东南大学研究生院优秀教学用书资助项目

拓扑、测度与积分

江其保／编著

東南大學 出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

拓扑、测度与积分

江其保　编著

东南大学出版社

南　京

图书在版编目(CIP)数据

拓扑、测度与积分 / 江其保编著. — 南京:东南大学出版社,2011.9

ISBN 978-7-5641-3000-8

Ⅰ.①拓… Ⅱ.①江… Ⅲ.①拓扑—高等学校—教材②测度(数学)—高等学校—教材③积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O189②O174.12③O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 184193 号

拓扑、测度与积分

出版发行:东南大学出版社
出 版 人:江建中
社　　址:南京市四牌楼 2 号
邮　　编:210096
经　　销:全国新华书店
印　　刷:江苏兴化印刷有限公司
开　　本:700×1 000　1/16
印　　张:17
字　　数:267 千字
版　　次:2011 年 9 月第 1 版
印　　次:2011 年 9 月第 1 次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5641-3000-8
定　　价:34.00 元

前　　言

本书属于现代数学基础的入门教材，主要讲授一般测度空间上的积分理论，另有四分之一篇幅介绍集合论预备知识和最基本的点集拓扑学。从目录可以看出，本书对于测度和积分的基础理论的介绍相当全面。必须指出，测度论是一个庞大的领域，本书不可能涉及像解析集那样比较专门的内容。本书的第一章系统地介绍了所谓的朴素集合论，其中包括选择公理和基数、序数的一般理论。第二章是点集拓扑学的一个引论。我们力求简单、实用，只引入了分析中最常用的拓扑概念，但系统地介绍了应用中构造拓扑的方法。

本书来自作者开设的一门硕士学位基础课的讲稿，因此融入了许多教学上的考虑。因为本课程的内容比较抽象，所以，为了帮助学生理解和掌握抽象理论，本书特别重视讲解它们的来历、实质和用途，其中多数是作者个人的观点，不妥之处恳请读者不吝赐教。作为一学期的教材，本书的内容显得太多了一些，但根据作者的经验，60 个学时能够讲完目录中不带星号的章节（但须忽略一些次要结果的证明)。带星号的部分是作者认为重要但课堂上无暇顾及的内容。作者曾经在课堂上讲授过基数、序数、广义收敛性等内容，后来考虑再三又从教学计划中删去了。积分算子、Haar 测度和群上的卷积算子是新近添加的。它们不仅本身重要，而且能够有力地证明本书一般理论的应用价值。总之，读者若能抽空读一读本书带星号的章节，一定会有很大的收获。适当的练习是学好抽象数学的关键。本书的练习分为习题和问题两大类。在教学当中，作者要求学生完成书上所有的习题，而问题部分则留给学生自己处理。应学生的建议，本书绝大多数习题和问题都附有提示或解答。

本书的内容属于现代数学的基础，其中的每一块都有经典著作详细论述。作者决定写这本讲义主要基于两方面的考虑。一方面，由于每本书都有自己的体系安排和适用对象，作者不可能从那些经典著作中各取一些章节，强行把它们糅合在一起用作自己所承担课程的教材。另一方面，作者希望用自己的心得体会，帮助学生提高逻辑推理和抽象思维能力、尽快适应抽象数学。因此，2003 年，当作者第一次开设这门课时就已经准备了本书的初稿（电子版)。随后，本书经历了数次修改，其中有两次彻底改写。出版之前，又花了三个月的时间做

了全面修订。从材料选择、体系安排到细节处理，都曾反复斟酌。即便如此，书中肯定还有未发现的错误。尽管作者力求逻辑上简单明了，但费解之处肯定存在。这些缺憾无疑会给读者的理解带来困难，对此作者深表歉意。

考虑到我们的实际情况，本书假定学生以前没有学过点集拓扑，对 Lebesgue 积分仅有基本的了解。因为同时开设“泛函分析”课，所以本书毫无顾忌地使用了某些最基本的泛函分析术语，并且，为了避免重复，我们把 L^p 空间的基本性质编入了本书带星号部分。

