普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

数学分析（第四版）学习指导书

上册

毛羽辉　韩士安　吴畏　编著

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

数学分析(第四版)学习指导书

Shuxue Fenxi(Disi Ban) Xuexi Zhidaoshu

上 册

毛羽辉 韩士安 吴 畏 编著

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第四版)配套的学习指导书,主要是作为学习该课程的课后复习和提高之用。 本书按主教材的章节次序编写，每节包括：内容提要、释疑解惑、范例解析、习题选解，每章后附有该章总练习题的解答及测试题。 本书切合实际，针对学生学习中常见的错误、常出现的问题进行剖析、解答和指导，注意提高学生对数学分析的基本概念、基本理论、基本方法和技能的理解和应用，可作为数学类专业学生学习数学分析的参考书，对教师也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(第四版)学习指导书.上册/毛羽辉,韩士安,吴畏编著.—北京:高等教育出版社.2011.6

ISBN 978-7-04-032719-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①毛… ②韩… ③吴… Ⅲ.①数学分析-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第158163号

策划编辑 李　蕊　　责任编辑 李　蕊　　封面设计 张　楠　　版式设计 王艳红

插图绘制 黄建英　　责任校对 刘　莉　　责任印制 毛斯璐

出版发行 高等教育出版社

社　　址 北京市西城区德外大街4号

邮政编码 100120

印　　刷 北京北苑印刷有限责任公司

开　　本 787mm×960mm 1/16

印　　张 32.25

字　　数 600千字

购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598

网　　址 http://www.hep.edu.cn

http://www.hep.com.cn

网上订购 http://www.landraco.com

http://www.landraco.com.cn

版　　次 2011年6月第1版

印　　次 2011年6月第1次印刷

定　　价 46.50元

物 料 号 32719-00

前 言

数学分析是高等学校数学类专业的一门重要基础课程。本书是与华东师范大学数学系编《数学分析》(第四版)配套的学习指导书,主要作为学习数学分析课程的学生课后复习和提高之用,并希望对任课教师的教学也有参考价值。

本书按节编写,每节包括如下四部分内容:

一、内容提要　系统归纳每节的主要内容,列出该节中的基本概念、定理、公式和重要结论。

二、释疑解惑　针对学生在学习过程中出现的一些常见的、具有共性的疑难问题作出详细的分析与解答。主要包括对课程中某些难度较大的概念的解释、重要定理的条件分析和使用要领、常用方法和技巧的总结、对某些似是而非的论断的辨析,以帮助学生理清容易混淆的概念,澄清误解,更加准确地理解和掌握数学分析的基本理论和方法。

三、范例解析　在每节中选择 5 ~ 8 个中等和中等以上难度的例题,通过分析、解答和注释,介绍典型的解题方法和计算技巧。认真钻研这部分内容,对掌握基本要求、提高分析问题和解决问题的能力会有实质性帮助。

四、习题选解　每节中选出一部分较有难度或有一定代表性的习题,给出解答或提示。对某些习题,还通过分析和加注的方式,对解题的思路、值得注意的解法和容易出现的错误作出说明。对待这部分内容,希望读者遵循“先做后看”的原则,以取得较大的收获。

考虑到本书的对象主要是普通高校数学类专业本科学生,在习题选解部分,我们对解答或提示尽可能地做到详细与完整。这样做有利于学生更好地从解题的全过程中学到解题的思路、方法和技巧。我们希望学生不要依赖于书上所给出的解答,而应将书上的解答作为学习的参考和借鉴。事实上,许多题目往往有多种解法,由于篇幅的限制或者其他的原因,我们只能从中选出容易理解、较为常规的方法加以介绍,但这种解法有时并不是最简捷、最巧妙的。所以我们建议并鼓励学生努力去发现属于自己的更好的解题方法,只有这样,才能真正学好数学分析这门课程。

对每章末的总练习题,考虑到该部分习题往往带有综合的特点,而且具有一定的难度,我们尽可能地给出详细的解答。

本书各章后设有测试题(分 A,B 卷),作为学完各章内容后检测知识掌握程

度之用。书末附有测试题的提示或解答。

附录中收录了几套我校数学分析最近几年的考研试题，并附有解答。

本书分上、下两册，其中第一章至第四章和第十九章至第二十三章由吴畏编写；第五章至第七章、第十二章至第十五章和第十七、十八章由韩士安编写；第八章至第十一章和第十六章由毛羽辉编写；书末附录中的考研题由毛羽辉负责给出解答。

在本书编写过程中，我系同仁柴俊、胡善文、庞学诚等给予了很多具体的帮助和支持。高等教育出版社李蕊女士也为本书的顺利出版做了大量的工作，谨此致谢。

本书内容难免会有疏漏及不妥之处，殷切期望同行和读者不吝赐教。

编　者

2011年3月27日

目　　录

第一章　实数集与函数

§1　实　　数

一、内容提要

（教材上册 §1）

1°　数学分析讨论的基本对象是定义在实数集上的函数. 实数理论是本课程最重要的基础.

