经济数学基础学习指导书

冯泰 余梦涛
赵坚 张旭辉 顾静相 编

经济管理出版社

经济数学基础学习指导书

冯　泰　余梦涛　赵　坚　张旭辉　顾静相　编

经济管理出版社

责任编辑：王　炜

经济数学基础学习指导书

冯　泰　余梦涛　赵　坚　张旭辉　顾静相　编

出版：经济管理出版社
（北京市新街口六条红园胡同 8 号　邮编：100035）
发行：经济管理出版社总发行　全国各地新华书店经销
印刷：北京通县利民印刷厂

787×1092 毫米　1/32　14.625 印张　327 千字
1995 年 8 月第 1 版　1995 年 8 月北京第 1 次印刷
印数：1—20000 册

ISBN 7－80118－102－6/F·102
定价：18.00 元

修订说明

《经济数学基础学习指导书》是与《经济数学基础》（上、下册）配套的辅助性教学用书。依据1993年底调整后的教学内容和教学大纲，对《经济数学基础》进行了压缩，因此，本书也相应地作了修订：

1. 删去了原书中关于多元函数微分学和线性规划的内容；

2. 微积分和线性代数复习，按调整后的教学大纲重新编写；

3. 本书体系作了较大调整，与主教材相配合，修订后按章、单元组织；

4. 根据一年来使用的反馈情况，对原书中某些不足之处，特别是较难例题、练习等作了较多修订或更换；

5. 参加编写的有冯泰（第一章和第二章）、余梦涛（第三章和第四章）、赵坚（第五章和第六章）、张旭辉（第七章和第八章）、顾静相（第九章和微积分复习与线性代数复习），梁映森、李林曙、陈卫宏、张旭红参加了第三、四、七、八等章的修订工作。由冯泰、顾静相统稿。

最后，对电大系统的师生对本书提出的意见、建议以及对本书修订的支持，表示忠心感谢。

编者

1995年4月于北京

目录

第一章　函　　数

第一单元　函数概念及性质

§1　教学要求及基本内容

一、教学要求

1. 理解函数概念，了解函数的主要性质，尤其是函数的奇偶性。

2. 掌握求函数定义域的方法。

3. 掌握函数的几种表示方法，主要是解析表示法。

二、基本内容与说明

（一）基本概念

本章的基本概念就是函数概念。围绕这个基本概念展开以下内容：函数要素、函数符号、函数主要性质。

1. 函数

函数是两个变量之间的一种对应关系。两个相关的变量 x、y，x 在区域 D 内变化，每一个 D 内的 x，都可以确定一个 y，就称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x)$$

