高等学校微积分教学系列丛书

微积分典型问题分析

主　编　于新凯　程俊明　闫广霞
副主编　李秀军　尹成立　刘丽娜
主　审　侯家玺

天津科学技术出版社

高等学校微积分教学系列丛书

微积分典型问题分析

主　编　于新凯　程俊明　闫广霞
副主编　李秀军　尹成立　刘丽娜
主　审　侯家玺

天津科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分典型问题分析/于新凯,程俊明,闫广霞主编 .—天津:天津科学技术出版社,2005

(高等学校微积分教学系列丛书)

ISBN 7-5308-3717-6

Ⅰ.微... Ⅱ.①于...②程...③闫... Ⅲ.微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 050044 号

责任编辑:吉 静

版式设计:雒桂芬

责任印制:张军利

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051 电话(022)23332393(发行部) 23332390(市场部) 27217980(邮购部)

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

天津市海龙印刷有限公司印刷

开本 787×960 1/16 印张 19 字数 411 000

2005 年 8 月第 1 版第 2 次印刷

定价:25.00 元

前　言

微积分课程具有高度的抽象性、严密的逻辑性以及广泛的应用性。学好该课程对后续课程的学习是至关重要的，同时对提高学生的综合素质及今后的发展都有深远的影响。

要学好微积分课程，除了加强基本知识的学习外，离不开例题和习题。因为微积分的基本原理和基本方法必须在反复的演练及总结中才能逐步加深理解直至完全掌握，从而进一步提高分析问题和解决问题的能力。另一方面，伴随着社会和科学的发展，人们越来越重视该课程在培养科学的思维方式等方面的作用。基于以上考虑，我们根据长期的教学实践，参照全国工科数学教学指导委员会的指导意见和现行教学大纲，参考了大量的相关资料，编写了《微积分典型问题分析》。

本书与同济大学的面向21世纪课程教材——《微积分》相配合，共安排23讲。每讲含主要内容、教学要求、思考问题、典型题分析、练习题及练习题解答等六部分。“主要内容”是各讲涉及的相关内容；“教学要求”的主要依据是全国工科数学教学指导委员会的指导意见和现行教学大纲；“思考问题”是与各讲内容相关的典型疑难问题，理解这些问题有助于加强对基本知识的掌握和理解；“典型题分析”精选了具有代表性的题目，通过剖析、解答，归纳解题思路与技巧，培养学生分析问题和解决问题的能力；“练习题”的选取既注重培养学生的基本解题技巧，又注意培养综合运用能力。

本书具有相对独立性，除可作为微积分初学者的指导参考书外，还可以作为自学者及报考工科硕士研究生的复习参考书。

参加本书编写工作的有：闫广霞（第一章、第二章第一、二讲），李秀军（第二章第三、四讲），卢玉文（第三章第一、二讲），刘淑平（第三章第三讲、第九章第一讲），金少华（第四章），王艳（第五章），方耀（第六章），于新凯（第七章），王志京（第八章第一、二讲），刘丽娜（第八章第三讲），程俊明（第九章第二、三讲）。编写工作由于新凯主持、统稿，程

俊明、闫广霞、李秀军、尹成立、刘丽娜参与了统稿工作，侯家玺教授担任主审。

在编写过程中，米洪海同志为本书的出版从策划到定稿做了大量的工作；周进、潘晓春、李翠环、谭春晓、马俊霞等同志为本书提供了部分习题并提出了许多有益的建议。本书的出版还得到了河北工业大学理学院院长刘国欣教授、教务处处长闫殿然教授、丁会利教授的大力支持；天津科学技术出版社的吉静等同志也为本书的出版付出大量心血，在此一并表示感谢。

书中难免有不妥与疏漏之处，恳请读者批评指正。

编著者

2004年6月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　极限与连续

第一讲　函数、极限及其运算

一、主要内容

映射、函数的基本概念，数列、函数极限的定义和性质，无穷小与无穷大，极限的运算法则.

二、教学要求

1. 函数.

(1) 理解函数概念，熟悉函数符号 $f(x)$ 的意义和用法.

(2) 正确表述函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性.

(3) 了解反函数、复合函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质和图形.

(5) 熟悉分段函数.

2. 了解极限的"$\varepsilon—N$"、"$\varepsilon—\delta$"定义，并能按定义证明简单的数列或函数极限.

3. 了解函数极限与数列极限的性质，并会运用收敛数列的归并性或函数极限的归并性判定数列或函数极限是否存在.

4. 理解无穷小、无穷大的概念，掌握无穷小的性质.

5. 掌握极限的运算法则.

