普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套参考书

Physics

物理学教程（第三版）习题分析与解答

马文蔚 主编

包刚 韦娜 殷实 编

高等教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

物理学教程（第三版）习题分析与解答

马文蔚 主编
包刚 韦娜 殷实 编

WULIXUE JIAOCHENG (DI SAN BAN) XITI FENXI YU JIEDA

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是为马文蔚等编写的《物理学教程》(第三版)中的习题编写的习题分析与解答，为了更好地巩固读者所学的物理知识，所选内容在主教材的基础上适当选取了部分拓展内容的习题。全书贯彻重分析、简解答的指导思想，力求通过对题目的分析，使学生在解题之前，对相关的物理规律有进一步的认识；通过解题方法和技巧的介绍和运用，拓宽学生的解题思路；通过讨论计算结果来进一步明确物理意义。而对于解题过程，本书则尽可能做到简明扼要。

本书适合以《物理学教程》(第三版)作为教材的师生作为教学和学习参考书使用，也可供其他高等学校理工科各专业师生和社会读者选用。

图书在版编目(CIP)数据

物理学教程(第3版)习题分析与解答/马文蔚主编；包刚，韦娜，殷实编.--北京：高等教育出版社，2016.4

ISBN 978-7-04-044932-7

Ⅰ.①物… Ⅱ.①马… ②包… ③韦… ④殷… Ⅲ.①物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O4

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第035023号

策划编辑 缪可可　　责任编辑 张海雁　　封面设计 李小璐　　版式设计 王艳红

插图绘制 杜晓丹　　责任校对 吕红颖　　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	北京四季青印刷厂		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm×1092mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	15		
字　　数	360千字	版　　次	2016年4月第1版
购书热线	010-58581118	印　　次	2016年4月第1次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	28.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　44932-00

前　言

斗转星移,《物理学教程习题分析与解答》伴随着一届又一届的大学生已经有八年了。编写者的初衷是,通过习题分析,引导学生以科学探究的态度对待物理习题,通过解题“即物穷理”,启迪思维,逐步提高学生运用物理学基本理论分析、解决问题的能力,并使学生从中体验到物理科学的魅力和价值。但愿编者们的努力能够为学习者提供一些帮助。

此次再版,基本保持了原书的特点和风格,增添、调整了少量的习题,使每章的习题安排更加合理,同时也纠正了原书中的一些错误。

我们深深体会到,一本教学参考书的成熟,离不开使用该书的广大教师和学生的热情关心和支持,在此,编者致以诚挚的感谢。

编　者

2014年7月于南京

目　录

第一篇
力　学

求解力学问题的基本思路和方法

物理学是一门基础学科，它研究物质运动的各种基本规律.由于不同运动形式具有不同的运动规律，从而要用不同的研究方法处理.力学是研究物体机械运动规律的一门学科，而机械运动有各种运动形态，它们与物体的受力情况以及初始状态有密切关系.掌握物体各种运动状态的规律是求解力学问题的重要基础.但仅仅记住一些公式是远远不够的.求解一个具体物理问题首先应明确研究对象的运动性质；选择符合题意的恰当的模型；透彻认清物体受力和运动过程的特点等.根据模型、条件和结论之间的逻辑关系，运用科学合理的研究方法，进而选择一个正确简便的解题切入点，在这里思路和方法起着非常重要的作用.

1. 正确选择物理模型和认识运动过程

力学中常有质点、质点系、刚体等模型.每种模型都有特定的含义、适用范围和物理规律.采用何种模型既要考虑问题本身的限制，又要注意解决问题的需要.例如，用动能定理来处理物体的运动时，可把物体抽象为质点模型.而用功能原理来处理时，就必须把物体与地球组成一个系统来处理.再如对绕固定轴转动的门或质量和形状不能不计的定滑轮来说，必须把它视为刚体，并用角量和相应的规律来进行讨论.在正确选择了物理模型后，还必须对运动过程的性质和特点有充分理解，如物体所受力(矩)是恒定的还是变化的；质点作一般曲线运动，还是作圆周运动等，以此决定解题时采用的解题方法和数学工具.

2. 叠加法

叠加原理是物理学中应用非常广泛的一条重要原理，据此力学中任何复杂运动都可以被看成由几个较为简单运动叠加而成.例如质点作一般平面运动时，通常可以看成是由两个相互垂直的直线运动叠加而成，而对作圆周运动的质点来说，其上的外力可按运动轨迹的切向和法向分解，其中切向力只改变速度的大小，而法向力只改变速度的方向.运动的独立性和叠加性是叠加原理中的两个重要原则，掌握若干基本的简单运动的物理规律，再运用叠加法就可以使我们化“复杂”为“简单”.此外运用叠加法时要注意选择合适的坐标系，选择什么样的

坐标系就意味着运动将按相应形式分解.在力学中,对一般平面曲线运动,多采用平面直角坐标系,平面圆周运动多采用自然坐标系,而对刚体绕定轴转动则采用角坐标系等.

