是截然不同的. 其中 f 表示具体的对应法则.

(2)“都有唯一”包含两层意思：一是必有一个；二是只有一个，也就是说有且只有一个的意思.

5. 分段函数

若一个函数的定义域分成了若干个子区间，而每个子区间的解析式不同，这种函数又称为分段函数.

分段函数是“一个函数”，不同范围的 x 有不同的对应法则.

分段函数的定义域是各段函数自变量取值范围的并集，值域是各段函数值域的并集.

6. 复合函数

若 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in(a,b)$，$u\in(m,n)$，那么 $y=f[g(x)]$ 称为复合函数，u 称为中间变量，它的取值范围是 $g(x)$ 的值域.

范例精析 FAN LI JING XI

【例 1.1】 求下列函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{1}{x+2}$.

(2) $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x-x^2}}{|x-1|-1}$.

【解】 (1)要使原函数有意义,必须 $\begin{cases}9-x^2\geqslant 0,\\ x+2\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq -2.\end{cases}$ 所以原函数的定义域为 $[-3,-2)\cup(-2,3]$.

(2)要使原函数有意义,必须 $\begin{cases}3x-x^2\geqslant 0,\\ |x-1|-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3,\\ x\neq 2,x\neq 0.\end{cases}$ 所以原函数的定义域为 $(0,2)\cup(2,3]$.

【注】 定义域、值域应写成区间或集合,并注意逻辑连接词的正确使用.

【例 1.2】 已知 $g(x)=1-2x$, $f[g(x)]=\dfrac{1-x^2}{x^2}(x\neq 0)$,则 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$的值为________.

【解】 条件即为 $f(1-2x)=\dfrac{1-x^2}{x^2}$,令 $t=1-2x$,则 $x=\dfrac{1-t}{2}$,

所以 $f(t)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^2}=\dfrac{4-(1-t)^2}{(1-t)^2}(t\neq 1)$,

故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4-\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)^2}=15$.

【评析】 "直求"即直接将自变量值代入函数式,化简计算后求得函数值,或先化简函数式再代入求值.这是求函数值最基本的方法,关键在于运算的准确性.

由于本题目标只是求值,我们也可直接令 $g(x)=1-2x=\dfrac{1}{2}$,得 $x=\dfrac{1}{4}$,所以 $g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$,故 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=f\left[g\left(\dfrac{1}{4}\right)\right]=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=15$.

【例 1.3】 设函数 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+a$,若对于任意 $x_1\in[-1,1]$,总存在 $x_2\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$,使得 $g(x_2)=f(x_1)$成立.则正整数 a 的最大值为________.

【解】 对于任意的 $x_1\in[-1,1]$, $f(x_1)\in[0,1]$,

对于任意的 $x_2\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, $g(x_2)\in[a-1,a+1]$,

对于任意 $x_1\in[-1,1]$,总存在 $x_2\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$,使得 $g(x_2)=f(x_1)$成立.

只要 $[a-1,a+1]\supseteq[0,1]$,这等价于

$a-1\leqslant 0$，且 $a+1\geqslant 1$，即 $0\leqslant a\leqslant 1$，所以 a 的最大值为 1.

【例 1.4】 设函数 $f(x)=\begin{cases}x-3, & x\geqslant 100\\ f[f(x+5)], & x<100\end{cases}$，求 $f(89)$.

【解】 这是分段函数与复合函数式的变换问题，需要反复进行数值代换，

$$\begin{aligned}f(89)&=f(f(94))=f(f(f(99)))=f(f(f(f(104))))=f(f(f(101)))\\&=f(f(98))=f(f(f(103)))=f(f(100))=f(97)=f(f(102))=f(99)\\&=f(f(104))=f(101)=98.\end{aligned}$$

【评析】 利用了函数解析式的一些常用变换技巧（赋值、变量代换、换元，等等），这是函数学习的常用基本功.

【例 1.5】 （2010 年全国高中数学联赛甘肃省预赛试题）函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 对一切 x、y、$z\in\mathbf{R}$ 满足 $f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)\geqslant 3f(x+2y+z)$，则 $f(1)-f(0)=$________.

【解】 取 $x=-y=z$，得

$$f(2x)\geqslant f(0)\text{，知 } f(1)\geqslant f(0).$$

取 $x=y=-z$，得

$$f(0)\geqslant f(2x)\text{，知 } f(0)\geqslant f(1)$$

于是，$f(1)-f(0)=0$.

