华腾教育

高等学校教材经典同步辅导丛书数学基础类(一)

配高教社《工程数学 线性代数》第五版 同济大学数学系 编

工程数学 线性代数

同步辅导及习题全解

同济·第五版

华腾教育教学与研究中心
丛书主编 清华大学 何联毅
本书主编 清华大学 曾 捷

附:2009年硕士研究生入学统一考试试题

- 紧扣教材
- 知识精讲
- 习题全解
- 应试必备
- 联系考研
- 网络增值

中国矿业大学出版社

高等学校教材经典同步辅

线性代数

同步辅导及习题全解

华腾教育教学与研究中心
丛书主编　清华大学　何联毅
本书主编　清华大学　曾　捷

中国矿业大学出版社

内容提要

本书是高等教育出版社出版，同济大学应用数学系编的《线性代数》(第五版)教材的配套辅导书。全书由课程学习指南、学习导引、知识点归纳、典型例题与解题技巧、历年考研真题评析、课后习题全解及备忘录等部分组成，旨在帮助读者掌握知识要点，学会分析问题和解决问题的方法技巧，并且提高学习能力及应试能力。

本书可供高等院校线性代数课程的同步辅导使用，也可作为研究生入学考试的复习资料，同时可供本专业教师及相关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数(工程数学)同步辅导及习题全解/曾捷主编．—徐州：中国矿业大学出版社，2006.8(2009.1 重印)

(高等学校教材经典同步辅导丛书)

ISBN 978-7-81107-395-9

Ⅰ.线… Ⅱ.曾… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 086918 号

书　　名　线性代数(工程数学)同步辅导及习题全解

主　　编　曾　捷

责任编辑　罗　浩

选题策划　孙怀东

特约编辑　陈兴来

出版发行　中国矿业大学出版社

印　　刷　北京市昌平百善印刷厂

经　　销　新华书店

开　　本　720×960　1/16　**本册印张** 18.5　**本册字数** 415 千字

印　　次　2009 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

总 定 价　114.00 元

高等学校教材
经典同步辅导丛书编委会

前言

《线性代数》是高等院校理工科专业的一门重要的基础课程,也是全国硕士研究生理工专业入学考试的统考课。

同济大学数学系编的《线性代数》(第五版)以体系完整、结构严谨、层次清晰、深入浅出的特点成为这门课程的经典教材,被全国许多院校采用。

为了帮助读者更好地学习这门课程,掌握更多的知识,我们根据多年的教学经验编写了这本与此教材配套的《线性代数同步辅导及习题全解》(第五版)。本书旨在使广大读者理解基本概念,掌握基本知识,学会基本解题方法与解题技巧,进而提高应试能力。

本书作为一种辅助性的教材,具有较强的针对性,启发性,指导性和补充性的特点。考虑到《线性代数》这门课程的特点,我们在内容上作了以下安排:

1. 课程学习指南　从该课程的知识体系出发,对各个章节在全书中的位置,以及与其他章节的联系作了简明扼要的阐述,使学习更有重点。

2. 学习导引　说明该章包括的主要内容,学习的侧重点,以及要掌握的知识点。

3. 知识点归纳　串讲概念,总结性质和定理,使知识全面系统,便于掌握。

4. 典型例题与解题技巧　对本章所涉及的知识点进行分类,给出典型例题,并进行深入、详细地讨论和分析,引导学生思考问题,拓展思路。

5. 历年考研真题评析　精选近年名校考研真题并进行深入地讲解。

6. 课后习题全解　给出了同济大学数学系编的《线性代数》(第五版)各章习题的答案。我们给出了详细的解题过程,而且对有难度或综合性较强的习题做了分析和小结,从而更好地帮助学生理解掌握每一知识点。