叠加原理在诸如电磁学,振动、波动等其他领域内都有广泛应用,是物理学研究物质运动的一种基本思想和方法,需读者在解题过程中不断体会和领悟.

3. 类比法

有些不同性质运动的规律具有某些相似性,理解这种相似性产生的条件和遵从的规律有利于发现和认识物质运动的概括性和统一性.而且还应在学习中善于发现并充分利用这种相似性,以拓宽自己的知识面.例如质点的直线运动和刚体绕定轴转动是两类不同运动,但是运动规律却有许多可类比和相似之处,如

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad 与 \quad \omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad 与 \quad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

其实它们之间只是用角量替换了相应的线量而已,这就可由比较熟悉的公式联想到不太熟悉的公式.这种类比不仅运动学有,动力学也有,如

$$F=ma \qquad 与 \qquad M=J\alpha$$

$$\int F\mathrm{d}t = mv - mv_0 \qquad 与 \qquad \int M\mathrm{d}t = J\omega - J\omega_0$$

$$\int F\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad 与 \qquad \int M\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega^2 - \frac{1}{2}J\omega_0^2$$

可以看出两类不同运动中各量的对应关系十分明显,使我们可以把对质点运动的分析方法移植到刚体转动问题的分析中去.当然移植时必须注意两种运动的区别,一个是平动一个是转动,状态变化的原因一个是力而另一个是力矩.此外还有许多可以类比的实例,如万有引力与库仑力,静电场与恒定磁场,电介质的极化与磁介质的磁化等.只要我们在物理学习中善于归纳类比,就可以沟通不同领域内相似物理问题的研究思想和方法,并由此及彼,触类旁通.

4. 微积分在力学解题中的运用

微积分是大学物理学习中应用很多的一种数学运算,在力学中较为突出,也是初学大学物理课程时遇到的一个困难.要用好微积分这个数学工具,首先应在思想上认识到物体在运动过程中,反映其运动特征的物理量是随时空的变化而变化的.一般来说,它们是时空坐标的函数.运用微积分可求得质点的运动方程和运动状态.这是大学物理和中学物理最显著的区别.例如通过对质点速度函数中的时间 t 求一阶导数就可得到质点加速度函数.另外对物理量数学表达式进行合理变形就可得出新的物理含义.如由 $\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$,借助积分求和运算可求得在 t_1-t_2 时间内质点速度的变化;同样由 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}\mathrm{d}t$ 也可求得质点的运动方程.以质点运动学为例,我们可用微积分把运动学问题归纳如下:

第一类问题:已知运动方程求速度和加速度;

第二类问题:已知质点加速度以及在起始状态时的位矢和速度,可求得质点的运动方程.

在力学中还有很多这样的关系,读者不妨自己归纳整理一下,从而学会自觉运用微积分来处理物理问题,运用时有以下几个问题需要引起大家的关注:

(1) 运用微积分的物理条件.在力学学习中我们会发现,$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t$ 和 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}_0t+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$ 等描述质点运动规律的公式,只是式 $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t\boldsymbol{a}\mathrm{d}t$ 和式 $\int_0^r\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{a}t)\mathrm{d}t$ 在加速度 $\boldsymbol{a}$ 为常矢量条件下积分后的结果.

此外,在高中物理中只讨论了一些质点在恒力作用下的力学规律和相关物理问题,而在大学物理中则主要研究在变力和变力矩作用下的力学问题,微积分将成为求解上述问题的主要数学工具.

(2) 如何对矢量函数进行微积分运算.我们知道很多物理量都是矢量,如力学中的 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{p}$ 等物理量,矢量既有大小又有方向,从数学角度看它们都是“二元函数”,在大学物理学习中,通常结合叠加法进行操作,如对一般平面曲线运动可先将矢量在固定直角坐标系中分解,分别对 x、y 轴两个固定方向的分量(可视为标量)进行微积分运算,最后再通过叠加法求得矢量的大小和方向.

