中学教师进修丛书

解析几何

（上册）

上海教育学院　编

教育科学出版社

中学教师进修丛书

解析几何

上海教育学院 编

（上）

教育科学出版社

内容简介

这是一本中学数学教师进修解析几何的用书。为了帮助教师比较深刻地理解中学教材，本书对现行教材内容作了适当的补充。全书共十一章，内容包括直角坐标系、曲线和方程、直线、圆锥曲线、坐标变换和二次曲线的研究、参数方程、极坐标、空间直角坐标系向量代数、平面、空间直线、空间的曲面和曲线。书末附有习题答案。

前　言

本书是为中学数学教师进修和自学的需要而编写的教材。

在编写过程中，我们注意了以下五点：(1) 为了帮助中学教师能比较深刻地理解中学教材，因此对中学解析几何课本里的某些内容作了适当的补充和提高。例如，直线到点的距离中用了离差的概念，并且用集合的观点渗透教材等；(2) 为了和中学教材取得一致，本书平面部分基本上采用了中学现行教材的编写系统和某些特殊的规定。例如，二元二次方程的化简中，坐标轴的旋转角 θ 也规定为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ 等；(3) 本书配备一定数量的例题和习题，供培训教学中选用，也可以作中学数学的参考资料；(4) 每章结束，附有小结，便于复习；(5) 空间部分主要介绍基本知识。

行列式和线性方程组的理论是学习解析几何的有力工具。如果学员还不具备这些必要的理论时，在教学实践中还需把这方面的必要知识作适当的介绍。本书中带有 * 号的部分内容，例如笛卡儿斜角坐标、点变换、空间的坐标变换、二次曲面的方程的化简等，只是提供的参考资料。

本书是在上海市教育局领导下编写的。参加编写的有李承福、陶逸君、艾武、赵金凤等同志。审阅教材的有凌康源、陈朝龙、姚剑初、毛关民等同志。由于时间短促和编者的水平有限，错误与缺点一定不少，我们热诚希望读者和使用本书的老师提出意见和批评，以便改正。

在编写过程中，我们得到不少区、县教师进修院校的支持，在此一并表示感谢。

上海教育学院

一九八〇年十二月二日

目 录

第一章 直角坐标系

解析几何是用代数方法来研究几何图形的，因此，就必须把数和构成几何图形的基本元素“点”连系起来，坐标系的建立解决了这个问题。

这一章里我们首先研究有向线段，并在此基础上建立坐标系，确定了数轴上的点和实数之间的对应关系与平面内的点和有序实数对之间的对应关系。继而又介绍了线段在轴上的射影概念，并用以证明两点间的距离等三个基本公式。这些都是解析几何里的基础理论与有用的基础知识。

§1.1 有向线段、直线上的坐标系

1. 有向线段

在初等几何里，直线和线段是不规定方向的，但在生产实践中，我们常常要考虑直线和线段的方向。

任何一条直线，都可以看作有两个相反的方向，如果选择其中一个方向为正向，那么相反的方向就是负向。

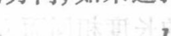

图 1-1

定义 1.1 规定了正向的直线叫做有向直线或轴。

有向直线的正向常用一个箭头来指示，如图 1-1。

在直线上任意取 P_1、P_2 两点，决定了线段 P_1P_2，有方向，如果把 P_1 作为它的起点，P_2 作为它的终点，那么点 P_1 到点 P_2 的方向就是线段 P_1P_2 的方向。

定义 1.2 规定了起点和终点的线段叫做有向线段。

我们用记号 $\overline{P_1P_2}$ 表示由点 P_1 到点 P_2 的有向线段。当有向线段的方向和它所在的有向直线的正向一致时，它的方向是正的；相反时，它的方向是负的。如图 1-2 中 $\overline{P_1P_2}$ 的方向是正的，$\overline{P_2P_1}$ 的方向是负的。

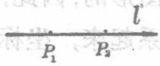

图 1-2

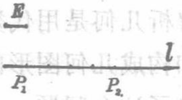

图 1-3

选定一条线段为长度单位，可以量得有向线段的长度。我们用记号 $|P_1P_2|$ 表示**有向线段的长度**，$|P_1P_2|$ 也叫做有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的**绝对值或模**。如图 1-3，E 为单位线段，$|P_1P_2|=4$，$|P_2P_1|=4$。