【注】 实际上我们求出了所给不等式的函数解

$$f(x)=f(0)=c,x\in\mathbf{R}$$

其中 c 为任意实常数.

在处理这一类函数不等式问题时，往往需要对某些变量进行赋值，问题特殊化后简捷获解.

【例 1.6】 (1)函数 $f(x)=\sqrt{1+ax}$ 的定义域是 $[-1,+\infty)$，求实数 a 的取值范围.

(2)函数 $f(x)=\sqrt{1+ax}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有意义，求实数 a 的取值范围.

【解】 (1)由题意得，关于 x 的不等式 $1+ax\geqslant 0$ 的解集为 $[-1,+\infty)$.

当 $a\leqslant 0$ 时，$x\leqslant -\dfrac{1}{a}$，不合题意.

当 $a>0$ 时，$x\geqslant -\dfrac{1}{a}$，所以 $-\dfrac{1}{a}=-1$，$a=1$.

(2)由题意，关于 x 的不等式 $1+ax\geqslant 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立，所以 $a\geqslant -\dfrac{1}{x}$，$x\in[1,+\infty)$，所以 $a\geqslant -1$.

【评析】 函数的定义域 A 是自变量 x 的取值范围. 若函数在集合 M 上有意义，则 M 应是 A 的子集，在审题时这两个问题容易产生混淆.

【例 1.7】 若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$，求函数 $y=f(3x-1)$ 的定义域.

【分析】 本题要求的是函数 $y=f(3x-1)$ 的定义域. 这里的自变量是 x，因此，我们的目标是找到 $y=f(3x-1)$ 中 x 的取值范围. 而对于同一道题目，同一个“f”的作用对象的取

值范围是一致的.其中函数 $y=f(x)$ 中"f"的作用对象为 $3x-1$.

【解】 因为函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$,即 f 的作用对象 x 的取值范围为

$$-1\leqslant x\leqslant 1,$$

因此,对函数 $y=f(3x-1)$,有

$$-1\leqslant 3x-1\leqslant 1,$$

解得

$$0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3},$$

所以函数 $y=f(3x-1)$ 的定义域为 $\left[0,\frac{2}{3}\right]$.

【评析】 "抽象函数"的定义域是一个较难理解的知识点,正如其名称一样"抽象".

求此类函数的定义域,关键是括号内式子的地位等同(即同一对应法则后括号内的式子其有相同的取值范围),如本题中的 x 与 $3x-1$.

【例 1.8】 根据条件求下列各函数的解析式:

(1)已知 $f(x)$ 是二次函数,若 $f(0)=0$,$f(x+1)=f(x)+x+1$,求 $f(x)$.

(2)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$.

(3)若 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$,求 $f(x)$.

【解】 (1)本题已知函数的类型,可采用待定系数法求解.

设 $f(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$,由于 $f(0)=0$,得 $f(x)=ax^2+bx$,

又由 $f(x+1)=f(x)+x+1$,所以 $a(x+1)^2+b(x+1)=ax^2+bx+x+1$,

即 $ax^2+(2a+b)x+a+b=ax^2+(b+1)x+1$,

于是 $\begin{cases}2a+b=b+1\\ a\neq 0\\ a+b=1\end{cases}$,解得 $a=b=\frac{1}{2}$,因此 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

(2)本题属于求复合函数解析式问题,可采用换元法求解.

设 $u=\sqrt{x}+1(x\geqslant 0)$,即 $\sqrt{x}=u-1\quad(u\geqslant 1)$,

所以 $f(u)=(u-1)^2+2(u-1)=u^2-1\quad(u\geqslant 1)$.

于是 $f(x)=x^2-1\quad(x\geqslant 1)$.

(3)用消参法求解.

用 $\frac{1}{x}$ 代 x,可得:$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{a}{x}$,与 $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=ax$ 联立,

消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$,得:$f(x)=\frac{2a}{3x}-\frac{ax}{3}$.

【评析】 第(3)小题中的函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可以任意取值,或无定义.原因是题目条件中对此没有约束.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

【例 1.9】 作出函数 $y=|x|(x+1)$的图象.

【分析】 直接由已知函数的解析式列表描点很困难,原因在于解析式中含有绝对值,所以应先根据绝对值的性质进行等价变形.

【解】 当 $x\geqslant 0$ 时,$y=x(x+1)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

当 $x<0$ 时,$y=-x(x+1)=-x^2-x=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

分别作出这两段函数的图象(如图 1-1),即为 $y=|x|(x+1)$的图象.