(3) 积分运算中的分离变量和变量代换问题.以质点在变力作用下作直线运动为例,如已知变力表达式和初始状态求质点的速率,求解本问题一条路径是:由 $F=ma$ 求得 a 的表达式,再由式 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 通过积分运算求得 v,其中如果力为时间 t 的显函数,则 $a=a(t)$,此时可两边直接积分,即 $\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a(t)\mathrm{d}t$;但如果力是速率 v 的显函数,则 $a=a(v)$,此时应先作分离变量后再两边积分,即 $\int_{v_0}^{v}\frac{1}{a(v)}\mathrm{d}v=\int_0^t\mathrm{d}t$;又如力是位置 x 的显函数,则 $a=a(x)$,此时可利用 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 得 $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{v}$,并取代原式中的 $\mathrm{d}t$,再分离变量后两边积分,即 $\int_{v_0}^{v}v\mathrm{d}v=\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x$,用变量代换的方法可求得 $v(x)$ 表达式,在以上积分中建议采用定积分,下限为与积分元对应的初始条件,上限则为待求量.

5. 求解力学问题的几条路径

综合力学中的定律,可归结为三种基本路径,即

(1) 动力学方法:如问题涉及加速度,此法应首选.运用牛顿定律、转动定律以及运动学规律,可求得几乎所有的基本力学量,求解对象广泛.但由于涉及较多的过程细节,对变力(矩)问题,还将用到微积分运算,故计算量较大.因而只要问题不涉及加速度,则应首先考虑以下路径.

(2)(角)动量方法:如问题不涉及加速度,但涉及时间,此法可首选.

(3) 能量方法:如问题既不涉及加速度,又不涉及时间,则应首先考虑用动能定理或功能原理处理问题.

当然对复杂问题,几种方法应同时考虑.此外,三个守恒定律(动量守恒、能量守恒、角动量守恒定律)能否成立往往是求解力学问题首先应考虑的问题.总之,应学会从不同角度分析与探讨问题.

以上只是原则上给出求解力学问题的一些基本思想与方法,其实求解具体力学问题并无固定模式,有时全靠“悟性”,但这种“悟性”产生于对物理基本规律的深入理解与物理学方法掌握之中,要学会在解题过程中不断总结与思考,从而提高分析问题的能力.

第一章 质点运动学

1-1 质点作曲线运动,在时刻 t 质点的位矢为 $\boldsymbol{r}$,速度为$\boldsymbol{v}$,速率为 v,t 至($t+\Delta t$)时间内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$,路程为 Δs,位矢大小的变化量为 Δr(或称 $\Delta|\boldsymbol{r}|$),平均速度为$\overline{\boldsymbol{v}}$,平均速率为$\overline{v}$.

(1) 根据上述情况,则必有( )

(A) $|\Delta\boldsymbol{r}|=\Delta s=\Delta r$

(B) $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s\neq\Delta r$,当 $\Delta t\to0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s\neq\mathrm{d}r$

(C) $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r\neq\Delta s$,当 $\Delta t\to0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r\neq\mathrm{d}s$

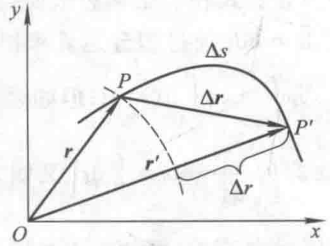
(D) $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s\neq\Delta r$,当 $\Delta t\to0$ 时有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}r=\mathrm{d}s$

(2) 根据上述情况,则必有( )

(A) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$　　(B) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$

(C) $|\boldsymbol{v}|=v,|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$　　(D) $|\boldsymbol{v}|\neq v,|\overline{\boldsymbol{v}}|=\overline{v}$

分析与解 (1) 质点在 t 至($t+\Delta t$)时间内沿曲线从 P 点运动到 P'点,各量关系如图所示,其中路程 $\Delta s=\overset{\frown}{PP'}$,位移大小 $|\Delta\boldsymbol{r}|=PP'$,而 $\Delta r=|\boldsymbol{r}'|-|\boldsymbol{r}|$ 表示质点位矢大小的变化量,三个量的物理含义不同,在曲线运动中大小也不相等(注:在直线运动中有相等的可能).但当 $\Delta t\to0$ 时,P'点无限趋近 P 点,则有 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,但却不等于 $\mathrm{d}r$.故选(B).



习题 1-1 图

(2) 由于 $|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$,故 $\left|\dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}\right|\neq\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$,即 $|\overline{\boldsymbol{v}}|\neq\overline{v}$.但由于 $|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$,故 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$,即 $|\boldsymbol{v}|=v$.由此可见,应选(C).