有向线段的长度连同表示它的方向的正负号，叫做**有向线段的数值**。我们用记号 P_1P_2 表示轴上有向线段的数值，如图 1-3 中的 $P_1P_2=|P_1P_2|=4$，$P_2P_1=-|P_2P_1|=-4$。

起点和终点重合的线段叫做**零线段**。零线段的方向不定，零线段的长度和数值为零。

在初等几何里，线段 P_1P_2 和线段 P_2P_1 表示同一条线段，它们长度相同，但 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2P_1}$ 表示不同的有向线段，它们的长度相同而方向相反。

由有向线段和有向线段数值的定义，$\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2P_1}$、P_1P_2 和 P_2P_1 之间有如下关系：

$$\overline{P_1P_2}=-\overline{P_2P_1},\quad P_1P_2=-P_2P_1。\qquad (1.1)$$

就是

$$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_1}=0,\ P_1P_2+P_2P_1=0。$$

长度相等、方向相同的两条有向线段叫做**相等的有向线段**。一条有向线段可以用和它相等的有向线段来代替。

如果 P_1、P_2、P_3 是轴上的任意三点，那么有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的终点总是有向线段 $\overline{P_2P_3}$ 的起点，因此不论这三点在轴上的顺序如何，总有以第一线段的起点为起点，以第二线段的终点为终点的第三线段 $\overline{P_1P_3}$。我们把 $\overline{P_1P_3}$ 叫做 $\overline{P_1P_2}$ 和 $\overline{P_2P_3}$ 的和，记作 $\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_3}$。

下面来证明对应的有向线段的数值之间也具有上述的关系。

定理 1.1 设 P_1、P_2、P_3 是轴上任意三点，不论它们的位置顺序如何，下面的关系式成立。

$$P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3。\quad (1.2)$$

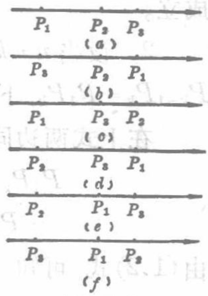

图 1-4

证明 现在先来证明三点 P_1、P_2、P_3 不重合的六种不同位置的情况都成立。

1. 点 P_2 在点 P_1 和点 P_3 之间[图 1-4(a)，(b)]，这时 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_1P_3}$ 同向，且 $|\overline{P_1P_2}|+|\overline{P_2P_3}|=|\overline{P_1P_3}|$，

$$\therefore\ P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3。$$

2. 点 P_3 在点 P_1 和点 P_2 之间[图 1-4(c)，(d)]，由 1 的证明有

$$P_1P_3+P_3P_2=P_1P_2,$$

根据(1.1)得 $$P_1P_3-P_2P_3=P_1P_2,$$

$$\therefore\ P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3。$$

3. 点 P_1 在点 P_2 和点 P_3 之间[图 1-4(e)，(f)]，这时有

$$P_2P_1+P_1P_3=P_2P_3,$$

根据(1.1)得 $$-P_1P_2+P_1P_3=P_2P_3,$$

$$\therefore\ P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3。$$

三点 P_1、P_2、P_3 中有二点重合或者三点重合的情况，上

述关系式显然成立。

上述定理叫做沙尔定理，它可以推广到轴上任意 n 个点的情况。

定理1.2 如果 P_1、P_2、P_3、…、P_n 是轴上的任意 n 个点，那么不论它们的位置顺序如何，下面的关系式成立：

$$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n=P_1P_n。\tag{1.3}$$

证明

1. 当 $n=3$ 时，由 (1.2)，$P_1P_2+P_2P_3=P_1P_3$，即 (1.3) 成立。

2. 设当 $n=k$ 时，(1.3) 式成立，即 $P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{k-1}P_k=P_1P_k$，下面要证明当 $n=k+1$ 时 (1.3) 式也成立。

在上式两边同时加上 P_kP_{k+1}，得

$$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{k-1}P_k+P_kP_{k+1}$$
$$=P_1P_k+P_kP_{k+1},$$

由 (1.2) 式，可知

$$P_1P_k+P_kP_{k+1}=P_1P_{k+1},$$

即 $$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{k-1}P_k+P_kP_{k+1}=P_1P_{k+1},$$