三、思考问题

1. 在数列中去掉、添上或改变有限项，会不会改变数列的收敛性?

答　不会.

证　我们只需证明"在数列的前面部分去掉、添上或改变有限项，不会改变数列的收敛性". 因为其他情形(即在数列中任意去掉、添上或改变有限项的情形)都可以看成在数列的前面部分先去掉有限项后，再添上有限项的结果.

设将数列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}, \cdots \tag{1}$$

的前 k 项去掉，则得数列

$$x_{k+1}, \cdots, x_{k+m}, \cdots \tag{2}$$

式(2) 实际上就是式(1) 的一个子数列，因此，由式(1) 收敛可推出式(2) 也收敛. 反之，若式(2) 收敛于 a，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在自然数 M，当 $m>M$ 时有 $|x_{k+m}-a|<\varepsilon$.

取 $N=k+M$，则在式(1) 中，当 $n>N$ 时，

$$|x_n-a|<\varepsilon.$$

事实上，对 n，一定存在自然数 m，使 $n=k+m$，由于 $n>N$，即 $k+m>k+M$，从而 $m>M$，于是，有

$$|x_{k+m}-a|<\varepsilon.$$

即 $|x_n-a|<\varepsilon$.

故(1) 也收敛于 a.

因此，我们得到式(1) 与式(2) 有相同的收敛性.

2. 怎样表述数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界？如何证明数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界？

答 数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界的表述是：对任意给定 $M>0$，总存在 n_0，使

$$|x_{n_0}|>M.$$

证明数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界的常用方法是找出它的一个无穷大子列 $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$. 我们有下述定理：

定理 数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界的充分必要条件是存在无穷大子列.

证 条件的充分性是显然的，下面证明条件的必要性.

设数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界，则对任给 $M>0$，存在正整数 n_0 使 $|x_{n_0}|>M$，取 $M_1=2$，有 n_1，使 $|x_{n_1}|>M_1$；取 $M_2=2^2$，因数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 去掉前 n_1 项后留下的数列仍然无界，故有 $n_2>n_1$，使 $|x_{n_2}|>M_2$.

如此继续，即得子数列 $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$，且有

$$|x_{n_k}|>M_k=2^k\to+\infty \quad (k\to\infty),$$

即子数列 $\left(x_{n_k}\right)_{k=1}^{\infty}$ 为无穷大.

例 证明数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}=\left(n+(-1)^n n\right)_{n=1}^{\infty}$ 无界.

证 因 $x_{2k}=4k$，而当 $k\to\infty$ 时，$x_{2k}\to\infty$，故 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 无界.

3. 下列条件是否分别为极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件？

(1) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<k\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<l\varepsilon$(其中 k、l 为任意确定的正数).

(2) 任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|\leqslant\delta$ 时，有 $|f(x)-A|\leqslant\varepsilon$.

答 条件(1)和条件(2)分别是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件，从而分别为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的等价定义. 这是因为

对条件(1)，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则任给$\varepsilon>0$，对$l\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<l\varepsilon$. 取$\delta_1=\frac{1}{k}\delta$，则当$0<|x-x_0|<k\delta_1$时，有$|f(x)-A|<l\varepsilon$，从而条件(1)成立.

反之，若条件(1)成立，则任给$\varepsilon>0$，对$\frac{\varepsilon}{l}>0$，存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<k\delta$时，有$|f(x)-A|<l\cdot\frac{\varepsilon}{l}$. 取$\delta_1=k\delta$，则当$0<|x-x_0|<\delta_1$时，有$|f(x)-A|<l\cdot\frac{\varepsilon}{l}=\varepsilon$，于是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

对条件(2)，请读者自行证明.

4. 在函数极限的归并性中，我们知道，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，且$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

若去掉条件$x_n\neq x_0$，结论是否仍成立？

答　不一定成立.

如设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & x\neq 1\\ 1. & x=1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2.$$

取$x_n=1(n=1,2,\cdots)$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$，但

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}f(1)=f(1)=1\neq 2.$$

四、例题分析

例 1　设$f(x+1)=\sin(x^2+2x)-2x$，求$f(x-1)$.

解　为了求$f(x-1)$，先求$f(x)$，我们给出求$f(x)$的两种方法.

方法一　$f(x+1)=\sin[(x+1)^2-1]-2(x+1)+2$，

所以，　$f(x)=\sin(x^2-1)-2x+2.$

方法二　令$x=t-1$，则

$$\begin{aligned}f(t)&=\sin[(t-1)^2+2(t-1)]-2(t-1)\\&=\sin(t^2-1)-2t+2.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}f(x-1)&=\sin[(x-1)^2-1]-2(x-1)+2\\&=\sin(x^2-2x)-2x+4.\end{aligned}$$

例 2　设

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases},\psi(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1\\ 2, & |x|>1\end{cases},$$

求：(1)$\varphi[\varphi(x)]$；

(2)$\varphi[\psi(x)]$.