1-2 一运动质点在某瞬时位于位矢 $\boldsymbol{r}(x,y)$ 的端点处,对其速度的大小有四种意见,即

(1) $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$;　(2) $\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}$;　(3) $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$;　(4) $\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$.

下述判断正确的是( )

(A) 只有(1)(2)正确　　(B) 只有(2)正确

(C) 只有(2)(3)正确　　(D) 只有(3)(4)正确

分析与解 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$表示质点到坐标原点的距离随时间的变化率,在极坐标系中叫径向速率,通常用符号 v_r 表示,这是速度矢量在位矢方向上的一个分量;$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$表示速度矢量;在自然坐标系中速度大小可用公式 $v=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$计算,在直角坐标系中则可由公式 $v=\sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$ 求解.故选(D).

1-3 质点作曲线运动,$\boldsymbol{r}$ 表示位置矢量,$\boldsymbol{v}$表示速度,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,s 表示路程,a_t 表示切向

加速度.对下列表达式,即

(1) $\dfrac{dv}{dt}=a$;　　(2) $\dfrac{dr}{dt}=v$;　　(3) $\dfrac{ds}{dt}=v$;　　(4) $\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|=a_t$.

下述判断正确的是(　　)

(A) 只有(1)(4)是对的　　(B) 只有(2)(4)是对的

(C) 只有(2)是对的　　(D) 只有(3)是对的

分析与解　$\dfrac{dv}{dt}$表示切向加速度 a_t,它表示速度大小随时间的变化率,是加速度矢量沿速度方向的一个分量,起改变速度大小的作用;$\dfrac{dr}{dt}$在极坐标系中表示径向速率 v_r(习题 1-2 所述);$\dfrac{ds}{dt}$在自然坐标系中表示质点的速率 v;而$\left|\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right|$表示加速度的大小而不是切向加速度 a_t.因此只有式(3)表达是正确的.故选(D).

1-4　一个质点在作圆周运动时,则有(　　)

(A) 切向加速度一定改变,法向加速度也改变

(B) 切向加速度可能不变,法向加速度一定改变

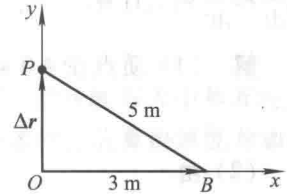
(C) 切向加速度可能不变,法向加速度不变

(D) 切向加速度一定改变,法向加速度不变

分析与解　加速度的切向分量 a_t 起改变速度大小的作用,而法向分量 a_n 起改变速度方向的作用.质点作圆周运动时,由于速度方向不断改变,相应法向加速度的方向也在不断改变,因而法向加速度是一定改变的.至于 a_t 是否改变,则要视质点的速率情况而定.质点作匀速率圆周运动时,a_t 恒为零;质点作匀变速率圆周运动时,a_t 为一不为零的常量;当 a_t 改变时,质点则作一般的变速率圆周运动.由此可见,应选(B).

1-5　质点自原点沿 x 轴正方向(正东方向)运动了 3 m 后,又向北偏西方向沿直线运动了 5 m,刚好与 y 轴相交于点 P,试求其路程和位移.

分析与解　路程和位移是两个不同的物理量,前者是质点运动轨迹的长度之和(标量),而后者则是起点(O 点)指向终点(P 点)的有向线段(矢量).依题意质点运动轨迹如图所示,则



习题 1-5 图

路程　$s=OB+BP=(3+5)\ \text{m}=8\ \text{m}$

位移　$\Delta\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}=4\ \text{m}\ \boldsymbol{j}$

1-6　质点沿 y 轴作直线运动,其位置随时间的变化规律为

$$y=5t^2$$

试求:(1) 2~2.1 s,2~2.001 s,2~2.000 01 s 各时间间隔内的平均速度;(2) $t=2$ s 时的瞬时速度.

分析　平均速度只能大概描述质点运动情况,其大小和方向与所取时间间隔有关.关键是由运动方程求得相应时间间隔内的位移(本题为 Δy),再由定义式求 $\bar{v}$.

解　(1) 由分析知,由 $y(t)$ 和 $y(t+\Delta t)$ 可得

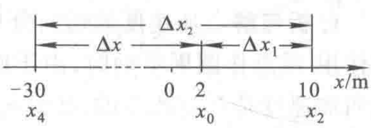
$$\Delta y=5(t+\Delta t)^2-5t^2=10t\Delta t+5\Delta t^2$$

则
$$\bar{v}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=10t+5\Delta t$$
将不同时间间隔 $\Delta t_1=0.1$ s,$\Delta t_2=0.001$ s 和 $\Delta t_3=0.000\ 01$ s 代入上式得各个时间间隔内的平均速度分别为
$$\bar{v}_1=20.5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad \bar{v}_2=20.005\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad \bar{v}_3=20.000\ 05\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
方向沿 y 轴正方向.

