经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–4

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著

人民教育出版社

A版

数学

坐标系与参数方程

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4

坐标系与参数方程

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 4-4

A 版

坐标系与参数方程

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

*

人民教育出版社 出版

(北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编:100081)

网 址:http://www.pep.com.cn

广 东 教 材 出 版 中 心 代 印

广 东 省 新 华 书 店 发 行

中山新华商务印刷有限公司印装

*

开本:890毫米×1 240毫米　1/16　印 张:3.25　字数:67 000

2007年1月第2版　2011年12月第12次印刷

印数:1,901,591 — 2,227,190册

ISBN 978-7-107-20284-1/G·13334(课)　定价:3.46元

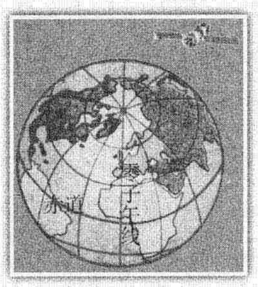
(含有配套光盘的教材,另加光盘价格5.00元)

批准文号:粤价[2012] 18号　举报电话:12358

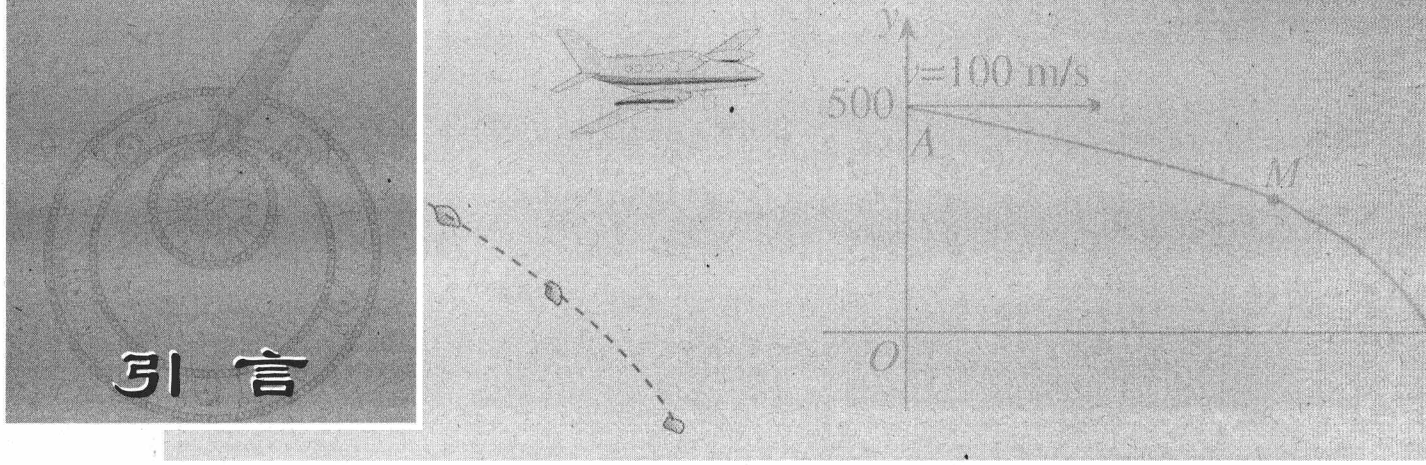
主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：吕伟泉
主要编者：郭慧清　张文韬　黄智军　李　鸿
责任编辑：王　嵘　张唯一
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：吴　敬

目 录



引言



本专题是高中数学课程选修系列 4 中的第 4 个专题，包括“坐标系”“参数方程”两个部分的内容.

坐标法思想是 17 世纪的数学家笛卡儿、费马提出的. 坐标法思想为牛顿、莱布尼茨创立微积分奠定了基础，它是近代数学发展的开端，已成为现代数学最重要的基本思想之一. 坐标系是联系几何与代数的桥梁，是数形结合的有力工具，利用它可以使数与形相互转化.

同学们已学过数轴、平面直角坐标系、空间直角坐标系的初步知识. 在此基础上，本专题将进一步介绍极坐标系、空间柱坐标系、球坐标系等，展示不同坐标系在刻画几何图形或描述自然现象中的作用，拓广坐标系的知识；通过介绍简单曲线的极坐标方程等知识，使同学们更全面地理解坐标法思想.