7. 备忘录　给出本章考点和易错点,便于复习和深入学习。

8. 2009 年考研真题　本书在最后附有 2009 年研究生统考数学试题,并给出了相应的答案,便于学生对自己的学习效果进行最后的考核。

本书在编写时参考了大量的优秀教材和权威考题。在此,谨向有关作者和所选考试、考研试题的命题人以及对本书的出版给予帮助和指导的所有老师、同仁表示衷

心的感谢！

由于编者水平有限，本书难免出现不妥之处，恳请广大读者批评指正。

联系我们

华腾教育网：

http：//www.huatengedu.net

电子邮件：

huateng@huatengedu.com

华腾教育教学与研究中心

目 录

课程学习指南

线性代数是工科类各专业必修的一门非常重要的基础课程，又是学习后续专业课程的重要基础，也是工科类各专业研究生入学考试的必考科目。

学习线性代数的目的是要掌握线性代数的基本概念、基本定理和重要性质，进而提高分析问题和解决问题的能力，特别是求解线性方程的能力，同时也为后续各专业课的学习打下基础。

线性代数具有很强的逻辑性的理论性，需要一定的初等代数基础。同时，线性代数具有广泛的基础性和适用性，是电学、力学、声学、化学等许多专业最重要的先修课程。

线性代数共分三个部分。第一部分为行列式，主要包括行列式的定义、性质及其计算方法；第二部分为矩阵，主要包括矩阵的运算、交换以及相似矩阵、二次型；第三部分为线性向量，主要包括线性相关、线性方程组的解、线性空间及其变换。

线性代数的研究对象是线性方程，其课程内容较多、较散而且比较抽象，为了帮助读者学好这门基础课程，建议在学习过程中按以下方法学习：

1. 分类、分层次地对知识进行梳理，将其转变为一套系统的理论。
2. 掌握基本概念，理解基本定理，熟记重要性质。
3. 要注重前后联系、融会贯通，保持知识的连惯性。
4. 要培养自己快速、准确的计算能力。

此外为了帮助学生在期末、考研等考试中取得好成绩，我们提出以下建议：

1. 能抽象、会推导。把具体的、复杂的问题化为抽象的、简单的数学问题，并能合理运用相关公式进行推理、演绎。

2. 讲方法、用技巧。运用简单的计算方法简化繁重的代数计算，利用计算技巧使得计算过程简单、准确。

3. 多做题，善归纳。要解答大量的相关题目，并归纳总解解题思路及技巧，做到举一反三。

第一章

行　列　式

学习导引

本章内容包括全排列及其逆序数，n 阶行列式的定义、基本性质，以及常见 n 阶行列式的计算方法，最后讲解行列式的一个应用——克拉默法则. 其中对行列式的定义及其性质的掌握是重点，它是线性代数的一个基础部分.

知识点归纳

重要概念

1. 全排列

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的全排列(简称排列)，或称一个 n 级排列. 所有全排列的个数记作 P_n，则 $P_n = n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 = n!$.

2. 排列的逆序数

对于 n 个不同的元素，先规定各元素之间有一个标准次序(例如从小到大)，于是在这几个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说有 1 个逆序，一个排列中所有逆序的总和叫做这个排列的逆序数. 逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

3. 对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的变换叫做对换. 将相邻两个元素对换叫做相邻对换.

4. n 阶行列式

由 n^2 个数 a_{ij}，$1\leqslant i,j\leqslant n$，排成的 n 行 n 列的方形阵列决定的一个数，这里的脚

标 i,j 表示这个数的位置,定义如下:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p_1}} a_{2_{p_2}} \cdots a_{n_{p_n}}$$

或

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^t a_{1_{p_1}} a_{2_{p_2}} \cdots a_{n_{p_n}}$$

其中,$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列;t 为这个排列的逆序数;$\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列(共有 $n!$ 个)取和. n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$ 其中数 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元.

5. 代数余子式

(1) 行列式按一行(列)展开

在 n 阶行列式中,把 (i,j) 元 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,留下来的 $n-1$ 阶行列式叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij},记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,则 A_{ij} 叫做 (i,j) 元 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某 k 行(列)展开

在 n 阶行列式 D 中,任选 k 行、k 列,位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原来相对位置组成的 k 阶行列式 M,称为 D 的一个 k 阶子式,在 D 中划去 M 所在的行与列后得到的 $n-k$ 阶行列式 N,称为 M 的余子式,如果 M 所在的行的序数是 $i_1,i_2,\cdots,i_k$,所在列的序数是 $j_1,j_2,\cdots,j_k$,则称 $(-1)^{(i_1+\cdots+i_k)+(j_1+\cdots+j_k)}N$ 为 M 的代数余子式.

基本性质

1. 排列的性质

(1) 对换改变排列的奇偶性.