本书出版得到了东南大学研究生院和数学系的大力支持。在教学过程中，选修本课程的历届学生不仅指出了书中的许多笔误，还提供了一些很好的建议（以及定理 3.2.4 的证明）。河海大学江民宪同志、东南大学章平博士、张军博士阅读了部分手稿。作者与徐君祥教授就本书内容有过很多交流，他提了不少有益的建议。本书的许多证明直接取自经典著作，作者无力加以改进（但本书第三章颇有些新意）。本书的习题和问题同样只有部分是自编的。限于本书的性质，作者未能一一指明出处。为了核实一些技术细节，如史实、术语和一些数学理论的概况，作者较多地参考了英文维基百科。在此一并致谢。

作　者

2011. 3

目 录

第一章　预备知识

§1.1　什么是现代数学

历史学家喜欢把时间划分为古代、近代和现代。对于数学学科，微积分出现之前的数学可以叫做古代数学，17–19 世纪的数学不妨称为近代数学，1900 年之后的数学就是现代数学。

古代数学大致相当于现今中小学阶段的数学，包括算术（数的概念和运算）、代数（代数式运算和代数方程式求解）、欧氏几何（初中的平面几何和高中的立体几何）、三角函数。历史上，古代数学主要是中国和古希腊两大文明的贡献。（数学史界并无此说；纯粹一家之言）我国古代数学主要着眼于解决天文历法和实际生活中出现的各种具体问题的“术”。两汉更迭时期成书、三国魏人刘徽作注的《九章算术》不仅包含了基于十进制记数系统的分数运算、比例运算、开平方和开立方运算、负数加减运算、任意实数的十进小数展开等算术内容，也包括一元二次方程和任意线性方程组求解等代数内容，还包括求各种常见图形的面积体积、勾股定理在测量中的应用等几何内容。可见，我国古代的算术实则是现在的数学。自刘徽以后，我国的数学一直在发展，至两宋、元初达到顶峰，取得的成就包括大衍求一术（即中国剩余定理）以及贾宪、刘益、秦九韶的任意次代数方程的数值解法。明清两朝中国数学不仅没有发展，而且古人的成就也没有很好地继承。总的来讲，就算术和代数这两个领域而言，我国古人取得的成就全面领先于其他文明，落后之处仅仅体现在无理数和虚数的发现、符号体系的建立以及三次、四次方程求根公式等少数方面。

历史上，最早发现无理数的是公元前 5 世纪的 Hippasus. 此人属于 Pythagoras 学派，他证明正方形（一说是正五边形）的对角线与边长之比（即 $\sqrt{2}$）不能写成整数之比。Hippasus 因为这一发现违背了本门的基本信条（即一切皆可归结为整数之比）而被同门扔进了大海。此后，由于 Eudoxus 为几何量之比建立了严密的数学理论，喜欢逻辑严密性的古希腊人干脆把算术和代数纳入到几何学的框架。

现今通用的计数符号系统有一个漫长的演化过程，最早的发明者是印度人，经阿拉伯人改良后传到了欧洲。三、四次方程求解、虚数的引入以及代数符号

化都是近代（16、17 世纪）欧洲人的贡献。有趣的是，对近代欧洲人来说，数的概念和数系的扩充似乎是个非常困难的问题。即使在 Newton 时代，依然有人不愿意把负数当成数看待。虚数的概念迟至 19 世纪才被完全接受。这里面既有数系扩充涉及的逻辑困难不容易克服的客观原因，也有囿于成见的心理因素。在面对新生事物时往往不自觉地套用以往的经验。这实际上是我们接受新事物的最大障碍。比如，Euler 曾根据 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 得出 $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-4}=\sqrt{4}$; 还有人从等式 $-1:1=1:-1$ 出发给出了如下拒绝负数的理由：因为 -1 小于 1, 小数与大数之比怎么可能等于大数与小数之比呢？