那么，D 就是函数 $f(x)$ 的定义域，f 表示两个变量 x、y 之间的对应规则。

2. 奇偶函数

设函数 $y = f(x)$，如果满足

$$f(-x) = -f(x)$$

称 $y = f(x)$ 是奇函数。

如果满足

$$f(-x) = f(x)$$

称 $y = f(x)$ 是偶函数。

3. 单调函数

设 $y = f(x)$ 是区间 D 上的函数，x_1、x_2 是 D 内任意两点，且 $x_1 < x_2$。如果有

$$f(x_1) < f(x_2)$$

称 $y = f(x)$ 是单调增加函数；如果有

$$f(x_1) > f(x_2)$$

称 $y = f(x)$ 是单调减少函数。

4. 有界函数

设 $y = f(x)$ 是区间 D 上的函数，如果存在正数 M，使得

$$|f(x)| \leqslant M$$

称 $y = f(x)$ 是 D 上的有界函数。

5. 周期函数

对于函数 $y = f(x)$，若存在正数 T，使得

$$f(x + T) = f(x)$$

称 $y = f(x)$ 是周期函数，T 是它的一个周期。

6. 反函数

设函数 $y = f(x)$，如果对于其值域内的每一个 y，都可以确定一个 x，则 x 是 y 的函数，记作

$$x = \varphi(y)$$

它就是原来函数 $y = f(x)$ 的反函数。习惯上记作

$$y = \varphi(x) \text{ 或 } y = f^{-1}(x)$$

(二) 基本方法

1. 函数的表示方法

(1) 解析法：显函数(含分段函数)、隐函数；

(2) 图示法；

(3) 表格法。

2. 确定函数定义域的方法

有以下常用原则：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根式内必须非负；

(3) 对数的真数必须是正数；

(4) 反正弦、反余弦函数的自变量绝对值不超过 1。即 $\arcsin\varphi(x)$ 或 $\arccos\varphi(x)$ 要求

$$|\varphi(x)| \leqslant 1$$

(5) 表达实际应用问题的函数关系的自变量的取值，由实际问题给定，当然也要满足以上条款。

3. 判别函数性质(特殊函数) 的方法

用定义或某些运算性质。

4. 反函数的求法(步骤)。

(1) 从 $y = f(x)$ 中解出 x(用 y 表示 x)，记为 $x = \varphi(y)$

(2) 调换变量记号，改记为 $y = \varphi(x)$，为所求反函数。

(三) 说明

1. 从函数的定义可知，(1) 定义域确定函数存在的范围；(2) 对应规则 f 确定因变量 y。因此，定义域和对应规则就完全确定了一个函数 $y = f(x)$，称它们为函数的两要素。

2. 教材中定义的函数是单值函数，即给定一个 x，只有一个 y，使得 $y = f(x)$。

如果一个 x，有两个以上的 y，使得 $y = f(x)$ 成立，叫多

值函数。如 $y^2 = x$，对于 $x = 4$，找到 $y = 2$ 或 $y = -2$ 都能满足 $y^2 = x$，就是多值函数一例。若只讨论 $y = \sqrt{x}$，当 $x = 4$ 时，只有 $y = 2$ 使得 $y = \sqrt{x}$ 成立，是单值函数；或 $y = -\sqrt{x}$ 也是单值函数。本书不讨论多值函数。

3. 在函数的表示方法中，解析法是表示函数的主要方法。在解析法中有显式形式 $y = f(x)$、隐式形式 $F(x,y) = 0$ 和分段形式，以显式形式为主。

函数的图示法就是函数的图形表示。它是一条曲线（也可以分成几段表示）。不少函数可以由表示式作出其曲线图形。有些函数可根据图形写出其表示式。也存在只有图形（曲线）而写不出其表示式的函数，它仍然是函数。

4. 反函数说明了自变量与因变量的相对性。

原来函数 $y = f(x)$：对给定 x，可以唯一确定 $y(= f(x))$；

反函数 $x = f^{-1}(y)$：对给定 y，可以唯一确定 $x(= f^{-1}(y))$。

由此可见，只有 x 与 y 是唯一相互确定时，才可以有反函数。具有这种性质的函数，只能是单调函数。

只有单调函数才有反函数。

原来函数与其反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称。

§2　解题示范

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $f(x) = \sqrt{x+5} - \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(2) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x - 1994)}$

(3) $h(x)=\arcsin\dfrac{x}{5}$

(4) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3}, & x\geqslant 0\\ \sqrt{x+1}, & x<0\end{cases}$

〈解题分析〉

本例是解析表达式表示的函数求定义域问题。用求定义域的几个常用原则。要注意:在第(1)小题中函数表达式是两个式子的代数和,两个式子中的 x 表示相同的数,而第(4)小题中,是分段函数,也有两个式子,它们中的 x 在不同区间上取不同的值。

解:

(1) 根式 $\sqrt{x+5}$ 要求:

$$x+5\geqslant 0$$

而分式要求:

$$x^2-1\neq 0, \text{即 } x^2\neq 1$$

它们必须同时成立,即

$$\begin{cases}x+5\geqslant 0\\ x^2\neq 1\end{cases}$$

解得 $x+5\geqslant 0$ 且 $x^2\neq 1$,取公共部分:

$$x\geqslant -5 \text{ 但 } x\neq 1 \text{ 和 } x\neq -1$$

即 $D=\{x\mid -5\leqslant x<-1$ 或 $-1<x<1$ 或 $x>1\}$

$=(-5,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

(2) 分母不能为 0,则

$$\ln(x-1994)\neq 0$$

即 $x-1994\neq 1$

对数真数为正,必须满足

$$x - 1994 > 0$$

即 $x - 1994 > 0$ 且 $x - 1994 \neq 1$

故得

$$D = \{x | 1994 < x < 1995 \text{ 或 } x > 1995\}$$
$$= (1994, 1995) \cup (1995, +\infty)$$

