高等教育“十一五”规划教材
公共基础课教材系列

线性代数

段复建 主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

公共基础课教材系列

线性代数

段复建　主　编

李绍刚　方有康　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书内容包括行列式、矩阵及其运算、线性方程组与矩阵的初等变换、矩阵的相似对角化、二次型以及 MATLAB 数学实验.

本书以线性方程组为主线，以矩阵为主要研究对象，对线性代数的基本概念、基本理论和基本方法进行了阐述，对某些章节适当降低了理论深度，注重数学在各个领域中的应用，加强了对学生计算机应用能力的培养. 本书具有逻辑清晰、注重应用、循序渐进、便于自学的特点，可作为应用型高校大学本科理工类、经管类专业的教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/段复建主编. —北京：科学出版社，2010
（高等教育“十一五”规划教材·公共基础课教材系列）
ISBN 978-7-03-028222-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①段… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 128051 号

策划：吕建忠 孙 杰
责任编辑：王纯刚 / 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

铭浩彩色印装有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2010 年 8 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2010 年 8 月第一次印刷 印张：10 1/2
印数：1—3 000 字数：196 000

定价：20.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈海生〉）
销售部电话 010-62140850 编辑部电话 010-62148322

高等教育“十一五”规划教材（应用型）
编写指导委员会

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，是一切科学的基础，并在各个领域里有着广泛的应用，因此认识数学、学习数学、应用数学是21世纪对所有人才的要求.

随着高等教育的普及，应用型高校也得到了长足的发展，同时也要看到应用型高校与普通高校有着不同的教学模式和教学要求. 本书就是依据理工类、经管类各专业对线性代数课程的规范要求和应用型高校的教学特点，遵循“重视基本概念和基本方法，培养学生的基本能力，力求贴近实际应用”的原则而编写的. 在编写过程中以线性方程组为主线，以矩阵为主要研究对象，对线性代数的基本概念、基本理论和基本方法进行了阐述，对某些章节适当降低了理论深度，淡化了对学生计算技巧，加强了对学生计算机应用能力的培养. 重视例题与习题的选择，使学生能够循序渐进地学习. 另外，为提高学生的能力还编写了有一定难度的总习题. 每章开头部分增加了名人名言. 后面附录为数学家的简介，目的在于提高学生对数学的认识，以及培养学生学习数学的兴趣.

全书共6章，包括行列式、矩阵及其运算、线性方程组与矩阵的初等变换、矩阵的相似对角化、二次型、MATLAB数学实验. 各节后配有习题，大部分章后配有总习题，书后附有主要习题参考答案.

本书由多所高校多位同仁集体创作完成，参与编写的有桂林电子科技大学段复建、张楠、李绍刚，广西大学行健文理学院蒋婵、黄宗文，北京航空航天大学北海学院方有康、吴伟，广西工学院鹿山学院宁桂英，广西师范学院师园学院朱雁. 全书由段复建统稿.

限于编者的水平，书中难免存在不足之处，敬请读者批评指正.

段复建

2010年4月于桂林

目　　录

第1章 行列式

数学中的一些美丽定理具有这样的特性：它们极易从事实中归纳出来，但证明却隐藏的极深。

——高斯

行列式的概念始于 1693 年 4 月，是莱布尼茨与日本数学家关孝和同时提出的，并用来解线性方程组，之后在众多数学家的努力下，逐步形成了行列式理论. 由于行列式具有简洁明了的表达形式和系统规律的运算性质，它成为许多数学领域表述和计算的工具，在其他学科中也有广泛的应用.

1.1 行列式的概念

1.1.1 二阶与三阶行列式的概念

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法消去 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘以上式中的两个方程然后相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$

同理，消去 x_1 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

显然，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},\quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式，引入记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为二阶行列式，其中 a_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2)$ 称为行列式的元素，其第 1 下标 i 为行标，第 2 下标 j 为列标，表示元素 a_{ij} 位于行列式的第 i 行第 j 列.

利用二阶行列式的概念，方程组(1.1)的唯一解可以表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D} \tag{1.3}$$

其中，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，称为系数行列式；$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，即 D_j 是用常数列代替 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.4}$$

可以引入三阶行列式的概念

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}, \end{aligned}$$

且当方程组(1.4)的系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

其中系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$；$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，即 D_j 是用常数列代替 D 中第 j 列元素所得到的行列式.

二阶和三阶行列式的展开式可用对角线法则来记忆，如图 1.1 所示，计算结果称行列式的值.

例 1.1 计算行列式 $D_1=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的值.

解 由二阶行列式定义，$D_1=2\times 3-5\times(-1)=11$；$D_2=ad-bc$.

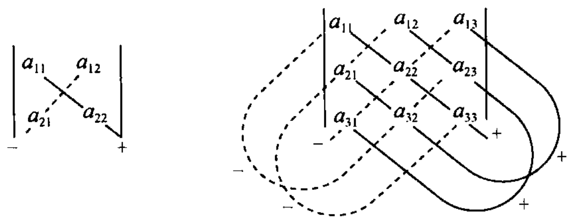

图 1.1

例 1.2 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ 的值.

解 由三阶行列式定义，得

$$D=1\times5\times9+2\times6\times7+3\times4\times8-3\times5\times7-1\times6\times8-2\times4\times9=0.$$

例 1.3 解三元一次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3=-3\\-2x_1+3x_2-x_3=1.\\2x_1-x_2+3x_3=9\end{cases}$

解 系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\-2 & 3 & -1\\2 & -1 & 3\end{vmatrix}=20\neq0$，故方程组有唯一解. 又

$$D_1=\begin{vmatrix}-3 & 1 & -2\\1 & 3 & -1\\9 & -1 & 3\end{vmatrix}=20,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\-2 & 1 & -1\\2 & 9 & 3\end{vmatrix}=40,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\-2 & 3 & 1\\2 & -1 & 9\end{vmatrix}=60,$$

代入式(1.5)得方程组的解为 $x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=3$.