古代的三角和几何基本上是古希腊人的天下。与其他文明相比，古代希腊人属于另类。他们中的精英非常注重抽象思考和精神上的追求，热衷于建立各种理论体系。几何学就是其中之一。我们知道，其他的古代文明或多或少掌握了一些几何知识，而古希腊人却把几何变成了宏伟的数学理论。现在这个理论叫做欧氏几何，这一方面是因为它主要靠大约公元前 300 年出现的欧氏 (Euclid) 名著《几何原本》流传下来，另一方面也是为了与 19 世纪提出的其他种类的几何相区分。欧氏几何的成功源于古代希腊人对于数学采取了截然不同于其他文明的观念和态度：

(1) 数学研究的对象，比如数和图形，全部来自思维的抽象，同现实事物或实际的形象是截然不同的。比如，不管人们如何小心地使用圆规，现实中画出的圆总有些许缺陷，因而不是我们头脑中所想象的那个圆。数学中定义的对象并不一定存在。在《几何原本》中，存在性是通过几何作图来保证的。

(2) 数学的任务在于发现关于抽象数学概念的正确论断。一个论断的正确性必须用演绎推理的手段给出证明。在几何里，希腊人发明了反证法、穷竭法等论证方法。

(3) 欧氏在《几何原本》中首先列出抽象概念的定义（实际上其中多数算不上现代意义的定义，只能算是解释）、公理，然后是一个个命题及其证明。难得的是，每个命题的证明只用到了公理和前面已经证明过的命题。这种整理数学知识的公理化方法对后世影响极大。

刘徽等人的著作也有证明，只是没有刻意追求逻辑严密性和理论的系统性。不过，我国古代数学以“术”为根本，“理”始终居于次要地位，是为“术”服务

的（说明其正确性）。古希腊数学正好颠倒过来："理"是根本，应用之术居于次要地位（实际上，古希腊人鄙视应用，只是到了亚历山大时期才有所改观）。现在看来，这两个极端都不好，各自都有致命的缺陷。我国古代数学在 14 世纪走到了它的末日。科举制度的腐朽、缺乏先进的符号系统当然是其重要的原因，但是，不重视理论恐怕也是根本的原因。古希腊的数学大约在纪年开始时走进了死胡同。其原因主要是希腊人过分追求理论的严密性。Zeno 的悖论使希腊人不敢触及"有限与无限"、"离散与连续"这两对矛盾。这使得他们未能进一步推进穷竭法的思想，错过了发明微积分的机会。（刘徽的割圆术和祖暅原理也曾触及现代数学分析的核心思想）不可公度比的发现和 Eudoxus 的比例理论又使代数和数论沦落为几何学的一部分。

由于战火洗劫和宗教迫害，古希腊重视理论探索的传统大约在 6 世纪中断了。直到 16 世纪，数学的理论研究才重新在英、法等欧洲国家获得生命。这个地区古代属于蛮族，后来皈依基督教并接受了古罗马的文化，十字军东征又使他们得以接触古希腊和东方国家先进的科学文化知识，接下来的文艺复兴和宗教改革，使得他们的精神世界得以摆脱古代经典的束缚。在与古代教条作斗争的过程中，他们认识到了科学研究的价值，掌握了科学研究的方法。在数学方面，他们得以成功的原因主要有两点：一是放弃了绝对的理论严密性，把所有的注意力放在发现数学真理上；二是大量使用符号，重视代数（数学演算）的方法。刚开始，进展比较缓慢。进入 17 世纪，新的数学理论如雨后春笋般地涌现出来：

(1) Fermat 提出的一系列数论问题大大刺激了数论的发展，其中 Fermat 最后定理直到 1994 年才最终得以证明，其余的问题在 Euler 时代得到了解决。可以说 Fermat 的数论问题决定了数论一百多年的发展轨迹，直到伟大的 Gauss 发表他的数论名著（1801 年）为止。