解 (1)因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. 从而 $|\varphi(x)|\leqslant 1$，于是

$$\varphi[\varphi(x)]\equiv 1,x\in(-\infty,+\infty)$$

(2) 因为 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |\psi(x)|\leqslant 1\\ 0, & |\psi(x)|>1\end{cases}$，

而 $|x|=1$ 时，$\psi(x)=1$，$|x|\neq 1$ 时，$1<\psi(x)\leqslant 2$，

故 $\varphi[\psi(x)]=\begin{cases}1, & |x|=1\\ 0, & |x|\neq 1\end{cases}$，其定义域是$(-\infty,+\infty)$.

例 3 用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}=\dfrac{2}{3}$.

证 因

$$\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2}{3}\right|=\frac{8n-3}{3(3n^2+4n)}<\frac{8n}{3(3n^2+4n)}$$
$$=\frac{8}{3(3n+4)}<\frac{8}{9n}<\frac{1}{n}.$$

对 $\forall\ \varepsilon>0$，欲使 $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 即可. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\dfrac{2}{3}\right|<\varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+1}{3n^2+4n}=\dfrac{2}{3}$.

例 4 已知数列$(x_n)_{n=1}^{\infty}$和$(y_n)_{n=1}^{\infty}$满足 $x_n\leqslant a\leqslant y_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

证 对 $\forall\ \varepsilon>0$，因 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$，则 $\exists$ 正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|y_n-x_n|<\varepsilon$. 由于

$$|x_n-a|=a-x_n\leqslant y_n-x_n=|y_n-x_n|$$
$$|y_n-a|=y_n-a\leqslant y_n-x_n=|y_n-x_n|$$

进而，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$，$|y_n-a|<\varepsilon$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

例 5 用极限的"ε—δ"定义证明 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1$.

证 由定义，只要证明对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，不等式

$$\left|\frac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|=\left|\frac{x^2}{x+2}-1\right|=\left|\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\right|<\varepsilon$$

成立，因研究的是 $x\to 2$ 时函数的极限，我们不妨限定在 $x=2$ 的去心邻域 $\mathring{U}(2,$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

1) 内考虑，即 $0<|x-2|<1$，在此条件下

$$|x+1|=|(x-2)+3|\leqslant|x-2|+3<4$$

$$|x+2|=|(x-2)+4|\geqslant 4-|x-2|>3$$

因而，当 $0<|x-2|<1$ 时，有

$$\left|\frac{(x-2)(x+1)}{x+2}\right|<\frac{4}{3}|x-2|.$$

要使 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\dfrac{4}{3}|x-2|<\varepsilon$，即 $|x-2|<\dfrac{3}{4}\varepsilon$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{3}{4}\varepsilon\right\}$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，有 $\left|\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}-1\right|<\varepsilon$ 成立.

故 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}=1.$

例 6　证明 $f(x)=x\cos x$，当 $x\to+\infty$ 时，既无极限，也非无穷大.

证　取 $x_n=2n\pi$，当 $n\to+\infty$ 时，$x_n\to+\infty$，而 $f(x_n)\to+\infty$，又取 $x'_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $n\to+\infty$ 时，$x'_n\to+\infty$，但 $f(x'_n)\to 0$. 因此，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$ 既无极限，也非无穷大.

注　该方法基于如下结论：

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$(或 ∞) 的充分必要条件是对任意的 $x_n\to\infty(n\to\infty)$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$(或 ∞).

例 7　设 $(x_{p_k})_{k=1}^{\infty}$、$(x_{q_k})_{k=1}^{\infty}$ 是数列 $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ 的两个子数列，且满足：

(1) $\{p_k\}\cup\{q_k\}=N^*$；

(2) $\lim\limits_{k\to\infty}x_{p_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{q_k}=a.$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

证　由(2)，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K_1>0$，当 $k>K_1$ 时，有 $\left|x_{p_k}-a\right|<\varepsilon$；$\exists K_2>0$，当 $k>K_2$ 时，有 $\left|x_{q_k}-a\right|<\varepsilon.$

取　$N=\max\{p_{K_1},q_{K_2}\}$，当 $n>N$ 时，若 $n\in\{p_k\}$，则有某个 $p_k=n>N\geqslant p_{K_1}$，于是 $k>K_1$，因此有 $|x_n-a|=\left|x_{p_k}-a\right|<\varepsilon.$

若 $n\notin\{p_k\}$，则 $n\in\{q_k\}$，即有某个 $q_k=n>N\geqslant q_{K_2}$，于是 $k>K_2$，因此有 $|x_n-a|=\left|x_{q_k}-a\right|<\varepsilon.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a.$

注　在讨论有关数列极限的问题中，通常取 $\{p_k\}=\{2k-1\mid k=1,2,\cdots\}$，$\{q_k\}=\{2k\mid k=1,2,\cdots\}$.