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程，是曲线在同一坐标系下的另一种表示形式. 本专题通过实例展示了在建立曲线方程过程中，引进参数的意义和作用. 某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便. 根据曲线的特点，选取适当曲线方程的表示形式，体现了解决问题中数学方法的灵活性.

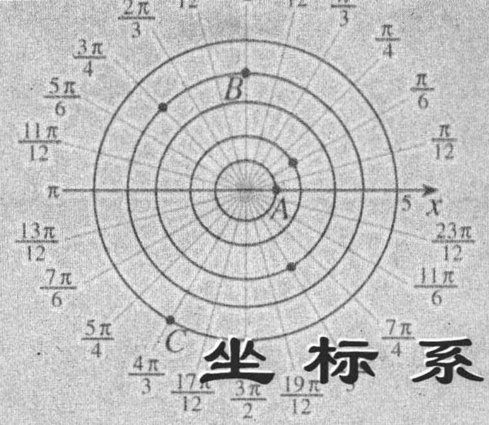
作为参数方程的应用实例，本专题介绍了渐开线与摆线，为同学们提供欣赏各种曲线（如心脏线、螺线、玫瑰线、叶形线、平摆线、渐开线等）的机会，从中体会参数对研究这些曲线的作用.

使用信息技术研究本专题的内容，例如用计算机软件认识参数意义，观察渐开线与平摆线的生成过程等，可以使同学们更直观、有效地认识各种曲线的生成过程、性质和实际应用.

本专题力求通过实际问题，深入浅出地帮助同学们理解数学概念；通过“思考”“探究”“信息技术应用”等，启发和引导同学们的数学思维，养成主动探索，积极思考的好习惯.

祝愿同学们通过本专题的学习，不仅对数学产生更大的兴趣，学到更多的数学知识，提高自己利用数学知识解决实际问题的能力，形成对数学更加全面的了解，而且逐步认识到数学的科学价值、应用价值和文化价值.

第一讲 坐标系



我们知道，通过直角坐标系，平面上的点与坐标（有序实数对）、曲线与方程建立了联系，从而实现了数与形的结合. 根据几何对象的特征，选择适当的坐标系，建立它的方程，通过方程研究它的性质及与其他几何图形的关系，这就是研究几何问题的坐标法.

由于现实问题的复杂性，有时在直角坐标系下建立几何图形的方程并不方便. 为便于用代数方法研究几何图形，需要建立不同的坐标系. 在建立某些几何图形的方程时，用极坐标系、柱坐标系和球坐标系会更加方便.

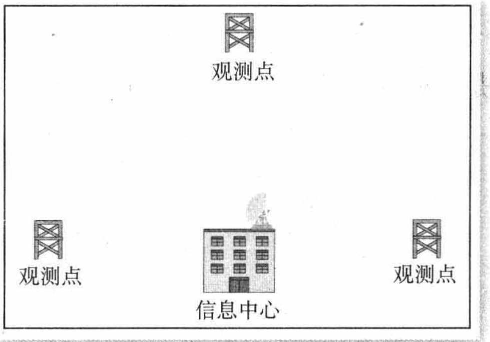
下面我们先回顾直角坐标系中解决实际问题的过程.

一 平面直角坐标系

1. 平面直角坐标系

思考

某信息中心接到位于正东、正西、正北方向三个观测点的报告：正西、正北两个观测点同时听到一声巨响，正东观测点听到巨响的时间比它们晚4 s. 已知各观测点到中心的距离都是1 020 m. 试确定巨响发生的位置.（假定声音传播的速度为340 m/s，各观测点均在同一平面上.）



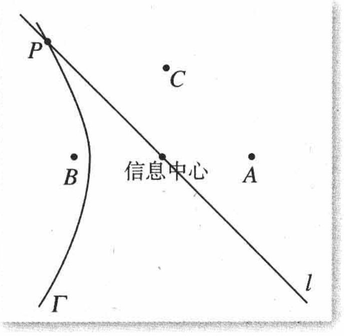


图 1-1

如图 1-1，将三个观测点记为 A，B，C. 由于 B，C 同时听到由点 P 发出的响声，因此 $|PB|=|PC|$，说明点 P 在线段 BC 的垂直平分线 l 上；由于 A 听到响声的时间比 B，C 晚 4 s，因此 $|PA|-|PB|=4\times340=1\ 360<|AB|$，说明点 P 在以点 A，B 为焦点的双曲线 Γ 上. 所以，点 P 就是直线 l 与双曲线 Γ 的交点.