(2) 概率论始于 Fermat 与 Pascal 就赌博问题展开的讨论。1713 年 J. Bernoulli 证明了以他名字命名的大数定律：当观测次数趋向于无穷时，一个随机事件发生的频率趋向于它发生的概率。这为"概率"这一直观概念提供了坚实的科学基础。后来，de Moivre 和 Laplace 又得到了更强的中心极限定理。

(3) Fermat 和 Descartes 各自独立地创立了解析几何。他们的工作尽管没有贡献新的几何知识，但为几何学未来的发展提供了全新的方法，同时大大拓宽了几何图形的概念。

17 世纪最重要的数学当然是微积分。要认清这一点，必须充分理解“函数”这个概念的重要性。函数是数学中少数几个最基本的概念之一，运动、图形、变换、相互依赖性等都可以用函数表示。微积分是有史以来第一个以函数为研究对象的数学分支，其应用自然非常广泛。Newton 正是因为有了这个强大的工具，才得以把 Galileo 的力学原理表示成现在我们熟知的 Newton 力学，Kepler 的行星运动三定律也因此被归结为万有引力定律。Euler, Cauchy 等人把质点力学的基本原理应用于微元，就成功地导出了流体和弹性体的基本方程。微积分应用于空间曲线和曲面就成了经典的微分几何。

18 世纪，数学家的主要工作是开采 17 世纪发现的数学宝藏。到 18 世纪 80 年代，人们终于在这一方向走到了尽头。在 1782 和 1783 这两年时间内，D. Bernoulli, D’Alembert 和 Euler 这三位伟大的数学家相继离开了人世。Lagrange 认为纯数学的黄金时代已经过去。1785 年后，他和 Monge 把注意力转到了数学以外的领域，而 Laplace 只关注天体力学和概率论。至此，纯数学前进的脚步几乎停了下来。

然而，就在 18 世纪行将结束时，伟大的 Gauss 用一系列重大的数学成果迎来了数学史上极富创造力的 19 世纪。这个世纪的数学家通过深入的思考和大量的演算，解决了古人留下的数学难题，引入了集合、矩阵、不变量、群、理想等许多新的数学对象，创立了一系列崭新的数学分支（如 Fourier 分析、集合论、复变函数论、代数曲线论、代数数论、解析数论、代数拓扑）。传统领域（如微分方程、微分几何、代数学、射影几何）也被推进到前所未有的高度。

19 世纪的数学之所以如此辉煌，关键在于观念上的变革。从 Gauss 开始，恢复数学的严密性就成了数学发展的主线。18 世纪的数学家专注于发现数学真理，不大重视逻辑证明。Gauss 属于极端的完美主义者，自然不能容忍这种缺乏严密性的数学。因此，在他 1801 年发表的数论名著中，Gauss 严格证明了一些当时已经为人所知的结论，其中包括代数基本定理和二次剩余律。19 世纪初出现的 Fourier 级数对传统的分析学基础提出了严重的挑战，人们必须为函数、极限、连续、导数、积分等基本概念建立严格的基础。现在我们所学的数学分析实际上是这场分析严格化运动的产物。1830 年左右出现的非欧几何使得人们开始关注整个数学的基础。1900 年出现的 Russell 悖论进一步使数学基础问题演变成整个数学界的大论战。这场争论一直延续到 20 世纪 30 年代。

19 世纪数学的另一个特点是天才辈出。这当中，列于首位的自然是 Gauss. 可惜此人一生只发表自己认为无可挑剔的作品，很多重要的发现只存在于日记中。有人估计，如果 Gauss 的成果能及时发表，数学的发展将被前推 50 年。Riemann, Galois 等人一篇论文开创一个崭新的领域，这同样让后人觉得匪夷所思。

1900 年之前，数学的研究对象主要是函数、级数、方程式、曲线、曲面等具体的东西；研究的问题多数是具体的，一般来自力学、物理学、天文学以及数学本身；研究的方法多数是通过具体的演算发现数学真理。那时的数学家一般都喜欢计算，其中很多都是计算高手（如 Euler, Gauss），像 Riemann, Galois 那样纯粹以思维见长的数学家并不多。进入到 20 世纪，数学变得越来越抽象了。这对现在的学生来说或许是个悲剧，但历史上数学抽象化确实是一个自然的过程。它既是数学发展的必然结果，又是数学进一步发展的前提和基础。我们来简单回顾这段历史。