所以当 $n=k+1$ 时，(1.3) 式也成立。

因此，对于所有的自然数 n，(1.3) 式都成立。

2. 直线上的坐标系

在直线上，任意选定一个原点 O，一个正向和一个长度单位，就确定了直线上的一个坐标系，这条直线就叫做**坐标轴**，也叫做**数轴**，用 Ox 表示，如图 1-5。于是 Ox 轴上任意一点 P 可以用一个实数来标明它的位置：以所取长度单位量出有向线段 $\overline{OP}$ 的长度 $|x|$，因此有 $OP=x$，当 $\overline{OP}$ 的方向和 Ox 轴的正向相同时，x 是正数；相反时，x 是负数，当

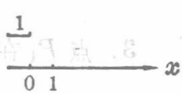

图 1-5

点 P 和原点 O 重合时，x 等于零。我们把这个与点 P 对应的实数 x 叫做 P 点的坐标，用 $P(x)$ 表示。

反过来，给定了任意一个实数 x，在 Ox 轴上有唯一的点，以这个数为坐标。

这样，直线上的所有点的集合和实数集合之间建立了一一对应关系。

建立了直线上的坐标系后，对于 Ox 轴上的任意一条有向线段的数值，可用它的终点坐标和起点坐标来表示。

定理 1.3 Ox 轴上的任意两点 $P_1(x_1)$ 和 $P_2(x_2)$ 所决定的有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的数值是：

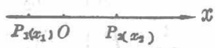

图 1-6

$$P_1P_2 = x_2 - x_1。\tag{1.4}$$

证明 如图 1-6，$OP_1 = x_1$，$OP_2 = x_2$，

根据(1.2) $\qquad P_1P_2 = P_1O + OP_2$，

根据(1.1) $\qquad P_1O = -OP_1 = -x_1$，

$$\therefore\ P_1P_2 = x_2 - x_1。$$

这就是说：坐标轴上有向线段的数值等于它的终点坐标减去起点坐标。

我们知道，两点 P_1，P_2 之间的距离就是有向线段 $\overline{P_1P_2}$ 的长度 $|P_1P_2|$。

推论 Ox 轴上任意两点 $P_1(x_1)$、$P_2(x_2)$ 之间的距离 d 是：

$$d = |x_2 - x_1|。$$

例 1 已知 Ox 轴上的点 P_1、P_2、P_3 的坐标分别为 -7、0、9，求 $\overline{P_1P_2}$、$\overline{P_2P_3}$、$\overline{P_3P_1}$ 的数值和长度。

解 根据公式(1.4)，

$$P_1P_2 = 0 - (-7) = 7,\ |P_1P_2| = 7;$$

$$P_2P_3=9-0=9,\ |P_2P_3|=9;$$
$$P_3P_1=-7-9=-16,\ |P_3P_1|=16。$$

例 2 设 P、A、B、C 是 Ox 轴上的任意四点，求证:

$$PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+AB\cdot BC\cdot CA=0。^*$$

证明 设点 P、A、B、C 的坐标分别为 0、x_1、x_2、x_3，于是

$$PA=x_1,\ PB=x_2,\ PC=x_3,$$

根据公式(1.4)，得

$$AB=x_2-x_1,\ BC=x_3-x_2,\ CA=x_1-x_3,$$

$$\begin{aligned}\therefore\ & PA^2\cdot BC+PB^2\cdot CA+PC^2\cdot AB+AB\cdot BC\cdot CA\\ &=x_1^2(x_3-x_2)+x_2^2(x_1-x_3)+x_3^2(x_2-x_1)\\ &\quad+(x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_1-x_3)\\ &=x_1^2x_3-x_1^2x_2+x_2^2x_1-x_2^2x_3+x_3^2x_2-x_3^2x_1+x_1^2x_2\\ &\quad-x_1^2x_3-x_2^2x_1+x_2^2x_3-x_3^2x_2+x_3^2x_1=0。\end{aligned}$$

§1.2 平面内的直角坐标系

在平面上选定两条互相垂直的数轴，一条叫 **x 轴**（或横轴），一条叫 **y 轴**（或纵轴）。习惯上 x 轴取水平位置，选自左向右为正向，y 轴取铅垂位置，选自下到上为正向，它们的交点 O 叫做原点，两轴上取相同的长度单位，这就确定了平面上的一个直角坐标系，用 Oxy 表示。于是平面内任意一点 P 可以用一对有序实