2°　本节的目的不是系统地讨论实数理论（详细的论述参看教材上册附录Ⅱ），仅以中学阶段对实数的认识为基础：实数集 **R** 由有理数和无理数组成，任何实数都可以用有限或无限十进小数来表示. 通过规定：

$0=0.0000\cdots$；

$a_0.a_1a_2\cdots a_n=a_0.a_1a_2\cdots(a_n-1)9999\cdots$；

$a_0=(a_0-1).9999\cdots$，　　当 a_0 为正整数时；

$a=-a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，　　当 $a<0$，且 $-a=a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 时，

得到：任何实数都可用一个确定的无限小数来表示.

3°　利用实数的无限小数表示，实数的序关系（即大小关系）得以直观地说明，并且满足

（1）传递性：对于实数 a,b,c，若 $a<b$ 且 $b<c$，则 $a<c$；

（2）三歧性：对于任何两个实数 a 和 b，关系

$$a<b,\quad a=b,\quad b<a$$

中有且只有一个成立.

4°　通过引入实数的不足近似和过剩近似，利用熟知的有理数知识，不但可以直观地说明实数的四则运算，而且对于实数的基本性质（包括下一节的确界原理）的直观理解提供了帮助：

（1）实数集对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的. 加法和乘法运算都满足结合律、交换律以及乘法对加法的分配律. 任何一个实数都有一个相反数，任何一个非零实数都有一个倒数. 0 同任何实数的和为这个数本身，1 同任何实数的积为这个数本身.

(2) 加法和乘法都具有保序性:

若 $a<b$,则对于任何 $c\in\mathbf{R}$,有 $a+c<b+c$;

若 $a<b$ 且 $c>0$,则 $ac<bc$.

(3) 实数集具有阿基米德性:对任何正实数 a 和 b,且 $a<b$,一定存在正整数 n,使得 $b<na$.

(4) 实数集具有稠密性:任何两个不同的实数之间必有另一个实数,该实数既可以是有理数,也可以是无理数.

(5) 实数集与数轴上的点所构成的集合有着一一对应关系.

5° 实数的绝对值定义了实数集上两实数间的距离:实数 a 和 b 的距离为

$$d(a,b)=|a-b|.$$

这是本课程的主要分析工具. 利用绝对值的性质,可以看到此距离满足下面三个基本条件:

(1) 对于任何实数 a 和 b:$d(a,b)\geqslant 0$,且 $d(a,b)=0$ 当且仅当 $a=b$;

(2) 对于任何实数 a 和 b:$d(a,b)=d(b,a)$;

(3) 对于任何实数 a,b 和 c,$d(a,b)\leqslant d(a,c)+d(c,b)$.

6° 教材中的例 2:

"设 $a,b\in\mathbf{R}$. 证明:若对任何正数 ε 有 $a<b+\varepsilon$,则 $a\leqslant b$."

这是一个非常有用的结论,在后面的讨论中经常引用.

二、释疑解惑

问题 1 按照内容提要 2°中的规定,任何有限小数(包括整数)都可以表示为无限循环小数. 如何将非有限小数的有理数表示为无限循环小数?

答 我们要用到正整数的下面这个性质:对于任何正整数 m 和 n,存在整数 $s\geqslant 0$ 及整数 r:$0\leqslant r<n$,使得

$$m=sn+r. \tag{1.1}$$

因为有理数可以用分数形式 $\frac{p}{q}$(其中 p,q 为互质的整数,且 $q\neq 0$)来表示,按内容提要 2°中的规定,我们只要对非有限小数的有理数 $x=\frac{p}{q}$ 在 $p>0$ 且 $q>0$ 的情形进行说明即可.