(2) 根据瞬时速度的定义,可得
$$v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5t^2)=10t$$
由此可算出 $t=2$ s 时的瞬时速度为
$$v=20\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
方向沿 y 轴正方向.由上可知瞬时速度是平均速度在 $\Delta t\to 0$ 时的极限值.

1-7 已知质点沿 x 轴作直线运动,其运动方程为 $x=2+6t^2-2t^3$,式中 x 的单位为 m,t 的单位为 s.求:(1) 质点在运动开始后 4.0 s 内的位移的大小;(2) 质点在该时间内所通过的路程;(3) $t=4$ s 时质点的速度和加速度.

分析 位移和路程是两个完全不同的概念.只有当质点作直线运动且运动方向不改变时,位移的大小才会与路程相等.质点在 t 时间内的位移 Δx 的大小可直接由运动方程得到:$\Delta x=x_t-x_0$,而在求路程时,就必须注意到质点在运动过程中可能改变运动方向,此时,位移的大小和路程就不同了.为此,需根据 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$ 来确定其运动方向改变的时刻 t_p,求出 $0\sim t_p$ 和 $t_p\sim t$ 内的位移大小 Δx_1、Δx_2,则 t 时间内的路程 $s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|$,如图所示.至于 $t=4.0$ s 时质点速度和加速度可用 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$ 两式计算.



习题 1-7 图

解 (1) 质点在 4.0 s 内位移的大小为
$$\Delta x=x_4-x_0=-32\ \mathrm{m}$$
(2) 由
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$$
得知质点的换向时刻为
$$t_p=2\ \mathrm{s}\quad (t=0\ \text{不合题意})$$
则
$$\Delta x_1=x_2-x_0=8.0\ \mathrm{m}$$
$$\Delta x_2=x_4-x_2=-40\ \mathrm{m}$$
所以,质点在 4.0 s 时间间隔内的路程为
$$s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=48\ \mathrm{m}$$
(3) $t=4.0$ s 时
$$v=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4.0\ \mathrm{s}}=-48\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$a=\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=4.0\ s}=-36\ m\cdot s^{-2}$$

1-8 已知质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$,式中 r 的单位为 m,t 的单位为 s.求:(1) 质点的运动轨迹;(2) $t=0$ 及 $t=2$ s 时,质点的位矢;(3) 由$t=0$到$t=2$ s 内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和径向增量 Δr.

分析 质点的轨迹方程为 $y=f(x)$.可由运动方程的两个分量式$x(t)$和 $y(t)$中消去 t 即可得到.对于 $\boldsymbol{r}$、$\Delta\boldsymbol{r}$,Δr 来说,物理含义不同,可根据其定义计算(详见习题 1-1 分析).

解 (1) 由 $x(t)$和 $y(t)$中消去 t 后得质点轨迹方程为

$$y=2-\frac{1}{4}x^2$$

这是一个抛物线方程,轨迹如图所示.

(2) 将 $t=0$ s 和 $t=2$ s 分别代入运动方程,可得相应的位矢分别为

$$\boldsymbol{r}_0=(2m)\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{r}_2=(4m)\boldsymbol{i}-(2m)\boldsymbol{j}$$

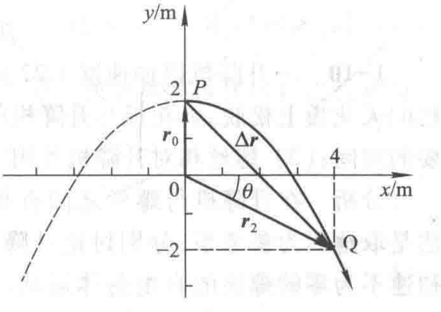
图中的 P、Q 两点,即为 $t=0$ s 和 $t=2$ s 时质点所在的位置.

(3) 由位移表达式,得

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_0)\boldsymbol{i}+(y_2-y_0)\boldsymbol{j}=(4m)\boldsymbol{i}-(4m)\boldsymbol{j}$$

其中位移大小为

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=5.66\ m$$



习题 1-8 图

而径向增量为

$$\Delta r=\Delta|\boldsymbol{r}|=|\boldsymbol{r}_2|-|\boldsymbol{r}_0|=\sqrt{x_2^2+y_2^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2.47\ m$$

1-9 质点的运动方程为

$$x=-10\ t+30\ t^2$$

和

$$y=15\ t-20\ t^2$$

式中 x、y 的单位为 m,t 的单位为 s.试求:(1) 初速度的大小和方向;(2) 加速度的大小和方向.