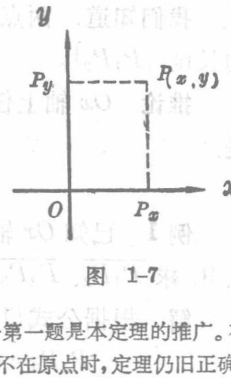

图 1-7

* 本题叫做斯蒂瓦特(Stewart)定理。习题一第一题是本定理的推广。在定理的证明中为了使运算简单取点 P 在原点。点 P 不在原点时，定理仍旧正确。

数来标明它的位置。如图 1-7，自点 P 分别引 y 轴和 x 轴的平行线 PP_x、PP_y，分别交 x 轴和 y 轴于 P_x、P_y。设点 P_x 在 x 轴上的坐标为 x，点 P_y 在 y 轴上的坐标为 y。从图 1-7 可以看出，$|x|$ 给出了点 P 到 y 轴的距离，$|y|$ 给出了点 P 到 x 轴的距离。x 和 y 的符号说明了它在 y 轴或 x 轴的哪一侧。因此平面上任一点 P 的位置便可以由唯一的有序实数对 (x, y) 来表示。我们把这两个数 x、y 叫做平面直角坐标系上点 P 的坐标，x 叫做点 P 的横坐标（简称横标），y 叫做点 P 的纵坐标（简称纵标），用 $P(x, y)$ 表示。

反过来，如果已知一对有序实数 x, y，就可以在 x 轴、y 轴上分别确定两点 P_x、P_y，通过 P_x，P_y 分别引坐标轴的平行线，这两条直线确定了唯一的交点 P。这样平面上的点的集合与全体有序实数对的集合之间建立了一一对应关系。

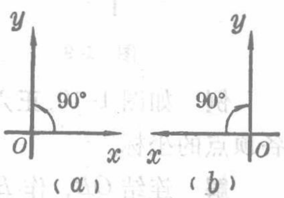

图 1-8

平面内的直角坐标系，如果 x 轴的正向绕原点 O 按逆时针方向旋转 $90°$ 而与 y 轴的正向重合，那么这样的坐标系叫做右手系[图 1-8(a)]。如果按顺时针方向旋转 $90°$ 而与 y 轴的正向重合，那么叫做左手系[图 1-8(b)]。在本书中用的都是右手系。

两坐标轴把平面划分为四个部分，每一部分叫做一个象限。根据在各象限中点的坐标的符号 $(+, +)$、$(-, +)$、$(-, -)$、$(+, -)$ 分别叫做第一、第二、第三、第四象限，如图 1-9 所示。

x 轴上点的坐标为 $(x, 0)$，y 轴上点的坐标为 $(0, y)$，原点的坐标为 $(0, 0)$。坐标轴上的点是不属于任何一个象限的。

由初等几何中点的轴对称和中心对称的概念，可以知道：

点 $P_1(x, y)$ 和点 $P_2(-x, y)$ 是关于 y 轴对称的；点 $P_1(x, y)$ 和点 $P_3(x, -y)$ 是关于 x 轴对称的；点 $P_1(x, y)$ 和点 $P_4(-x, -y)$ 是关于原点对称的。

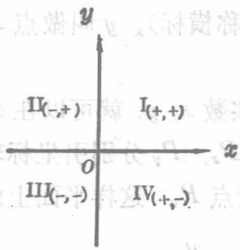

图 1-9

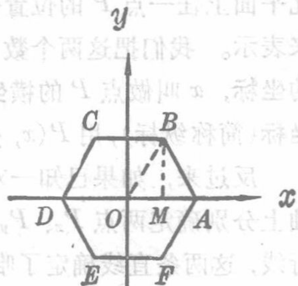

图 1-10

例 如图 1-10，正六边形的边长为 $a(a>0)$，求正六边形各顶点的坐标。

解 连结 OB，作 BM 平行 y 轴交 x 轴于 M，由正六边形的性质，可以求得

$$|OA|=a,\ |MB|=\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ |OM|=\frac{1}{2}a。$$

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(a, 0)$，点 B 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$。又根据图形的对称性，可以求得

点 C 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，点 D 的坐标为 $(-a, 0)$。

点 E 的坐标为 $\left(-\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，点 F 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}a, -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$。