(2) 在全部 n 阶排列中($n\geqslant 2$)奇偶排列各占一半.

(3) 任意一个 n 阶排列可经过一系列对换变成自然排列并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

2. 行列式的性质

(1)(对称性) 行列式与其转置行列式相等,即若

$$D=|\,\alpha_1\cdots\alpha_k\cdots\alpha_n\,|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D^{\mathrm{T}}=|\alpha_1^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_k^{\mathrm{T}}\cdots\alpha_n^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 $$D=D^{\mathrm{T}}$$

注 行列式的这一性质表明,凡对行成立的性质,对列也成立.

(2)(交错性) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 以数乘行列式,等于以这个数乘该行列式的任一行或任一列. 行列式中某一行(列) 的所有元素有公因子,则这个公因子可以提到行列式符号的外面.

即 $$|\alpha_1,\cdots,a\alpha_k,\cdots,\alpha_n|=a\cdot|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n|$$

(4)$D=0\begin{cases}\text{当 } D \text{ 中某一行(列) 元素全为零.}\\ \text{当 } D \text{ 中某两行(列) 元素对应成比例.}\end{cases}$

(5) 行列式中某一行(列) 的所有元素都是两个数之和,则这个行列式等于两个行列式的和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $$|\alpha_1,\cdots,\alpha_k+\beta_k,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_n|+|\alpha_1,\cdots,\beta_k,\cdots,\alpha_n|$$

(6) 将行列式某一行(列) 的所有元素的 k 倍加到另一行(列) 的对应元素上,行列式的值不变.

即 $$|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,k\alpha_k+\alpha_l,\cdots,\alpha_n|=|\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\cdots,\alpha_l,\cdots,\alpha_n|$$

常用方法

1. 排列逆序数的计算

(1)$t(i_1i_2\cdots i_n)=i_1$ 后面比 i_1 小的数的个数 $+\,i_2$ 后面比 i_2 小的数的个数 $+\cdots+$ i_{n-1} 后面比 i_{n-1} 小的数的个数.

(2)$t(i_1 i_2 \cdots i_n)=i_2$ 前面比 i_2 大的数的个数 $+ i_3$ 前面比 i_3 大的数的个数 $+\cdots+ i_n$ 前面比 i_n 大的数的个数.

2. 行列式按行(列)展开的计算

(1) 行列式按一行(列)展开

设 D 为 n 阶行列式,则

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, i=j\\0, i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, i=j\\0, i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中,A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 行列式按某 k 行(列)展开:设 D 为 n 阶行列式,在 D 中任取 $k(k\leqslant n)$ 行,位于这 k 行中所有 k 阶子式(共有 C_n^k 个)为 $M_1, M_2, \cdots, M_s$,相应的代数余子式为 $A_1, A_2, \cdots, A_s$,则 $D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_sA_s$.

注 一个 n 阶行列式,如果其中第 i 行所有元素除 (i,j) 元 a_{ij} 外都为零,那么这个行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式的乘积,即 $D=a_{ij}A_{ij}$.

3. 几种由定义可直接计算的特殊行列式

(1) 二阶行列式:$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

(2) 三阶行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3) 上三角形行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

(4) 下三角形行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{12}\cdots a_{nn}$$

(5) 反上三角行列式:
$$\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & \therefore & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

(6) 反下三角行列式：$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$

4. 范德蒙(Vader morde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\cdots(x_n - x_1)\cdot (x_3 - x_2)\cdots(x_n - x_2)\cdot\cdots(x_n - x_{n-1})$$

5. 克拉默(Cramer) 法则

(1) 非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (b_i \text{ 不全为零})$$

的系数行列式 $D \neq 0$ 时，该方程组有惟一解. 即 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \dfrac{D_n}{D}$.

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \cdots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$

反之，如果非齐次线性方程无解或有两个不同解，则它的系数行列式必为零.

(2) 齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有惟一零解，即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

反之，如果齐次线性方程组有非零解，则系数行列式 $D = 0$.

注 ① 克拉默法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等的线性方程组.

② n 元非齐次线性方程组，当系数行列式 $D \neq 0$ 时有惟一解，当系数行列式 $D = 0$ 时 克拉默法则失效，方程组可能有解，也可能无解.