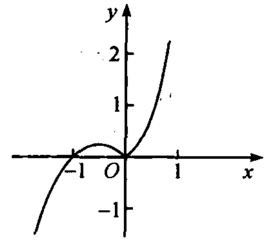

图 1-1

【评析】 在画分段函数的图象时,要特别注意定义域的限制.

【例 1.10】 求函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ 8, & 4<x\leqslant 8\\ 16-x, & 8<x\leqslant 12\end{cases}$ 的最大值和最小值.

【解】 作出函数 $y=f(x)$的图象(如图 1-2 所示):

由图可知:当 $4\leqslant x\leqslant 8$ 时,$f(x)$的最大值为 8.

当 $x=0$ 时,$f(x)$的最小值为 $f(0)=0$.

故函数 $f(x)$的最大值为 8,最小值为 0.

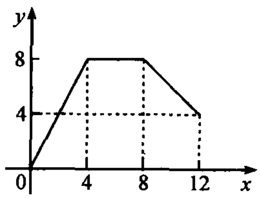

图 1-2

【评析】 求分段函数的最值,可先分别讨论各段上的最值,再加以综合比较,求解过程常借助图象.

【例 1.11】 (2008 年高中数学联赛四川赛区初赛试题)是否存在一个二次函数 $f(x)$,使得对任意的正整数 k,当 $x=\underbrace{55\cdots5}_{k个5}$时,都有 $f(x)=\underbrace{55\cdots5}_{2k个5}$成立?请给出结论,并加以证明.

【解】 存在符合条件的二次函数.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$,则当 $k=1,2,3$ 时,有

$$f(5)=25a+5b+c=55 \quad ①$$

$$f(55)=3025a+55b+c=5555 \quad ②$$

$$f(555)=308025a+555b+c=555555 \quad ③$$

联立①、②、③,解得 $a=\frac{9}{5}$,$b=2$,$c=0$. 于是,$f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$.

下面证明:二次函数 $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$ 符合条件.

因为$\underbrace{55\cdots5}_{k个5}=5(1+10+100+\cdots+10^{k-1})=\frac{5}{9}(10^k-1)$,

同理:$\underbrace{55\cdots5}_{2k个5}=\frac{5}{9}(10^{2k}-1)$;

$$f(\underbrace{55\cdots5}_{k个5})=f\left[\frac{5}{9}(10^k-1)\right]=\frac{9}{5}\left[\frac{5}{9}(10^k-1)\right]^2+2\times\frac{5}{9}(10^k-1)$$

$$=\frac{5}{9}(10^k-1)^2+2\times\frac{5}{9}(10^k-1)=\frac{5}{9}(10^k-1)(10^k+1)$$

$$=\frac{5}{9}(10^{2k}-1)=\underbrace{55\cdots5}_{2k个5}.$$

说明所求的二次函数 $f(x)=\frac{9}{5}x^2+2x$ 符合条件.

【例 1.12】 (2010 年全国高考卷Ⅰ理科试题)直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$ 有四个交点,则 a 的取值范围是________________.

【解法 1】 如图 1-3,在同一直角坐标系内,画出直线 $y=1$ 与曲线 $y=x^2-|x|+a$,观图可知,a 的取值必须满足$\begin{cases}a>1\\ \frac{4a-1}{4}<1\end{cases}$,解得 $1<a<\frac{5}{4}$.

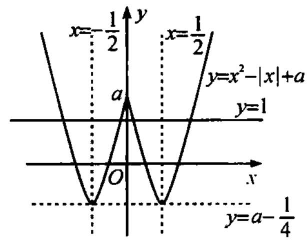

图 1-3

【解法 2】 由数形结合知:$a-\frac{1}{4}<1<a$,即 $1<a<\frac{5}{4}$.

【评析】 本题主要考查函数的图象性质与不等式的解法,这里应用了数形结合的数学思想.

【例 1.13】 (第 22 届"希望杯"全国数学邀请赛高一年级第二试试题)设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0,\end{cases}$ 其中 $b>0$,$c\in\mathbf{R}$. 当且仅当 $x=-2$ 时,函数 $f(x)$ 取得最小值 -2.

(1)求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2)若方程 $f(x)=x+a(a\in\mathbf{R})$ 至少有两个不同的实数根,求 a 的取值范围.