分析 由运动方程的分量式可分别求出速度、加速度的分量,再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向.

解 (1) 速度的分量式为

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-10+60\ t$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=15-40\ t$$

当 $t=0$ 时,$v_{0x}=-10\ m\cdot s^{-1}$,$v_{0y}=15\ m\cdot s^{-1}$,则初速度大小为

$$v_0=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=18.0\ m\cdot s^{-1}$$

设 $\boldsymbol{v}_0$ 与 x 轴的夹角为 α,则

$$\tan\alpha=\frac{v_{0y}}{v_{0x}}=-\frac{3}{2}$$

$$\alpha = 123°41'$$

(2) 加速度的分量式为

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 60\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -40\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

则加速度的大小为

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 72.1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

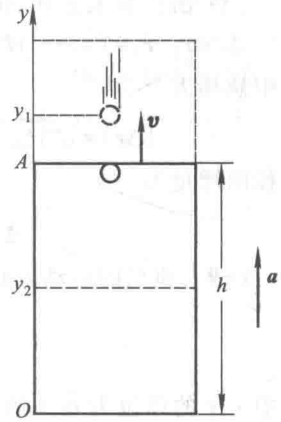
设 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴的夹角为 β,则

$$\tan\beta = \frac{a_y}{a_x} = -\frac{2}{3}$$

$$\beta = -33°41'(\text{或 } 326°19')$$

1-10 一升降机以加速度 $1.22\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$ 上升,当上升速度为 $2.44\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 时,有一螺丝自升降机的天花板上松脱,天花板与升降机的底面相距 2.74 m.计算:(1) 螺丝从天花板落到底面所需要的时间;(2) 螺丝相对升降机外固定柱子的下降距离.

分析 在升降机与螺丝之间有相对运动的情况下,一种处理方法是取地面为参考系,分别讨论升降机竖直向上的匀加速度运动和初速不为零的螺丝的自由落体运动,列出这两种运动在同一坐标系中的运动方程 $y_1 = y_1(t)$ 和 $y_2 = y_2(t)$,并考虑它们相遇,即位矢相同这一条件,问题即可解;另一种方法是取升降机(或螺丝)为参考系,这时,螺丝(或升降机)相对它作匀加速运动,但是,此加速度应该是相对加速度.升降机厢的高度就是螺丝(或升降机)运动的路程.



习题 1-10 图

解 1 (1) 以地面为参考系,取如图所示的坐标系,升降机与螺丝的运动方程分别为

$$y_1 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$y_2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

当螺丝落至底面时,有 $y_1 = y_2$,即

$$v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = h + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g+a}} = 0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 螺丝相对升降机外固定柱子下降的距离为

$$d = h - y_2 = -v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 = 0.716\ \mathrm{m}$$

解 2 (1) 以升降机为参考系,此时,螺丝相对它的加速度大小 $a' = g + a$,螺丝落至底面时,有

$$0=h-\frac{1}{2}(g+a)t^2$$

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g+a}}=0.705\ \mathrm{s}$$

(2) 由于升降机在 t 时间内上升的高度为

$$h'=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$

则

$$d=h-h'=0.716\ \mathrm{m}$$

1-11 质点沿直线运动,加速度 $a=4-t^2$,式中 a 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$,t 的单位为 s.如果当 $t=3$ s 时,$x=9$ m,$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,求质点的运动方程.

分析 本题属于运动学第二类问题,即已知加速度求速度和运动方程,必须在给定条件下用积分方法解决.由 $a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$和 $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$可得 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$.如$a=a(t)$或 $v=v(t)$,则可两边直接积分.如果 a 或 v 不是时间 t 的显函数,则应经过诸如分离变量或变量代换等数学操作后再进行积分.

解 由分析知,应有

$$\int_{v_0}^{v}\mathrm{d}v=\int_0^t a\mathrm{d}t$$

得

$$v=4t-\frac{1}{3}t^3+v_0 \tag{1}$$

由

$$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v\mathrm{d}t$$

得

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4+v_0t+x_0 \tag{2}$$

将 $t=3$ s 时,$x=9$ m,$v=2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$代入式(1)、(2)得

$$v_0=-1\ \mathrm{m\cdot s^{-1}},\quad x_0=0.75\ \mathrm{m}$$

于是可得质点运动方程为

$$x=2t^2-\frac{1}{12}t^4-t+0.75$$

1-12 一石子从空中由静止下落,由于空气阻力,石子并非作自由落体运动.现已知加速度 $a=A-Bv$,式中 A、B 为常量.求石子的速度和运动方程.