经过一个漫长的过程以及许多数学家的努力，人们终于认识到，如果采用群、环、域、模等抽象概念，可以使 19 世纪的 Galois 理论、代数数论、代数几何、代数不变量理论变得简明，证明可以大为简化。于是，这些抽象概念就成了代数学的主要研究对象，而抽象代数本身则成为代数几何、代数数论的基本语言和工具。

Riemann 无疑是历史上罕见的伟大思想家，早在 1854 年他就在他著名的就职演说中制定了现代微分几何的基本研究框架：配有 Riemann 度量的 n 维流形。流形的概念起源于 Riemann 面和 Gauss 的内蕴几何，但流形的现代定义和流形上的基本构造、主要工具都是 20 世纪的数学。

Cantor 创立集合论无疑是数学抽象化的里程碑。1870 年，他证明当三角级数处处收敛到 0 时其系数必然全为 0. 不久他就发现，即使三角级数在某些点处不收敛，结论也照样成立，例外点甚至可以有无穷多个。为了得到一般的结论，势必要把全体例外点当作一个整体来研究。这一来“点集”就成了 Cantor 研究的中心概念。1872 年，Cantor 通过引入极限点、内点、导集、闭集、开集等一系列拓扑概念，给出了例外点集的如下刻画：有限次导集运算之后为空集。随后，Cantor 全心投入一般集合论的研究，先是研究了集合的可数性，后来又提出了集合的基数和序数理论。

1906 年，M. Fréchet 把 Cantor 的点集拓扑概念推广到抽象的函数空间，并引入距离空间、列紧性、Fréchet 导数（这是求导运算的抽象化和一般化）等泛函分析概念。随后不久，人们又对 Fredholm 和 Hilbert 创立的积分方程理论进行了抽象化，得到了 Hilbert 空间以及这种空间上的紧算子理论。泛函分析从此走上了历史舞台。1914 年，Hausdorff 从邻域概念出发在抽象的点集上定义了极限点、开集、闭集等一系列拓扑概念。点集拓扑学就此诞生。1902 年，Lebesgue 用他的测度理论对 Riemann 积分进行了成功的改造。从 1913 年开始，人们又对 Lebesgue 积分理论进行了推广，在一般的集合上建立了类似的测度与积分理论，得到一个覆盖了所有求和运算的抽象框架。

大约在 1935 年，法国一些年轻数学家组成了一个名叫 Bourbaki 的学术团体。他们经常秘密集会，像“疯子”似的就数学展开激烈的争论。他们最初的目的是想更新陈旧的大学数学教材，但不久就意识到有必要用全局的眼光审视整个数学的基础。他们的结论是：整个数学是统一的整体，同时呈现出清晰的层次结构。这个宏伟大厦的基础是若干最基本的数学结构，其中包括序结构、代数结构、拓扑结构、测度结构、微分结构。这些基本的数学结构有机地组合在一起，就成了各个数学分支中的基本研究对象。以此观点为指导，他们决定出版一套以 Éléments de Mathématique 为总标题的系列著作，完整地论述整个现代数学。这个雄心勃勃的计划与当年 Euclid 写《几何原本》的情形颇为相似，采用的方法也有几分相近：公理化方法、先一般后特殊、严密的论证。这套书从 1940 年开始陆续出版，共有数十本，论述的题目包含了上文所说的 6 个领域，此外还有 Lie 群和 Lie 代数、数学史等。这些书根本不适合作教材，但他们所宣扬的对整个数学的看法影响很大，尤其是数学结构的观点。其结果是抽象数学得到了广泛的普及。Bourbaki 学派的数学家不仅是数学抽象化的吹鼓手，而且身体力行，发明了一大堆在现代数学中发挥巨大作用的数学结构。这是 20 世纪法国数学独树一帜的重要原因。