【解】 (1)因为函数 $f(x)$ 当且仅当 $x=-2$ 时取得最小值 -2,所以二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的对称轴是 $x=-\frac{b}{2}=-2$,即 $b=4$,

且 $$f(-2)=(-2)^2-2b+c=-2,$$

解得 $$c=2.$$

所以 $$f(x)=\begin{cases}x^2+4x+2, & x\leqslant 0,\\ 2, & x>0.\end{cases}$$

(2)记方程①:$2=x+a(x>0)$,

方程②:$x^2+4x+2=x+a(x\leqslant 0)$.

分别研究方程①和方程②的根的情况:

(i)方程①有且仅有一个实数根$\Rightarrow a<2$;方程①没有实数根$\Rightarrow a\geqslant 2$.

(ii)方程②有且仅有两个不同的实数根,即方程 $x^2+3x+2-a=0$ 有两个不同的非正实数根,所以

$$2-a\geqslant 0,且\ \Delta=9-4(2-a)>0,$$

解得
$$-\frac{1}{4}<a\leqslant 2.$$

方程②有且仅有一个实数根，即方程 $x^2+3x+2-a=0$ 有一个非正实数根，所以 $2-a<0$ 且 $\Delta>0$，或 $\Delta=0$，即 $a>2$ 或 $a=-\frac{1}{4}$.

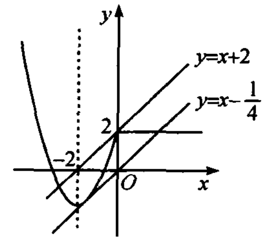

图 1-4

综上可知，当方程 $f(x)=x+a(a\in\mathbf{R})$ 有三个不同的实数根时，$-\frac{1}{4}<a<2$；

当方程 $f(x)=x+a(a\in\mathbf{R})$ 有且仅有两个不同的实数根时，$a=-\frac{1}{4}$ 或 $a=2$. 所以符合题意的 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{4},2\right]$.

【例 1.14】 已知函数 $f(x)=-2x^2+7x-2$，定义域为 $[m,n](m>0)$，值域为 $\left[\frac{3}{n},\frac{3}{m}\right]$，求 m、n 的值.

【解】 易知定义域 $[m,n]$ 与值域 $\left[\frac{3}{n},\frac{3}{m}\right]$ 之间的对应关系为非线性关系，因 $f(m)$、$f(n)$ 中至少有一个为最值 $\frac{3}{n}$ 或 $\frac{3}{m}$，依此构造方程 $f(x)=\frac{3}{x}$，根为 $x_1=1$，$x_2=3$，则定义域 $[m,n]$ 必有一个端点为方程的根 1 或 3. 因为 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\frac{7}{4}$ 及 $f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{33}{8}$，可知 $f(1)=f\left(\frac{5}{2}\right)=3$，$f(3)=f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 当 $x\in[1,3]$ 时，$f(x)$ 的对称轴 $x=\frac{7}{4}\in[1,3]$，此时 $f(x)$ 的值域为 $\left[1,\frac{33}{8}\right]$，不符合当定义域为 $[m,n]$ 时，值域为 $\left[\frac{3}{n},\frac{3}{m}\right]$ 这种对应关系，但定义域区间的右端点 3 符合条件，所以定义域区间的右端点必为 3，调整区间左端点 1 至 $\frac{11}{8}$，当 $x\in\left[\frac{11}{8},3\right]$ 时，$f(x)$ 的对称轴 $x=\frac{7}{4}\in\left[\frac{11}{8},3\right]$，此时 $f(x)$ 的值域仍为 $\left[1,\frac{33}{8}\right]$，符合定义域与值域之间的对应关系，故 $m=\frac{11}{8}$，$n=3$.

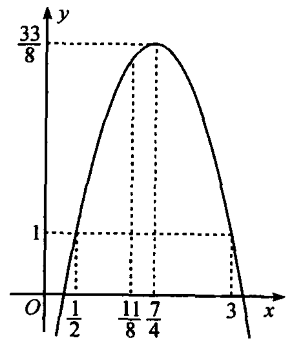

图 1-5

【例 1.15】 已知 a 为常数，在实数范围内恰好有 6 个不同的实数是关于 x 的方程 $||x^2-2x-3|+4a|=a^2$ 的解，求 a 的取值范围.

【解】 令 $y_1=|x^2-2x-3|$，$y_2=|y_1+4a|$，$y_3=a^2$. 显然 $a=0$ 不符合题意. 函数 $y_1=|x^2-2x-3|$ 的图象如图 1-6.