根据(1.1),存在整数 $x_0\geqslant 0$ 及整数 r_0:$0\leqslant r_0<q$,使得

$$p=x_0q+r_0.$$

于是

$$x=\frac{p}{q}=x_0+\frac{r_0}{q}.$$

因为 x 是非有限小数，所以 $r_0 \neq 0$. 又利用(1.1)及 $0 < r_0 < q$，存在整数 $x_1 : 0 \leqslant x_1 \leqslant 9$ 及整数 $r_1 : 0 < r_1 < q$，使得

$$10r_0 = x_1 q + r_1.$$

于是

$$x = \frac{p}{q} = x_0 + \frac{1}{10} \cdot \frac{10r_0}{q} = x_0 + \frac{1}{10} \cdot \left(x_1 + \frac{r_1}{q}\right) = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{q}.$$

同理，存在整数 $x_2 : 0 \leqslant x_2 \leqslant 9$ 及整数 $r_2 : 0 < r_2 < q$，使得

$$10r_1 = x_2 q + r_2.$$

于是

$$x = \frac{p}{q} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{r_2}{q}.$$

重复上述步骤得到

$$x = \frac{p}{q} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^n} \cdot \frac{r_n}{q},$$

其中 $0 < r_n < q$. 由于所有余数 r_n 都是整数 $1, 2, \cdots, q-1$ 中的一个，r_n 的值一定会从某个 n 开始重复出现，从而导致 x_n 从某个 n 开始重复出现，因此

$$x = \frac{p}{q} = x_0 . x_1 x_2 \cdots x_n \cdots$$

为无限循环小数.

问题 2 如何利用实数的不足近似或过剩近似直观地理解 $\sqrt{2} + \pi$ 的值？

答 将 $\sqrt{2}$ 和 π 表示为无限小数：

$$\sqrt{2} = 1.414213562\cdots, \quad \pi = 3.141592654\cdots.$$

算出 $n(=1, 2, \cdots)$ 位不足近似之和：

$$\begin{gathered}
\sqrt{2}_1 + \pi_1 = 1.4 + 3.1 = 4.5, \\
\sqrt{2}_2 + \pi_2 = 1.41 + 3.14 = 4.55, \\
\sqrt{2}_3 + \pi_3 = 1.414 + 3.141 = 4.555, \\
\sqrt{2}_4 + \pi_4 = 1.4142 + 3.1415 = 4.5557, \\
\sqrt{2}_5 + \pi_5 = 1.41421 + 3.14159 = 4.55580, \\
\sqrt{2}_6 + \pi_6 = 1.414213 + 3.141592 = 4.555805, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}$$

其中 $\sqrt{2}_n$ 和 π_n 分别表示 $\sqrt{2}$ 和 π 的 n 位不足近似. 所以 $\sqrt{2} + \pi = 4.55580621\cdots$.

问题 3 如何利用实数的不足近似和过剩近似，直观地理解实数的阿基米德性？

答 对于任何正整数 m 和 n，我们知道一定存在整数 $s \geqslant 0$ 及整数 $r : 0 \leqslant r < n$，使得

$$m = sn + r.$$

因此有

$$m = sn + r < sn + n = (s+1)n,$$

即:整数集合具有阿基米德性.

如果 a 和 b 是两个正有理数:$a<b, a=\frac{p}{q}, b=\frac{r}{s}$,其中 p,q,r,s 都是正整数.由 $a<b$ 得到 $ps<qr$. 因为整数集合具有阿基米德性,所以存在正整数 n,使得

$$qr < n(ps),$$

即:$b=\frac{r}{s}=\frac{qr}{ps}\cdot a<na$. 因此,有理数集合具有阿基米德性.

现在假定 a 和 b 是两个正实数,且 $a<b$. 用 a_k 和 $\bar{b}_k$ 分别表示 a 和 b 的 k 位不足近似和过剩近似. 因为 $a>0$,所以存在 k_0,使得 $a_{k_0}>0$,且有

$$0 < a_{k_0} \leqslant a < b \leqslant \bar{b}_{k_0}.$$

利用有理数集合的阿基米德性,存在正整数 n,使得 $\bar{b}_{k_0}<na_{k_0}$. 因此,$b\leqslant \bar{b}_{k_0}<na_{k_0}<na$,即:实数集合具有阿基米德性.