下面利用问题的几何特征，通过建立适当的直角坐标系，具体确定点 P 的位置.

思考

怎样建立直角坐标系才有利于我们解决这个问题?

由于点 P 是直线 l 与双曲线 Γ 的交点，因此，直角坐标系的选取应尽量使直线 l 和双曲线 Γ 的方程简单，以便于解方程组求点 P 的坐标.

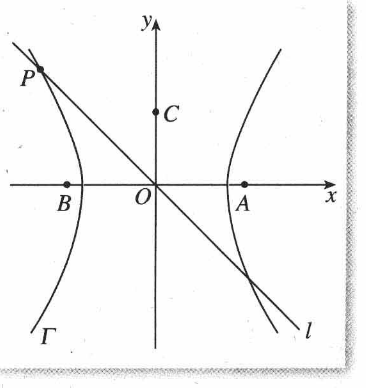


图 1-2

如图 1-2，以信息中心为原点 O，直线 BA 为 x 轴，建立直角坐标系. 由已知，点 A，B，C 的坐标分别为

$$A(1\ 020,\ 0),\ B(-1\ 020,\ 0),\ C(0,\ 1\ 020),$$

于是，直线 l 的方程为

$$y=-x.$$

设双曲线 Γ 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0),$$

由已知得 $a=680$，$c=1\ 020$，

$$b^2=c^2-a^2=1\ 020^2-680^2=5\times340^2,$$

于是，双曲线 Γ 的方程为

$$\frac{x^2}{680^2}-\frac{y^2}{5\times340^2}=1.$$

将 $y=-x$ 代入上述方程，解得 $x=\pm680\sqrt{5}$，$y=\mp680\sqrt{5}$.

由已知，响声应在双曲线 Γ 的左半支，因此点 P 的坐标为 $(-680\sqrt{5},\ 680\sqrt{5})$. 从而

$$|PO|=680\sqrt{10}(\mathrm{m}).$$

因此，巨响在信息中心的西偏北 45°方向，距离 $680\sqrt{10}$ m处.

思考

我们以信息中心为基点，用角和距离刻画了点 P 的位置. 这种方法与用直角坐标刻画点 P 的位置有什么区别和联系? 你认为哪种方法更方便?

上述问题的解决充分体现了坐标法思想.

例 1 已知$\triangle ABC$的三边a，b，c满足$b^2+c^2=5a^2$，BE，CF分别为边AC，AB上的中线，建立适当的平面直角坐标系探究BE与CF的位置关系.

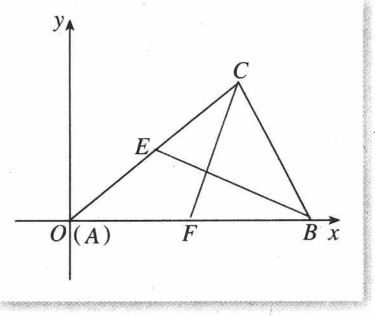


图 1-3

解：如图 1-3，以$\triangle ABC$的顶点A为原点O，边AB所在的直线为x轴，建立直角坐标系. 由已知，点A，B，F的坐标分别为

$$A(0,\ 0),\ B(c,\ 0),\ F\left(\frac{c}{2},\ 0\right).$$

设点C的坐标为$(x,\ y)$，则点E的坐标为$\left(\frac{x}{2},\ \frac{y}{2}\right)$.

由$b^2+c^2=5a^2$，可得到$|AC|^2+|AB|^2=5|BC|^2$，即

$$x^2+y^2+c^2=5[(x-c)^2+y^2].$$

整理得

$$2x^2+2y^2+2c^2-5cx=0.$$

因为

$$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{x}{2}-c,\ \frac{y}{2}\right),\ \overrightarrow{CF}=\left(\frac{c}{2}-x,\ -y\right),$$

所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CF}&=\left(\frac{x}{2}-c\right)\left(\frac{c}{2}-x\right)-\frac{y^2}{2}\\&=-\frac{1}{4}(2x^2+2y^2+2c^2-5cx)\\&=0.\end{aligned}$$

因此，BE与CF互相垂直.