分析 本题亦属于运动学第二类问题,与上题不同之处在于加速度是速度 v 的函数,因此,需将式 $\mathrm{d}v=a(v)\mathrm{d}t$ 分离变量为$\frac{\mathrm{d}v}{a(v)}=\mathrm{d}t$ 后再两边积分.

解 选取石子下落方向为 y 轴正向,下落起点为坐标原点.

(1) 由题意知

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A-Bv \tag{1}$$

用分离变量法把式(1)改写为

$$\frac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\mathrm{d}t \tag{2}$$

将式(2)两边积分并考虑初始条件,有

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{A-Bv}=\int_0^t \mathrm{d}t$$

得石子速度

$$v=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$$

由此可知当,$t\to\infty$ 时,$v\to\frac{A}{B}$为一常量,通常称为极限速度或终极速度.

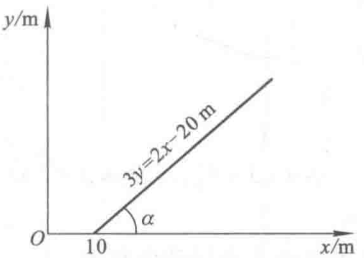
(2) 再由 $v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})$并考虑初始条件有

$$\int_0^y \mathrm{d}y=\int_0^t \frac{A}{B}(1-\mathrm{e}^{-Bt})\mathrm{d}t$$

得石子运动方程

$$y=\frac{A}{B}t+\frac{A}{B^2}(\mathrm{e}^{-Bt}-1)$$

1-13 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$,式中 $\boldsymbol{a}$ 的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.在 $t=0$ 时,其速度为零,位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$.求:(1) 在任意时刻的速度和位置矢量;(2) 质点在 Oxy 平面上的轨迹方程,并画出轨迹的示意图.



习题 1-13 图

分析 与上两题不同处在于质点作平面曲线运动,根据叠加原理,求解时需根据加速度的两个分量 a_x 和 a_y 分别积分,从而得到运动方程 $\boldsymbol{r}$ 的两个分量式 $x(t)$ 和 $y(t)$.由于本题中质点加速度为常矢量,故两次积分后所得运动方程为固定形式,即 $x=x_0+v_{0x}t+\frac{1}{2}a_xt^2$ 和$y=y_0+v_{0y}t+\frac{1}{2}a_yt^2$,两个分运动均为匀变速直线运动.读者不妨自己验证一下.

解 由加速度定义式,根据初始条件 $t_0=0$ 时 $v_0=0$,积分可得

$$\int_0^{\boldsymbol{v}} \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\int_0^t (6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$及初始条件 $t=0$ 时,$\boldsymbol{r}_0=(10\ \mathrm{m})\boldsymbol{i}$,积分可得

$$\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\int_0^t (6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$

$$\boldsymbol{r}=(10+3t^2)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$

由上述结果可得质点运动方程的分量式,即

$$x=10+3t^2$$

$$y=2t^2$$

消去参量 t,可得运动的轨迹方程

$$3y=2x-20\ \text{m}$$

这是一个直线方程.直线斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{2}{3}$,$\alpha=33°41'$.轨迹如图所示.

1-14 质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2.0t\boldsymbol{i}+(19.0-2.0t^2)\boldsymbol{j}$,式中 r 的单位为 m,t 的单位为 s.求:(1) 质点的轨迹方程;(2) 在 $t_1=1.0$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内的平均速度;(3) $t_1=1.0$ s 时的速度及切向和法向加速度;(4) $t=1.0$ s 时质点所在处轨道的曲率半径 ρ.

分析 根据运动方程可直接写出其分量式 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$,从中消去参量 t,即得质点的轨迹方程.平均速度是反映质点在一段时间内位置的变化率,即 $\overline{\boldsymbol{v}}=\Delta\boldsymbol{r}/\Delta t$,它与时间间隔 Δt 的大小有关,当 $\Delta t\to 0$ 时,平均速度的极限即瞬时速度 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$.切向和法向加速度是指在自然坐标下的分矢量 $\boldsymbol{a}_t$ 和 $\boldsymbol{a}_n$,前者只反映质点在切线方向速度大小的变化率,即 $\boldsymbol{a}_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$;后者只反映质点速度方向的变化,它可由总加速度 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}_t$ 得到.在求得 t_1 时刻质点的速度和法向加速度的大小后,可由公式 $a_n=\frac{v^2}{\rho}$ 求 ρ.