③ n 元齐次线性方程组，当系数行列式 $D \neq 0$ 时有惟一零解，当系数行列式 $D = 0$ 时，齐次线性方程组有非零解(无穷多解).

典型例题与解题技巧

题型 1 排列逆序数的计算

题型分析 在求排列 $j_1, j_2, \cdots, j_n$ 的逆序数时，可以从第 2 个数开始. 依次统计 $j_i(i = 2,3,\cdots,n)$ 与其前面的数构成的逆序个数(即前面比 j_i 大的数的个数) t_i，则排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 $t_2 + t_3 + \cdots t_n$.

例 1 求下列排列的逆序数，求确定其奇偶性

(1)21736854　　　　(2)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$

解 (1) **解法 1°** 2 的后有 1 小于 2，故 2 的逆序数为 1，1 的后面没有小于 1 的数，1 的逆序数为 0，7 的后面有 3，6，5，4 小于 7，故 7 的逆序数 4，依此方法逐个计算，知排列逆序数为：

$t(21736854) = 1 + 0 + 4 + 0 + 2 + 2 + 1 + 0 = 10$，偶排列

解法 2° 1 的前面比 1 大的数有 1 个 2，故 1 的逆序数为 1，2 排在首位没有逆序，3 的前面有一个 7 比 3 大，逆序数为 1，依此计算可得

$$t(21736854) = 1 + 0 + 1 + 4 + 3 + 1 + 0 + 0 = 10$$

(2) $t(n(n-1)\cdots 2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$,

由于 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 的奇偶性由 n 而定，故讨论如下：

当 $n = 4k$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+1$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$ 为偶数；

当 $n = 4k+2$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$ 为奇数；

当 $n = 4k+3$ 时，$\dfrac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$ 为奇数；

综上，当 $n = 4k$ 或 $4k+1$ 时，为偶排列，当 $n = 4k+2$ 或 $4k+3$ 时此排列为奇数排列，k 为任意非负整数.

练习题 设排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 k，问 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少？

解 若排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 中关于 x_1 有 m_1 个逆序，则有 $(n-1)-m$ 个顺序，即在排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中关于 x_1 有 $(n-1)-m_1$ 个逆序，若关于 x_2 有 m_2 个逆序，则有 $(n-2)-m_2$ 个顺序，依此类推，关于 x_n 有 m_n 个逆序，则有 $(n-n)-m_n$ 个顺序，而 $m_1+m_2+\cdots+m_n=k$，故 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数为 $t(x_nx_{n-1}\cdots x_1)=[(n-n)-m_n]+\cdots+[(n-2)-m_2]+[(n-1)-m_1]=(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0-k=\frac{1}{2}n(n-1)-k$.

题型 2 n 阶行列式的概念

题型分析 对于 n 阶行列式的概念要注意以下几点：

1° 每一项的构成是不同行、不同列的几个元素相乘，n 阶排列总数是 $n!$，所有排列求和，共有 $n!$ 项.

2° 每一项的符号，当第一个下标为自然顺序时，由第二个下标排列的奇偶性确定符号.

3° 行列式的值最终是一个具体的数.

例 2 填空题

(1) 如果 n 阶行列式中，负项的个数为偶数，则 $n\geqslant$ ______.

(2) 如果 n 阶行列式中等于零的元素个数大于 n^2-n，那么行列式的值为______.

(3) 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ x & 1 & 0 & x\end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是______.

分析 (1)n 阶行列式中，共有 $n!$ 项，其中正负项各占一半，若负项的个数为偶数，必有 $n\geqslant 4$.

(2)n 阶行列式中共有 n^2 个元素，若等于零的元素个数大于 n^2-n，那么不等于零的元素个数小于 n，又 n 阶行列式的每一项是 n 个不同元素的乘积，所以每一项必定为零，从而此行列式值为零.

(3) 按行列式定义，对于 x^3. 有 $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$，$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$，$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$ 三次出现 x^3，此时各项的系数分别是 $a_{24}=-1$，$a_{21}=1$，$a_{14}=2$. 即 $-x^3$，x^3，$2x^3$，又各项逆序数分别为 $t(2431)=4$，$t(2134)=1$，$t(4231)=5$，故所带符号分别为正、负、负，因此系数是 -4.

答案 (1)4　(2)0　(3)-4