(3) 反正弦函数要求

$$\left|\frac{x}{5}\right| \leqslant 1 \quad \text{即 } |x| \leqslant 5$$

所以，$-5 \leqslant x \leqslant 5$ 为所求函数的定义域。

(4) 这是分段函数。

当 $x \geqslant 0$ 时，$f(x) = \dfrac{1}{x-3}$，必须满足

$$x \geqslant 0 \text{ 且 } x - 3 \neq 0$$

$f(x)$ 才有意义。得

$$x \geqslant 0 \text{ 且 } x \neq 3$$

所求当 $x \geqslant 0$ 时的定义域为 $[0,3) \cup (3, +\infty)$。

当 $x < 0$ 时，$f(x) = \sqrt{x+1}$，必须满足

$$x + 1 \geqslant 0$$

$f(x)$ 才有意义，于是有 $-1 \leqslant x < 0$。所以，$f(x)$ 的定义域为

$$D = \{x | -1 \leqslant x < 3 \text{ 或 } x > 3\}$$
$$= [-1, 3) \cup (3, +\infty)$$

说明：

(1) 求函数的定义域，基本就是解不等式或不等式组，要弄清何时用“与”，何时用“或”。

(2) 关于实际问题中的函数求定义域问题见第二单元的例 4 和例 5。

例 2　求下列函数的值：

(1) 设 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

求 $f(1),f(a),f(x+5),f[f(x)]$。

(2) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x>0 \\ x+1 & -4\leqslant x<0 \end{cases}$

求 $f(100),f(0),f(b),f(-10)$。

〈**解题分析**〉

求函数值就是给定 x 的值，按对应规划找 y 的值，如

$$y=f(x)=2x^2+1$$

那么，对应规则就是

$$f(\ )=2(\ )^2+1$$

只要把 x 所代表的数，或者文字，或者式子代人到( )中运算即可。要注意，x 所代表的数必须在定义域之内。特别是求自变量为文字时的函数值或分段函数的函数值时，应注意定义域的范围。

举本例的目的有两个：其一是弄清函数符号 $f(\ )$ 的意义；其二是会求函数的值，必要时进行讨论。

解：

(1) $\because f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

$\therefore$ 定义域：$D=\{x|x\neq-1\}$

当 $x=1$ 时

$f(1)=\dfrac{x}{x+1}\Big|_{x=1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

$f(a)$ 表示当 $x=a$ 时，$f(x)$ 的值。

显然，a 不能为 -1。

当 $a\neq-1$ 时，$f(a)=\dfrac{x}{x+1}\Big|_{x=a}=\dfrac{a}{a+1}$

那么 $\quad f(x+5)=\dfrac{x+5}{(x+5)+1}=\dfrac{x+5}{x+6}$

$(x\neq-6$ 即 $x+5\neq-1)$

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)+1}=\frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$=\frac{x}{2x+1}$$

$(2x\neq -1, x\neq -\frac{1}{2})$

(2) 这是分段函数。

当 $x=100$ 时，$x>0$，且 $f(x)=e^x$，故有

$$f(100)=e^x|_{x=100}=e^{100}$$

当 $-4<x\leqslant 0$ 时，$f(x)=x+1$，故 $x=0$ 时，有

$$f(0)=(x+1)|_{x=0}=1$$

当 $x=b$ 时，b 为文字，可取任何实数。故有 $b>0$ 时，

$$f(b)=(e^x)|_{x=b}=e^b$$

当 $-4\leqslant b<0$ 时，$f(b)=(x+1)|_{x=b}=b+1$

当 $x=-10$ 时，$f(x)$ 没有定义，故 $f(-10)$ 没有意义。

例 3　判别下列函数对是否为相同的函数：

(1) $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

(2) $f(x)=x\arcsin x$ 与

$g(x)=x(\frac{\pi}{2}-\arccos x)$

(3) $\psi(x)=x$ 与 $\varphi(x)=\sqrt{x^2}$

(4) $f(x)=3\ln x$ 与 $g(t)=\ln t^3$

〈解题分析〉

函数的决定因素是函数的定义域和对应规则，只要这两点相同，就是相同的函数，而与用什么符号表示自变量与因变

量没有关系。一般先看定义域，再看对应规则。

解：

(1)$f(x)=x+1$，其定义域是$(-\infty,+\infty)$；$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的定义域是$x\neq 1$即$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。