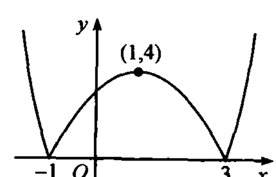

图 1-6

(1) 当 $a>0$ 时，$y_2=|y_1+4a|$（其图象记为曲线 L，下同）与 $y_3=a^2$（其图象记为直线 l，下同）的图象如图 1-7. 显然，曲线 L 与直线 l

最多有 4 个不同的交点，说明原方程最多有 4 个不同的实数解.

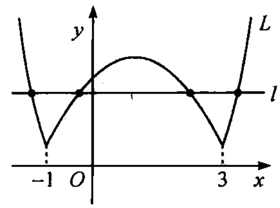

图 1-7

(2)当$-\frac{1}{2}<a<0$时，$4+4a>-4a>0$. $y_2=|y_1+4a|$的图象如图 1-8. 其中，$A(1,4+4a)$、$B(-1,-4a)$、$C(3,-4a)$.

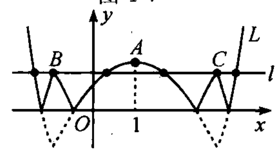

图 1-8

当直线 l 经过 B、C 两点时，曲线 L 与直线 l 有 6 个不同的交点. 于是，$a^2=-4a$.

解得 $a=0$ 或 -4，与假设$-\frac{1}{2}<a<0$矛盾.

(3)当$-1\leqslant a\leqslant-\frac{1}{2}$时，$-4a\geqslant4+4a\geqslant0$.

曲线 L、直线 l 的图象如图 1-9. 它们有 6 个不同的交点.

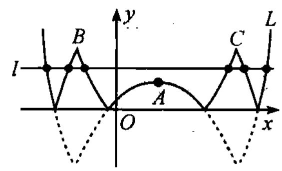

图 1-9

则$-4a>a^2>4+4a$.

解得$\begin{cases}-4<a<0,\\ a<2-2\sqrt{2}\text{或 }a>2+2\sqrt{2}.\end{cases}$

所以，$-1\leqslant a<2-2\sqrt{2}$.

(4)当$a<-1$时，$-4a>0>4+4a$，$-4a>-4-4a$.

曲线 L、直线 l 的图象如图 1-10. 其中，$A(1,-4-4a)$、$B(-1,-4a)$、$C(3,-4a)$.

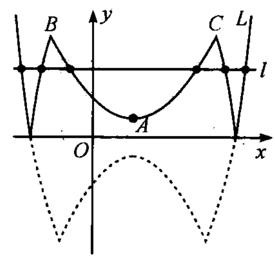

图 1-10

它们有 6 个不同的交点. 则$-4a>a^2>-4-4a$.

解得$-4<a<0$ 且 $a\neq-2$.

所以，$-4<a<-1$ 且 $a\neq-2$.

综上所述，a 的取值范围是$-4<a<2-2\sqrt{2}$且 $a\neq-2$.

佳题赏析 JIA TI SHANG XI

【例 1.16】 求函数 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$的值域.

【分析】 分子分母次数相同，可先变形，再对分母用配方法求值域；对二次型分式也可先变形为关于 x 的一元二次式再用判别式法求值域.

【解法 1】 因为 $y=1-\frac{1}{x^2-x+1}$，而 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geqslant\frac{3}{4}$，

所以 $0<\frac{1}{x^2-x+1}\leqslant\frac{4}{3}$，所以$-\frac{1}{3}\leqslant y<1$. 故函数的值域为$\left[-\frac{1}{3},1\right)$.

【解法 2】 由 $y=\frac{x^2-x}{x^2-x+1}$，得$(y-1)x^2+(1-y)x+y=0$. 显然 $y\neq1$，又因为 $x\in\mathbf{R}$，必有 $\Delta=(1-y)^2-4y(y-1)\geqslant0$，解之得$-\frac{1}{3}\leqslant y\leqslant1$. 又 $y\neq1$，故函数的值域为$\left[-\frac{1}{3},1\right)$.

【评析】 用判别式求函数值域时，要注意二次项前面的系数不为零时，才考虑判别式 $\Delta\geqslant 0$，如果系数为零，应单独讨论.

【变式引申】 已知函数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$ 的值域是 $[-1,4]$，求实数 a,b 的值.

【解】 由 $y=\dfrac{ax+b}{x^2+1}$，得

$$yx^2-ax+y-b=0 \qquad ①$$

因为当 $y\neq 0$ 时，$x\in\mathbf{R}$，所以方程①有实根，

故 $\Delta=a^2-4y(y-b)\geqslant 0$，即 $4y^2-4by-a^2\leqslant 0$. 又因为 $-1\leqslant y\leqslant 4$，

所以 $\begin{cases}-1+4=b,\\ (-1)\times 4=\dfrac{a^2}{4},\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=4,\\ b=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-4,\\ b=3.\end{cases}$

当 $y=0$ 时，对上述 a,b，$x=\pm\dfrac{3}{4}$，由于 $0\in[-1,4]$，满足题意.