探究

你能建立与上述解答中不同的直角坐标系解决这个问题吗？比较不同的直角坐标系下解决问题的过程，你认为建立直角坐标系时应注意些什么？

2. 平面直角坐标系中的伸缩变换

在三角函数图象的学习中，我们研究过下面一些问题：

(1) 怎样由正弦曲线$y=\sin x$得到曲线$y=\sin 2x$？

如图 1-4，在正弦曲线$y=\sin x$上任取一点$P(x,\ y)$，保持纵坐标y不变，将横坐标x缩为原来的$\frac{1}{2}$，那么正弦曲线$y=\sin x$就变成曲线$y=\sin 2x$.

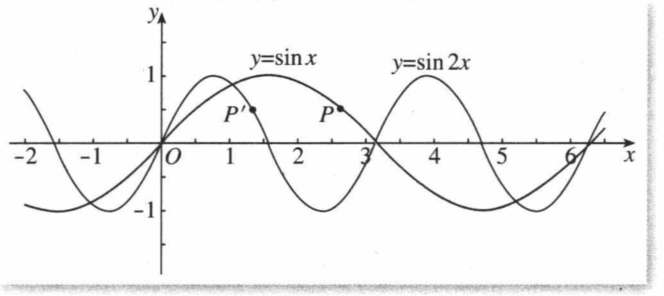


图 1-4

思考

从平面直角坐标系中的点的对应关系出发，你认为“保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的$\frac{1}{2}$”的实质是什么？

实际上，“保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的$\frac{1}{2}$”是一个坐标的压缩变换，即

设 $P(x,\ y)$是平面直角坐标系中的任意一点，保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的$\frac{1}{2}$，得到点 $P'(x',\ y')$，那么

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x, \\ y'=y. \end{cases} \quad ①$$

我们把①式叫做平面直角坐标系中的一个坐标压缩变换.

(2) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin x$?

如图 1-5，在正弦曲线 $y=\sin x$ 上任取一点 $P(x,\ y)$，保持横坐标 x 不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍，那么正弦曲线 $y=\sin x$ 就变成曲线 $y=3\sin x$.

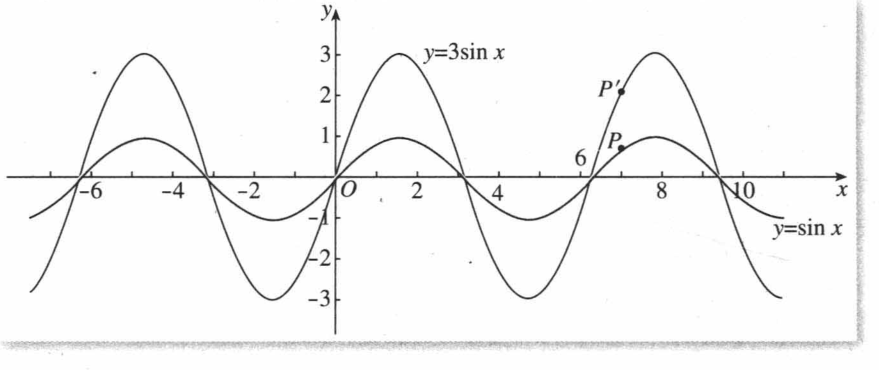


图 1-5

思考

从平面直角坐标系中的点的对应关系出发，你认为“保持横坐标 x 不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍”的实质是什么？

实际上，“保持横坐标 x 不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍”是一个坐标的伸长变换，即

设 $P(x, y)$是平面直角坐标系中的任意一点，保持横坐标 x 不变，将纵坐标 y 伸长为原来的 3 倍，得到点 $P'(x', y')$，那么

$$\begin{cases} x'=x, \\ y'=3y. \end{cases} \qquad ②$$

我们把②式叫做平面直角坐标系中的一个坐标伸长变换.

(3) 怎样由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线 $y=3\sin 2x$?

实际上，这是上述 (1)(2) 的“合成”：如图 1-6，先保持纵坐标 y 不变，将横坐标 x 缩为原来的$\frac{1}{2}$；在此基础上再将纵坐标 y 变为原来的 3 倍，就可以由正弦曲线 $y=\sin x$ 得到曲线$y=3\sin 2x$.