因为它们的定义域不同，所以$f(x)$与$g(x)$不是相同的函数。

(2)$f(x)=x\arcsin x$的定义域是$[-1,1]$；$g(x)=x(\dfrac{\pi}{2}-\arccos x)$的定义域是$[-1,1]$，它们的定义域相同；

又因$\sin x=\cos(\dfrac{\pi}{2}-x)$，它的反函数是

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x$$

所以，$f(x)$与$g(x)$表示相同的对应规则。

故$f(x)=x\arcsin x$与$g(x)=x(\dfrac{\pi}{2}-\arccos x)$是相同的函数。

(3)$\phi(x)=x$与$\varphi(x)=\sqrt{x^2}$的定义域均为$(-\infty,+\infty)$。但是，其对应规则为：

函数$\phi(x)$是当$x>0$时，$\phi(x)=x>0$，当$x<0$时，$\phi(x)=x<0$；

函数$\varphi(x)$是当$x>0$时，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}>0$，当$x<0$时，$\varphi(x)=\sqrt{x^2}=-x>0$。

可见，它们的对应规则不同。

所以$\phi(x)$与$\varphi(x)$不是相同的函数。

(4)因为x与x^3(或t与t^3)的符号是相一致的。因此，$f(x)=3\ln x$的定义域为$(0,+\infty)$。那么，$g(t)=\ln t^3$的定义域也是$(0,+\infty)$。

又在区间$(0,+\infty)$内，有

$f(x)=3\ln x=\ln x^3$ 或 $g(t)=\ln t^3=3\ln t$

因而，$f(x)$ 与 $g(t)$ 表示相同的函数。

说明：由这几个函数对看到，定义域与对应规则相同的函数，其值域必相同。不同的函数，或者定义域不同，或者对应规则不同，但是它们的函数值域也有可能相同。

例 4　判别下列函数的奇偶性：

(1)$f(x)=x\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}\ (a>0,a\neq 1)$

(2)$g(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$

(3)$\varphi(x)=x\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$

（解题分析）

判别函数的奇偶性，主要是用定义，即验证 $f(-x)=-f(x)$（奇函数）或 $f(-x)=f(x)$（偶函数）哪个成立。若两者都不满足时，则 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数。

用函数的奇偶性定义又可推出几个常用结论供选用，见本例(3)解后的说明。

解：

(1) 用定义

$\because f(x)=x\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$

$$\therefore f(-x)=(-x)\frac{a^{-x}-a^{-(-x)}}{2}$$

$$=-x\frac{a^{-x}-a^x}{2}$$

$$=x\frac{a^x-a^{-x}}{2}=f(x)$$

可见，$f(x)=x\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ 是偶函数。

(2) 用定义，$g(x)=\lg[\sqrt{x^2+1}-x]$

$\because g(-x)=\lg[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)]$

$$
\begin{aligned}
&=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)\\
&=\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}\\
&=\lg\frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}\\
&=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\\
&=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-g(x)
\end{aligned}
$$

$\therefore g(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ 是奇函数。

(3) 用定义，$\varphi(x)=x\sin(x+\frac{\pi}{4})$

$\because \varphi(-x)=-x\sin(-x+\frac{\pi}{4})$

$$=-x\sin(\frac{\pi}{4}-x)\neq-\varphi(x)$$

同理可验证

$$\varphi(-x)\neq\varphi(x)$$

$\therefore \varphi(x)=x\sin(x+\frac{\pi}{4})$ 不是奇函数，也不是偶函数。

说明：由奇、偶函数的定义，不难验证以下结论：

(1) 两个奇(偶)函数之和仍为奇(偶)函数；

(2) 两个奇(偶)函数之积是偶函数；

(3) 奇函数与偶函数之积是奇函数。

如本例第(1)小题中，不难验证

$$g(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2}$$

是奇函数，又 $\varphi(x)=x$ 也是奇函数。故 $f(x)$ 是两个奇函数 $g(x)$ 与 $\varphi(x)$ 之积，由上面结论(2)，知 $f(x)=g(x)\cdot\varphi(x)$