到二战结束时，数学抽象化基本完成。从此，集合论、抽象代数（应当包含范畴论）、点集拓扑、流形上的分析、测度与积分理论、泛函分析成了整个数学的基础。受其直接影响的是数学的传统领域，我们叫它纯数学。纯数学的大多数分支都是抽象的。在抽象数学中，人们研究的主要对象是配有某种数学结构

的抽象集合，主要任务是通过一系列抽象的数学定理从各个不同的侧面揭示抽象概念的本质，主要工作是从已有的抽象数学命题推出新的抽象数学命题，研究的方法自然是抽象的推理。新建立的抽象框架对纯数学的发展影响巨大。二战结束后，纯数学的各个领域得到了飞速发展。到 70 年代后期，抽象化的“油水”基本上被榨干了，数学的发展需要新的动力。几何与拓扑领域由于来自物理学的直觉，继续取得重大的进展，而另外一些领域开始出现停滞的迹象。此外，纯数学当中一直存在不怎么抽象的分支，如组合论、初等数论以及那些属于所谓**硬分析**（复杂的计算、细致的估计）的分支（如解析数论、调和分析、非线性微分方程）。在这些领域中，抽象框架很难发挥作用。

纯数学仅仅是 20 世纪数学的一个方面。二战结束后，数学研究的队伍急剧膨胀，许多人开始在抽象数学以外谋求出路。恰在此时又出现了 20 世纪最伟大的发明——电子计算机。这两个因素叠加在一起，造成了应用数学、计算科学以及统计学的迅猛发展。时至今日，就人员队伍而言，这三个领域完全可以和抽象数学相匹敌，在发展活力方面似乎还要强一些。话又说回来，这三个领域无论如何发展，抽象数学都是它们的基础。这里我们用“计算科学”一词是想强调计算作为当今社会的一类基本活动应当成为一个与数学平起平坐的研究领域。传统的计算数学主要研究数学问题的数值求解方法，而计算科学所涉及的范围比这要广一些，它同时也是计算机科学的一部分。计算科学就其内容而言不大像数学，更像工程技术。因为数据是真实的客观存在，所以统计学是十足的自然科学。因此，把这两个领域纳入到数学的版图是有问题的，尽管这是目前普遍的做法。

对于数学抽象化，我们应当有一个全面的认识。所谓抽象，指的是抛弃表象、保留实质。这基本上是一个相对概念。抛弃的东西越多就越显抽象，留下的越多则越具体。相对于客观世界，数学中的所有东西都是抽象的。之所以很多东西不觉得抽象，是因为我们已经对它们很熟悉。上面所说的数学抽象化，是指忽略集合中元素的具体含义，仅保留元素之间的关系、运算等方面的特征。大家熟知的线性空间、内积空间、线性变换就是典型的例子。抽象往往意味着认识上的飞跃，理论发展过程中的突破，因而是自然的、必然的过程。在做了很多算术题之后，我们把算术归结为交换律、结合律和分配律，并在此基础上

导出了平方差公式、和的平方公式、二项式定理。这个抽象化过程显然是巨大的进步。在抽象数学中，概念之间、命题之间的逻辑关系清晰明了，这是抽象化的一大优点。抽象理论对初学者来说可能是个困难，这是抽象化的缺点。要解决这个问题，应当采取抽象化的逆过程——具体化。典型的例子永远是掌握抽象概念和结果的重要手段，弄清来龙去脉总是理解抽象理论的关键。有时候，一个抽象结果的重要性主要体现在特例中。

其实，抽象化只是现代数学的外表。在现代数学中，所有的数学研究均始于具体的问题：或者是为了解决某个特殊的问题，或者是受一些具体结果的启发，或者是因为对某个现有的具体结果感到不满。然后，为了使自己的理论用途更广泛一些，数学家将其得到的具体结果进行一次又一次的推广，最终就得到了一个抽象理论。单纯从抽象概念出发进行抽象的思考，即使可以获得一些结果，也很难维持长久，其意义也是有疑问的。