三、范例解析

例 1 设$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,且 $bd>0$. 证明:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}. \tag{1.2}$$

证 不妨设 $b>0$ 且 $d>0$(b 和 d 同为负时可类似证明). 因为$\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$,所以

$$ad < bc.$$

从而

$$a(b+d) < b(a+c), \quad (a+c)d < (b+d)c,$$

即

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad 且 \quad \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

因此(1.2)得证. □

例 2 证明:对任何实数 a 和 b 及正整数 n 成立

$$|(a+b)^n - a^n| \leqslant (|a|+|b|)^n - |a|^n.$$

证 根据二项式展开定理,有

$$(a+b)^n = a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

所以

$$(a+b)^n - a^n = \mathrm{C}_n^1 a^{n-1}b + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

从而利用三角形不等式得到

$$\begin{aligned}|(a+b)^n-a^n| &= |C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n| \\ &\leqslant C_n^1|a|^{n-1}|b|+\cdots+C_n^{n-1}|a||b|^{n-1}+|b|^n \\ &= (|a|^n+C_n^1|a|^{n-1}|b|+\cdots+ \\ &\quad C_n^{n-1}|a||b|^{n-1}+|b|^n)-|a|^n \\ &= (|a|+|b|)^n-|a|^n.\end{aligned}$$

□

例 3 证明:若 $a_i>-1(i=1,2,\cdots,n)$ 且同号,则成立不等式

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 1+(a_1+a_2+\cdots+a_n). \tag{1.3}$$

证 (利用数学归纳法证明)当 $n=1$ 时不等式(1.3)显然成立. 假设 $n=k$ 时不等式(1.3)成立,即:若 $a_i>-1(i=1,2,\cdots,k)$ 且同号,则

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)\geqslant 1+(a_1+a_2+\cdots+a_k),$$

则当 $n=k+1$ 时,对于 $a_i>-1(i=1,2,\cdots,k+1)$ 且同号,利用归纳假设,我们有

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_k)(1+a_{k+1}) \\ \geqslant&[1+(a_1+a_2+\cdots+a_k)](1+a_{k+1}) \\ =&1+(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})+(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1} \\ \geqslant&1+(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}).\end{aligned}$$

□

注 (1) 数学归纳法是数学证明中常用的方法之一:设有一个与正整数 n 有关的命题,如果当 n 取第一个值时命题成立(对于一般数列取值为 1,但也有特殊情况),且在假设 $n=k$(k 为大于或等于 n 的第一个值的正整数)时命题成立的条件下,可以证明当 $n=k+1$ 时命题也成立,则可断定命题对于从第一个值起的所有正整数都成立.

(2) 在不等式(1.3)中,令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=h>-1$,则得到伯努利(Bernoulli)不等式:

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh\quad(h>-1,\quad n\in\mathbf{N}_+). \tag{1.4}$$

例 4 (算术平均值-几何平均值不等式)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个非负实数,则不等式

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \tag{1.5}$$

成立,并且等号成立当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

证 易见当 $n=1$ 不等式(1.5)成立,事实上此时等号成立. 假设 $n=k$ 时不等式(1.5)成立,即:若 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是 k 个非负实数,那么

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}\geqslant\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}.$$

现在讨论 $n=k+1$. 不妨设 $a_i=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}\}$,并记

$$b_1=a_1,\cdots,b_{i-1}=a_{i-1},b_i=a_{i+1},\cdots,b_k=a_{k+1},b_{k+1}=a_i,$$

那么

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}&=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}{k+1}\\&=\frac{k(b_1+b_2+\cdots+b_k)+kb_{k+1}}{k(k+1)}\\&=\frac{(k+1)(b_1+b_2+\cdots+b_k)+kb_{k+1}-(b_1+b_2+\cdots+b_k)}{k(k+1)}\\&=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{k}+\frac{kb_{k+1}-(b_1+b_2+\cdots+b_k)}{k(k+1)}.\end{aligned}$$

记

$$x=\frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{k},\quad y=\frac{kb_{k+1}-(b_1+b_2+\cdots+b_k)}{k(k+1)},$$

则 $x\geqslant0$ 且 $y\geqslant0$. 根据二项式展开定理得到

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1}&=x^{k+1}+C_{k+1}^1x^ky^1+\cdots+y^{k+1}\\&\geqslant x^{k+1}+C_{k+1}^1x^ky\\&=x^k(x+(k+1)y)=x^kb_{k+1},\end{aligned}\tag{1.6}$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{k+1}}{k+1}&=x+y=\sqrt[k+1]{(x+y)^{k+1}}\geqslant\sqrt[k+1]{x^kb_{k+1}}\\&\geqslant\sqrt[k+1]{b_1b_2\cdots b_kb_{k+1}}=\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}},\end{aligned}\tag{1.7}$$

其中第二个不等式成立是由于归纳假设.