例 8　求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+2)(\sqrt{n^2+1}-n).$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{\sqrt{n^2+1}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$.

例 9　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2^2-1}+\dfrac{1}{3^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2-1}\right)$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{2-1}-\dfrac{1}{2+1}\right)+\left(\dfrac{1}{3-1}-\dfrac{1}{3+1}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{4}$.

例 10　设 $x_n=1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　因为 $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，所以，

$\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1})$. 因此，

$x_n=1+2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=2-\dfrac{2}{n+1}$.

故　　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

例 11　若 $|x|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}$.

例 12　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2+x^4)}{\ln(1+x^5)}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x^4(\dfrac{2}{x^4}+1)}{\ln x^5(\dfrac{1}{x^5}+1)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4\ln x+\ln(\dfrac{2}{x^4}+1)}{5\ln x+\ln(\dfrac{1}{x^5}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+(\ln x)^{-1}\ln(\dfrac{2}{x^4}+1)}{5+(\ln x)^{-1}\ln(\dfrac{1}{x^5}+1)}=\dfrac{4}{5}$.

注　该题的下述做法是错误的：

原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(2+x^4)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+x^5)}=\dfrac{+\infty}{+\infty}=1$.

例 13　讨论 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

分析　$\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x+1}$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\sqrt{x}$ 都不存在，不能断定原极限也不存在，也不能运用极限的运算法则，可考虑用其他适用的法则.(为什么?)

解　原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

因 $\left|\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$.

所以，由有界函数与无穷小之积为无穷小，得原式 $=0$.

例 14　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{2x^2-3x^5}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$.

解　(1)原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^5+5x^4+10x^3+10x^2}{2x^2-3x^5}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+5x^2+10x+10}{2-3x^3}=5.$$

(2) 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4+\frac{1}{x})^{10}(3-\frac{1}{x})^{20}}{(4-\frac{3}{x})^{30}}=\dfrac{4^{10}\times3^{20}}{4^{30}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{20}$.

例 15　讨论 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

分析　注意到 $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

因此，要分别讨论 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

解　因 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=-1$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

所以　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ 不存在.

例 16　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{x}{|x|}\right]$.

解　因为 $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=2$, $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{x}{|x|}=-1$，所以

$$\lim_{x\to -0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right]=1.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{2}{x}}+1}=0$，$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{x}{|x|}=1$. 所以

$$\lim_{x\to +0}\left[\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right]=1.$$

即原式 $=1$.

例 17 设 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-ax-b\right]=0$，求 a 与 b 的值.

解 原极限 $=\lim\limits_{x\to +\infty}x\left[\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0$.

于是 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}-a-\dfrac{b}{x}\right]=0$.

由此得 $a=1$. 于是 $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-x-b\right]=0$.

所以 $b=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}-x\right]$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{1+2x^2}{\sqrt[3]{(1+2x^2+x^3)^2}+x\sqrt[3]{1+2x^2+x^3}+x^2}=\frac{2}{3}.$$

注 若 $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)-ax-b]=0$ 或 $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)-ax-b]=0$，则称直线 $y=ax+b$ 为函数 $f(x)$ 图形的一条斜渐近线. 可用解本题的方法求函数图形的斜渐近线.

五、练习题

1. 设 $f(x)$ 单调减，$f(x)<g(x)$ 且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 可以相互复合及自己复合，证明 $f[g(x)]<g[f(x)]$.

2. 设对任何 $x\in(-\infty,+\infty)$，存在常数 $C\neq 0$，使 $f(x+C)=-f(x)$，试讨论 $f(x)$ 的周期性.

3. 用"ε—N"定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-6n}{3+2n}=-3$.

4. 用"ε—X"定义证明 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{x+2}\sin^2 x=0$.

5. 设 $x_n=\dfrac{1}{2n+1}\left[n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}+2\right]$，讨论 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)\right]$.

7. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(3x^2+1)-\ln(x^2+3)]$.

8. 设 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n}\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^4+x^3}{e^{nx}+x^2}$，求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

10. 设 $f(x)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$，求 $f(x)$ 在 $x_0=\frac{1}{n}(n\in\mathbf{N},n>1)$ 点的左、右极限，并说明 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}}f(x)$ 是否存在.

11. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq 0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 不存在.

(1) 证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在；

(2) 若 $A=0$，结论怎样？

12. 试确定常数 a 和 b 使下式成立：

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0.$$

六、练习题解答

1. **证**　因 $f(x)$ 单调减，$f(x)<g(x)$，所以 $f[g(x)]<f[f(x)]$.

又由 $f(x)<g(x)$ 知 $f[f(x)]<g[f(x)]$，故 $f[g(x)]<g[f(x)]$.

2. **解**　由题设，对 $\forall\, x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+2C)=f[(x+C)+C]=-f(x+C)=f(x).$$

故 $f(x)$ 是周期为 $2C$ 的周期函数.

3. **证**　$\left|\frac{1-6n}{3+2n}+3\right|=\left|\frac{10}{3+2n}\right|<\frac{5}{n}.$

对 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{5}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\frac{1-6n}{3+2n}+3\right|<\varepsilon$ 成立.

故　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-6n}{3+2n}=-3.$

4. **证**　因讨论 $x\to+\infty$ 的情形，所以我们限定 $x>0$.

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{x+2}\sin^2x\right|\leqslant\frac{\sqrt{x}}{x+2}=\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}}<\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

对 $\forall\,\varepsilon>0$，取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$. 从而有 $\left|\frac{\sqrt{x}}{x+2}\sin^2x\right|<\varepsilon$ 成立.

故　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{x+2}\sin^2x=0.$

5. **解**　当 $n=4k$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=2k(4k-1)$ 为偶数. 则

$$\lim_{k\to\infty}x_{4k}=\lim_{k\to\infty}\frac{4k+2}{8k+1}=\frac{1}{2}.$$

当 $n=4k+2$ 时，$\frac{n(n-1)}{2}=(2k+1)(4k+1)$ 为奇数. 则

$$\lim_{k\to\infty}x_{4k+2}=\lim_{k\to\infty}\frac{-4k}{8k+5}=-\frac{1}{2}.$$

由于子数列 $(x_{4k})_{k=1}^{\infty}$，$(x_{4k+2})_{k=1}^{\infty}$ 有不同的极限，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 没有极限.

6. **解**　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+5-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+4n+5}+(n-1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+(n-1)}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+(1-\frac{1}{n})} = 3.$$

7.**解** 原式$= \lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x^2+1}{x^2+3} = \lim_{x\to\infty}\ln\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}} = \ln 3.$

8.**解** $x_{n+1} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot x_n^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot x_{n-1}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdots 2^{\frac{1}{2^n}}.$

故 $\lim_{n\to\infty}x_n = \lim_{n\to\infty}x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}2^{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n})} = \lim_{n\to\infty}2^{(1-\frac{1}{2^n})} = 2.$

9.**解** 当 $x<0$ 时,$f(x)=2x^2+x$;

当 $x=0$ 时,$f(x)=0$;

当 $x>0$ 时,$f(x)=0$.

即
$$f(x)=\begin{cases}2x^2+x, & x<0\\ 0, & x\geqslant 0\end{cases}.$$

由于 $\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(2x^2+x)=0$,$\lim_{x\to +0}f(x)=0$.故

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$.

10.**解** 由于讨论 $x_0=\frac{1}{n}$ 处的左、右极限,故只考虑 x_0 附近的 $f(x)$.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-n, & \frac{1}{n+1}<x\leqslant\frac{1}{n}\\ \frac{1}{x}-(n-1) & \frac{1}{n}<x\leqslant\frac{1}{n-1}\end{cases}$$

所以 $\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{n}-0}(\frac{1}{x}-n)=n-n=0.$

$\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{n}+0}\left[\frac{1}{x}-(n-1)\right]=n-(n-1)=1.$

故 $\lim_{x\to\frac{1}{n}}f(x)$ 不存在.

11.**证** (1)(反证)假设 $\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 存在,则由极限的四则运算法则,有

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)}{f(x)}$$

存在,与已知矛盾.故 $\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 不存在.

(2) 若 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$,$\lim_{x\to x_0}g(x)$ 不存在,则 $\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 可能存在,也可能不存在.

如 $\lim_{x\to 0}x=0$,$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在,但 $\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x}=1$ 存在.

又 $\lim_{x\to 0}x=0$,$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ 不存在,而 $\lim_{x\to 0}x\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ 不存在.

12.**解** 因为 $\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b=x^2(\sqrt[3]{x^{-6}-1}-a-bx^{-2})$,

而 $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b)=0$,$\lim_{x\to\infty}x^2=\infty$.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com