以上的“长篇大论”是想让大家明白自己的出发地和今后的目标。大家可以发现，我们在本科期间主要学习近代数学中最基础、最有用的部分。硕士阶段的任务当然是学习现代数学。然而，现代数学是一个庞大的知识体系，任何人穷毕生精力也很难了解其全貌。因此，在硕士阶段有限的时间内，我们只能在某个很窄的领域获得比较深入的知识，同时为毕业后了解更广阔的领域做好准备。就后一个目的而言，在上文所说的若干基础理论上花些功夫是很有必要的，因为这些理论为纯数学提供了最基本的数学结构和数学术语，而纯数学又是整个现代数学的基础。

另一方面，必须认识到这些基础理论的主要作用在于为我们提供现代数学的基本语言。不懂这些语言当然是万万不行的，但仅仅懂这些语言是远远不够的。我们还应当进一步掌握尽可能多的数学技术。在今后的研究工作中，个人的能力当然起主要作用。但对于两个能力相当的人，谁掌握的数学技术越多、越先进，谁就越可能取得成功。这正如中学解平面几何题，聪明的学生比资质平庸的人更容易成功，但是，如果类似的题目以前从未见过，再聪明的学生一时半会也不一定能解得出来，相反，只要以前做过相同题型的问题，即使是资质平庸的学生也不会感到困难。当然，做科研与解数学题有本质的区别，但道理是相通的。

§1.2 数学语言

语言是思维和交流的基础。对于数学推理以及数学成果的表述来说，任何纯粹的自然语言都无法满足要求，只有数学语言才是最恰当、最方便的语言。什么是数学语言呢？翻开任何一本英文的数学书或数学杂志，可以发现数学作品也是由若干段落所组成，段落又可以划分为若干个句子。不同之处在于数学语句中可以出现数学表达式和数学术语。因此，可以认为数学语言是自然语言通过添加数学表达式和数学术语得到的扩充。

从语义上看，数学语句中的某些部分涉及数学，而另外一些部分，如连词、冠词、系动词，则与数学无关，它们仅仅起着纯粹的语法作用。数学表达式一般用作名词或简单句。但也有例外。比如，表达式“$\forall x \in E$”相当于一个介词短语。原则上讲，只要我们愿意，数学语句中的每个部分都能够用数学符号替换。逻辑学家把这种替换叫做形式化。在定义逻辑系统时，他们甚至采取彻底的形式化，即只用数学符号，不使用自然语言中的任何词汇。(这与程序设计语言非常相似）为此，他们发明了一些新的符号，其中包括 $\forall,\exists$, 以及某些用于取代连词的符号。由于一切符号皆有严格的定义，这种语言自然绝对精确。但是，太多的符号使这种语言可读性很差。因此，在普通的数学著作中，人们总是采取部分的形式化。形式化的程度当然取决于作者的写作风格。一般来说，数学符号越多，作品就越简洁；普通文字越多，作品就越生动。

为了掌握现代数学语言，我们必须经过严格的训练，在平时的数学写作中（包括做习题）力求做到合乎规范。既然数学语言是自然语言的扩充，我们就应当遵守自然语言的基本使用规则，比如正确地划分段落，恰当地使用连词和标点符号。这些当然是每一个作者都应该达到的基本要求。不幸的是，在学生的作业中，我们很难见到清楚的段落结构。有些人不管前面使用哪个连词，后面一律以“则”应之。于是出现了“因为…，则…”这样的句子。数学公式后面的标点符号省而不写或胡乱一点的现象更是屡见不鲜。这些错误应当引以为戒！

好的数学作品应当有一个简洁、清楚、前后一致的符号系统。然而，设计一个好的符号系统远非易事，尤其是篇幅较长的作品，如毕业论文。为了提高这方面的能力，我们可以模仿别人的做法。此外，应当牢记，符号系统的优劣