式(1.3)和式(1.5)形式规范，便于记忆，明显地表达了方程组的解与相应的方程组的系数和常数项的关系. 那么 n 个方程 n 个未知数的线性方程组是否也能有类似的结果？答案是肯定的，但如四阶行列式就不能用对角线法则来进行计算，为此引入 n 阶行列式的概念.

1.1.2 n 阶行列式的概念

由二阶和三阶行列式可以得到由 n^2 个数排列成如下形式

$$D_n = |a_{ij}|_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n 阶行列式.

那么如何计算 n 阶行列式的值，下面先介绍余子式和代数余子式的概念.

定义 1.1 在 n 阶行列式 D_n 中，去掉元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列元素后，剩余元素按照原来的相对位置构成的 $n-1$ 阶行列式称为 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}，另记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，则称 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式.

例 1.4 设 $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，求 M_{13}、A_{13}、M_{21}、A_{21}.

解 $M_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$，$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = -3$；

$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$，$A_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -1$.

易验证，二阶行列式与三阶行列式之间有下列关系：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \end{aligned}$$

同理可得 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$ 等类似结论，推广可得 n 阶行列式的展开公式.

定理 1.1 n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其代数余子式的乘积之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n); \tag{1.6}$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n). \tag{1.7}$$

定理的证明略.

该定理称为行列式按行(列)展开定理. 有了这个定理，可以将高阶行列式按某一行(列)展开而降低行列式的阶数，逐步降阶后化简为低阶行列式来求解.

例 1.5 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 的值.

解 (1) 按对角线法则可得 $D = 1\times 2\times 2 - 3\times 2\times(-2) = 4 + 12 = 16$;

(2) 按第一列展开得 $D = 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{3+1}\times\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 12 = 16$;

(3) 按第二行展开得 $D = 2\times(-1)^{2+2}\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\times(2+6) = 16$.

例 1.6 计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按第一行展开得

$$D = 3\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 3\times 2\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times 2\times(-5) = -30.$$

利用行列式展开定理，易知下列结果，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

其中，第一式称为上三角形行列式，第二式称为下三角形行列式，第三式称为主对角形行列式，它们都等于主对角线上所有元素的乘积.

例 1.7 计算行列式$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$的值.

解 $$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 3\times 3 - 5\times 3 = -6.$$

习　　题

1. 填空题.

(1) $\begin{vmatrix} \sin t & \cos t \\ -\cos t & \sin t \end{vmatrix} =$ __________.　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$ __________.

(3) 行列式$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$中元素 5 的余子式为__________，其代数余子式为__________.

(4) 设$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$，则实数 a 和 b 应满足的条件是__________.

(5) 设 $A_{ij}(i，j = 1，2)$为行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$中元素 a_{ij} 的代数余子式，则 $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} =$ __________.

2. 选择题.

(1) 方程$\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x+2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$的根为(　　).

(A)$x_1 = 5，x_2 = -2$　　(B)$x_1 = 3，x_2 = 1$

(C)$x_1 = 2，x_2 = -3$　　(D)$x_1 = -5，x_2 = 2$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} =$ (　　).

(A) $(1+x)(1+y)$　　(B) $y-x$

(C) xy　　(D) 0

(3) 若 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$，则(　　).

(A) $x\neq 0$ 或 $x\neq 2$　　(B) $x\neq 0$ 且 $x\neq 2$

(C) $x\neq 0$　　(D) $x\neq 2$

3. 计算下列行列式.

(1) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}$.

4. 用行列式求下列各方程组的解.

(1) $\begin{cases} 2x_1-9x_2=5 \\ 7x_1+3x_2=-2 \end{cases}$；(2) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=2 \\ 2x_1-x_2-3x_3=0 \\ x_1+2x_2-5x_3=0 \end{cases}$；(3) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1-3x_2+x_3=2 \end{cases}$.

5. 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 3 \end{vmatrix}$，求

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；(2) $M_{12}+M_{22}+M_{42}$.

1.2 行列式的性质

在行列式计算中，以下性质或推论极为重要，可以应用这些性质进行行列式的计算，必须熟记.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 1.1 行列式与它的转置行列式相等，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

性质 1.2 若行列式中有两行(列)相同，则行列式等于零.

性质 1.3 若行列式的某一行(列)元素均是两组数之和，则行列式等于下列两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.4 行列式某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i1} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1.1 一行(列)元素全为零的行列式的值等于零.

推论 1.2 两行(列)元素对应成比例的行列式的值等于零.

性质 1.5 交换行列式的两行(列)，行列式变号.

性质 1.6 把行列式的某一行(列)的所有元素乘以数 k 加到另一行(列)的相应元素上，行列式的值不变，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\xlongequal[\text{到第 } s \text{ 行}]{i\text{ 行}\times k\text{ 加}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{s1} & ka_{i2}+a_{s2} & \cdots & ka_{in}+a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1.7 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\quad(i\neq j);$$
$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\quad(i\neq j).$$

以上性质都可以通过简单的二、三阶行列式计算加以验证，请读者自行完成.

例 1.8 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$ 的值.

解 $D=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times2^3=48.$

例 1.9 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&-1&-1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$ 的值.

解 $D=\begin{vmatrix}0&-1&-1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}$

$=-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=(-1)\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$

例 1.10 试证明 $D=\begin{vmatrix}1&a&b&c+d\\1&b&c&a+d\\1&c&d&a+b\\1&d&a&b+c\end{vmatrix}=0.$