所以 $a=4,b=3$，或 $a=-4,b=3$.

能力训练1 NENG LI XUN LIAN 1

1. 如图 1-11，函数 $y=f(x)$ 的图象是折线段 ABC（包括端点），其中 A,B,C 的坐标分别为 $(0,4),(2,0),(6,4)$，则 $f[f(1)]=($ $)$.

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6

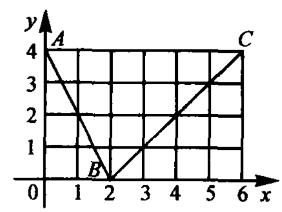

图 1-11

2. $y=f(x)$ 的图象如图 1-12 所示，若 $-3\leqslant x\leqslant 6$，则使得 $f(x)=2$ 成立的 x 的值的个数为（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

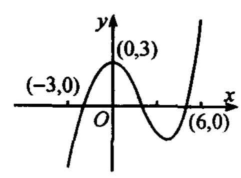

图 1-12

3.（2011 年浙江省高考理科试题）设函数 $f(x)=\begin{cases}-x, x\leqslant 0\\ x^2, x>0\end{cases}$，若 $f(a)=4$，则实数 $a=($ $)$.

(A) -4 或 -2 (B) -4 或 2

(C) -2 或 4 (D) -2 或 2

4.（2011 年福建省高考理科试题改编）对于函数 $f(x)=ax^3+bx+c(a,b\in\mathbf{R},c\in\mathbf{Z})$，选取 a,b,c 的一组值计算 $f(1)$ 和 $f(-1)$，所得出的正确结果一定不可能是（ ）.

(A) 4 和 6 (B) 3 和 1 (C) 2 和 4 (D) 1 和 2

5.（2010 年北京市高一数学竞赛初赛试题）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且满足 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x}f(-x)=4x$. 则 $f(2)f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 的值等于（ ）.

(A) 31.5 (B) 30.5 (C) -30.5 (D) -31.5

6.(2008年浙江省高中数学竞赛试题)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有定义,要使函数 $f(x-a)+f(x+a)$ 有定义,则 a 的取值范围为(　　).

(A) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$　　(B) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(C) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　(D) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

7.(2007年浙江省高考理科第10题)设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|\geqslant 1\\ x, & |x|<1\end{cases}$,$g(x)$ 是二次函数,若 $f[g(x)]$ 的值域是 $[0,+\infty)$,则 $g(x)$ 的值域是(　　).

(A) $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$　　(B) $(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$

(C) $[0,+\infty)$　　(D) $[1,+\infty)$

8.定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$,它具有下述性质:

①对任何 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x^3)=f^3(x)$;

②对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,$x_1\neq x_2$,都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

则 $f(0)+f(1)+f(-1)$ 的值是(　　)

(A)0　　(B)1　　(C) -1　　(D)不确定的

9.a 是一个常数,函数 $f(x)=\frac{x^4+ax^2+1}{x^4+x^2+1}$ 的值域不可能是(　　).

(A) $\{1\}$　　(B) $\left[\frac{1}{3}(a+2),1\right)$　　(C) $\left(1,\frac{1}{3}(a+2)\right]$　　(D) $\left[2-a,\frac{1}{3}(a+2)\right]$

10.若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数,且方程 $x-f[g(x)]=0$ 有实数解,则 $g[f(x)]$ 不可能是(　　).

(A) $x^2+x-\frac{1}{5}$　　(B) $x^2+x+\frac{1}{5}$　　(C) $x^2-\frac{1}{5}$　　(D) $x^2+\frac{1}{5}$

11.已知函数 $f(x)$,$g(x)$ 分别由下表给出.

x	1	2	3
$f(x)$	1	3	1

x	1	2	3
$g(x)$	3	2	1

则 $f[g(1)]$ 的值为________.

12.(2009年福建省高一数学竞赛试题)设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$,则方程 $x^2f(x-1)=-4$ 的解为________________.

13.(2011年江苏省高考试题)已知实数 $a\neq 0$,函数 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x<1\\ -x-2a, & x\geqslant 1\end{cases}$,若 $f(1-a)=f(1+a)$,则 a 的值为________.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com