对于不等式(1.5)的等号成立条件也可以由数学归纳法得到. 当 $n=1$ 时不等式(1.5)是一个等式且只有一个数,条件自然满足. 假设 $n=k$ 时结论成立. 对于 $n=k+1$ 的情形,从前面的推导我们看到:(1.6)成为等式当且仅当 $y=0$,即

$$kb_{k+1}-(b_1+b_2+\cdots+b_k)=0;$$

而(1.7)中的第二个不等号变成等号当且仅当

$$b_1=b_2=\cdots=b_k.$$

所以,$n=k+1$ 时等号成立当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_{k+1}$,即:$a_1=a_2=\cdots=a_{k+1}$. □

四、习题选解

(教材上册第 4 页)

5. 证明:对任何 $x\in\mathbf{R}$,有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$;

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$.

并说明等号何时成立.

证 (1) 根据绝对值三角不等式,有

$$|x-1|+|x-2|\geqslant|(x-1)-(x-2)|=1.$$

上式等号成立当且仅当 $x-1$ 与 $x-2$ 异号,所以等号成立当且仅当 $1\leqslant x\leqslant 2$.

(2) 根据绝对值三角不等式,有

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant|x-1|+|x-3|\geqslant|(x-1)-(x-3)|=2.$$

上面第一个等号成立当且仅当 $x=2$,第二个等号成立当且仅当 $x-1$ 与 $x-3$ 异号(即 $1\leqslant x\leqslant 3$),所以等号成立当且仅当 $x=2$(即上面两个等号必须同时成立). □

6. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$($\mathbf{R}_+$ 表示全体正实数的集合).证明:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\leqslant|b-c|.$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证 根据实数的序关系及运算性质,我们有

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|&=\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\\&=\frac{|b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\cdot|b-c|\\&\leqslant\frac{|b|+|c|}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}\cdot|b-c|\\&\leqslant|b-c|.\end{aligned}$$

□

不等式的几何意义:在平面直角坐标系中考虑 $O(0,0)$,$A(a,b)$ 及 $B(a,c)$ 三点,则 $\sqrt{a^2+b^2}$,$\sqrt{a^2+c^2}$ 以及 $|b-c|$ 分别为线段 OA,OB 以及 AB 的长.因此,该不等式表达了线段 OA 的长与线段 OB 的长的差不超过线段 AB 的长.它是平面上任意三点所确定的线段中任意两条线段长度的差不超过第三条线段的长度这一事实的体现.

8. 设 p 为正整数.证明:若 p 不是完全平方数,则 $\sqrt{p}$ 是无理数.

证 (利用反证法证明)假设 $\sqrt{p}$ 不是无理数,即 $\sqrt{p}$ 是有理数.设 $\sqrt{p}=\frac{a}{b}$,其中 a 和 b 是互质的正整数,则存在非负整数 q_1 和 r_1,且 $0<r_1<b$,使得

$$a=q_1b+r_1\quad 即\quad r_1=a+(-q_1)b.$$

对于 b 和 r_1,存在非负整数 q_2 和 r_2,且 $0<r_2<r_1$,使得

$$b=q_2r_1+r_2$$

即
$$\begin{aligned} r_2 &= b+(-q_2)r_1 = b+(-q_2)[a+(-q_1)b] \\ &= (-q_2)a+(1+q_1q_2)b. \end{aligned}$$
对于 r_1 和 r_2,存在非负整数 q_3 和 r_3,且 $0<r_3<r_2$,使得
$$r_1 = q_3r_2+r_3$$
即
$$\begin{aligned} r_3 = r_1-q_3r_2 &= [a+(-q_1)b]-q_3[(-q_2)a+(1+q_1q_2)b] \\ &= [1+q_2q_3]a+[(-q_1)+(-q_3)+(-q_1q_2q_3)]b. \end{aligned}$$
对于 r_2 和 r_3 等按照这种方式一直进行下去. 因为 r_n 是正整数且比 r_{n-1} 至少减 1,所以进行到某 r_k 时有 $r_k>0$ 而 $r_{k+1}=0$,即
$$r_{k-2} = q_kr_{k-1}+r_k, \tag{1.8}$$
且存在整数 s 和 t,使得
$$r_k = sa+tb,$$
而
$$r_{k-1} = q_{k+1}r_k,$$
其中 $r_{k-2},r_{k-1},r_k,q_k,q_{k+1}$ 都是非负整数. 因此,r_k 整除 r_{k-1}. 并按照(1.8)等一步步倒推回去,可以看到:r_k 整除 r_{k-2},r_k 整除 r_{k-3},……,r_k 整除 r_1,从而 r_k 整除 b 及 r_k 整除 a.