解 (1) 由参量方程

$$x=2.0\,t,\quad y=19.0-2.0\,t^2$$

消去 t 得质点的轨迹方程

$$y=19.0-0.50\,x^2$$

(2) 在 $t_1=1.00$ s 到 $t_2=2.0$ s 时间内的平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1}{t_2-t_1}=(2.0\ \text{m})\boldsymbol{i}-(6.0\ \text{m})\boldsymbol{j}$$

(3) 质点在任意时刻的速度和加速度分别为

$$\boldsymbol{v}(t)=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2.0\boldsymbol{i}-4.0t\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}=-(4.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\boldsymbol{j}$$

则 $t_1=1.00$ s 时的速度为

$$\boldsymbol{v}(t)\Big|_{t=1\,\text{s}}=(2.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{i}-(4.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})\boldsymbol{j}$$

切向和法向加速度分别为

$$\boldsymbol{a}_t\Big|_{t=1\,\text{s}}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}\right)\boldsymbol{e}_t=(3.58\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\boldsymbol{e}_t$$

$$\boldsymbol{a}_n=\sqrt{a^2-a_t^2}\ \boldsymbol{e}_n=(1.79\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})\boldsymbol{e}_n$$

(4) $t=1.0$ s 质点的速度大小为

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=4.47\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

则

$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=11.17\ \mathrm{m}$$

1-15 一气球以匀速度 v_0 从地面上升.由于风的影响,它获得了一个水平速度 $v_x=by$(其中 b 为常量,y 为上升高度).求:(1) 气球的运动方程;(2) 气球的水平偏离与高度的关系 $x(y)$.

分析 气球作平面运动,故 $x(t)$ 和 $y(t)$ 即为气球运动方程.依题意 $y=v_0t$,但 $x(t)$ 需通过题给条件求解.即 $v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=by=bv_0t$,分离变量后两边积分可求 $x(t)$.至于第二问实为气球的轨道(迹)方程.无论是运动方程还是轨道方程都应在确定的坐标系中描述.故首先应建立一个恰当的坐标系.

解 设气球出发点为坐标系原点,向上为 y 轴正向.风吹方向为 x 轴正向.

(1) 由题意,$y=v_0t$,而 $v_x=by=bv_0t$,积分得

$$x=\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t v_x\mathrm{d}t=\int_0^t bv_0t\mathrm{d}t=\frac{bv_0}{2}t^2$$

气球的运动方程也可写成矢量式

$$\boldsymbol{r}=\frac{bv_0}{2}t^2\boldsymbol{i}+v_0t\boldsymbol{j}$$

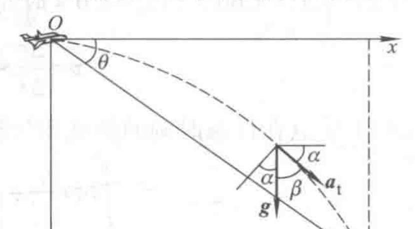
(2) 从运动方程消 t 得运动的轨道方程

$$x=\frac{b}{2v_0}y^2$$

可见气球运动轨迹为一抛物线.

1-16 飞机以 $100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速度沿水平直线飞行,在离地面高为 100 m 时,驾驶员要把物品空投到前方某一地面目标处,问:(1) 此时目标在飞机正下方前多远?(2) 投放物品时,驾驶员看目标的视线和水平线成何角度?(3) 物品投出 2.0 s 后,它的法向加速度和切向加速度各为多少?

分析 物品空投后作平抛运动.忽略空气阻力的条件下,由运动独立性原理知,物品在空中沿水平方向作匀速直线运动,在竖直方向作自由落体运动.到达地面目标时,两方向上运动时间是相同的.因此,分别列出其运动方程,运用时间相等的条件,即可求解.



习题 1-16 图

此外,平抛物体在运动过程中只存在竖直向下的重力加速度.为求特定时刻 t 时物体的切向加速度和法向加速度,只需求出该时刻它们与重力加速度之间的夹角 α 或 β.由图可知,在特定时刻 t,物体的切向加速度和水平线之间的夹角 α,可由此时刻的两速度分量 v_x、v_y 求出,这样,也就可将重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 的切向和法向分量求得.

解 (1) 取如图所示的坐标系,物品下落时在水平和竖直方向的运动方程分别为

$$x=vt,\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$

飞机水平飞行速度 $v=100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$,飞机离地面的高度 $y=100$ m,由上述两式可得目标在飞机正下方前的距离