因为 a 和 b 是互质的正整数,所以 $r_k=1$,从而得到
$$sa+tb=1.$$
上式两边同时乘以 a,并利用$\sqrt{p}=\dfrac{a}{b}$,得
$$(spb+ta)b=a,$$
这表明 b 整除 a,从而 $p=\left(\dfrac{a}{b}\right)^2$ 是一个完全平方数. 这与题设 p 不是完全平方数相矛盾. □

注 反证法属于“间接证明法”,是从反面的角度思考问题的证明方法,即:肯定题设而否定结论,从而导出矛盾推理而得。法国数学家阿达玛(Hadamard)对反证法的实质作过这样的概括:“若肯定定理的假设而否定其结论,就会导致矛盾”。具体地讲,反证法就是从否定命题的结论入手,并把对命题结论的否定作为推理的已知条件,进行正确的逻辑推理,使之得到与已知条件、已知公理、定理、法则或者已经证明为正确的命题等相矛盾,矛盾的原因是假设不成立,所以肯定了命题的结论,从而使命题获得了证明。反证法也是数学证明中常用的方法之一.

§2 数集·确界原理

一、内容提要

（教材上册§2）

1° 区间是数学分析中重要的数集，该课程讨论的基本对象是定义在区间上的函数. 不同类型的区间具有不同的性质和特征，因而其上的函数在性质上会有很大的差异.

有限区间：对于 $a,b\in\mathbf{R}$，有

开区间：(a,b)， 闭区间：$[a,b]$， 半开半闭区间：$(a,b]$，$[a,b)$.

无限区间：对于 $a\in\mathbf{R}$，有

$$(-\infty,a],(-\infty,a),[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,+\infty).$$

2° 本节中的邻域概念是建立实数集上极限理论的基础. 某点的邻域是在该点附近的点的集合. 对于 $a,\delta\in\mathbf{R}$ 且 $\delta>0$，有

点 a 的 δ 邻域：$U(a;\delta)$， 点 a 的空心 δ 邻域：$U^{\circ}(a;\delta)$，

点 a 的 δ 右邻域：$U_{+}(a;\delta)$， 点 a 的空心 δ 右邻域：$U_{+}^{\circ}(a;\delta)$，

点 a 的 δ 左邻域：$U_{-}(a;\delta)$， 点 a 的空心 δ 左邻域：$U_{-}^{\circ}(a;\delta)$.

3° 有界集和无界集是本节中的关键概念：对于数集 S，如果存在数 $M(L)$，使得对一切 $x\in S$，都有 $x\leqslant M(x\geqslant L)$ 成立，则称 S 为有上界（下界）的数集，此时数 $M(L)$ 称为 S 的一个上界（下界）. 若数集 S 既有上界又有下界，则称 S 为有界集；否则称 S 为无界集.

4° 确界是数学分析中的一个重要概念：对于数集 S，如果存在数 $\eta(\xi)$ 满足

（1）对一切 $x\in S$，有 $x\leqslant\eta(x\geqslant\xi)$；

（2）对任何 $\alpha<\eta(\beta>\xi)$，存在 $x_0\in S$，使得 $x_0>\alpha(x_0<\beta)$，

则称数 $\eta(\xi)$ 为数集 S 的上确界（下确界），记作 $\eta=\sup S(\xi=\inf S)$.

5° 确界原理：任何非空的有上界（下界）的数集必有上确界（下确界）. 确界原理是实数集的一个非常重要的特征. 有理数集就不具有这样的性质，这也导致了引入无理数的必要性.

二、释疑解惑

问题1 无界集的定义是通过不是有界集来定义的，即使用了原叙述的否定：若数集 S 没有上界或没有下界，则称 S 为无界集. 在实际说明一个数集是无界集的时候，如何利用该定义？

答 对于数学中的命题和叙述，我们经常会碰到其否定的命题和叙述. 例