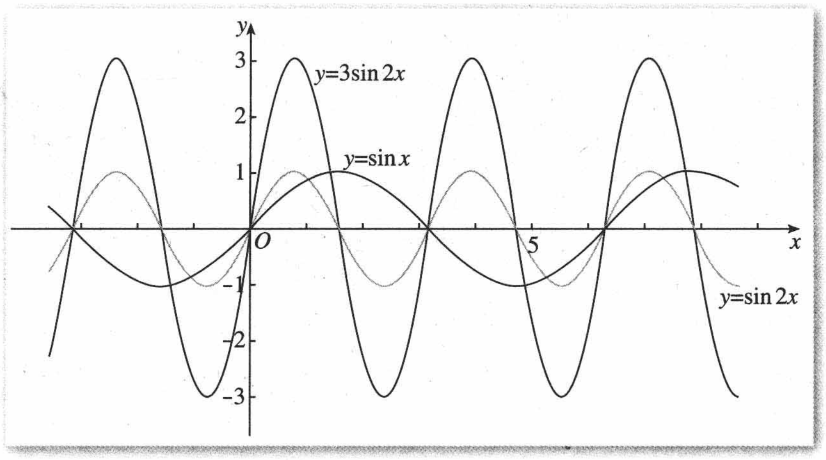


图 1-6

与上述讨论一样，设平面直角坐标系中的任意一点 $P(x, y)$经过上述变换后变为点 $P'(x', y')$，那么

$$\begin{cases} x'=\frac{1}{2}x, \\ y'=3y. \end{cases} \qquad ③$$

我们把③式叫做平面直角坐标系中的坐标伸缩变换.

下面给出平面直角坐标系中坐标伸缩变换的定义.

定义 设点 $P(x, y)$ 是平面直角坐标系中的任意一点，在变换

$$\varphi:\begin{cases}x'=\lambda\cdot x, & (\lambda>0),\\ y'=\mu\cdot y, & (\mu>0)\end{cases} \quad ④$$

的作用下，点 $P(x, y)$ 对应到点 $P'(x', y')$，称 φ 为**平面直角坐标系中的坐标伸缩变换，简称伸缩变换.**

上述①②③都是坐标伸缩变换．在它们的作用下，可以实现平面图形的伸缩．例如，在伸缩变换③的作用下，正弦曲线 $y=\sin x$ 变换为曲线 $y=3\sin 2x$．因此，平面图形的伸缩变换可以用坐标伸缩变换来表示.

例 2 在平面直角坐标系中，求下列方程所对应的图形经过伸缩变换

$$\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$$

后的图形.

(1) $2x+3y=0$； (2) $x^2+y^2=1$.

解：(1) 由伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ 得到

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}x',\\ y=\dfrac{1}{3}y'.\end{cases} \quad ⑤$$

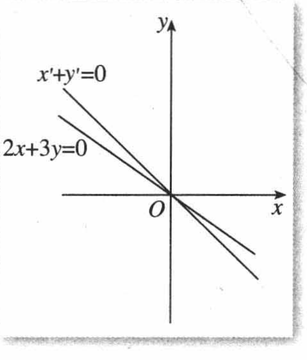


图 1-7

将⑤代入 $2x+3y=0$，得到经过伸缩变换后的图形的方程是

$$x'+y'=0.$$

因此，经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后，直线 $2x+3y=0$ 变成直线 $x'+y'=0$(图 1-7).

(2) 将⑤代入 $x^2+y^2=1$，得到经过伸缩变换后的图形的方程是

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{9}=1.$$

因此，经过伸缩变换 $\begin{cases}x'=2x,\\ y'=3y\end{cases}$ 后，圆 $x^2+y^2=1$ 变成椭圆 $\dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{9}=1$(图 1-8).

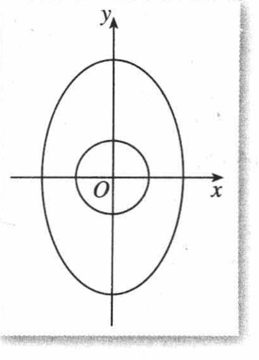


图 1-8

由上所述可以发现，在伸缩变换④下，直线仍然变成直线，而圆可以变成椭圆.

思考

在伸缩变换④下，椭圆是否可以变成圆？抛物线、双曲线变成什么曲线？

习题1.1

1. 两个定点的距离为 6，点 M 到这两个定点的距离的平方和为 26，求点 M 的轨迹.
2. 已知点 A 为定点，线段 BC 在定直线 l 上滑动，已知 $|BC|=4$，点 A 到直线 l 的距离为 3，求$\triangle ABC$ 的外心的轨迹方程.
3. 用两种以上的方法证明：三角形的三条高线交于一点.
4. 在同一平面直角坐标系中，求下列方程所对应的图形经过伸缩变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{3}x, \\ y'=\dfrac{1}{2}y \end{cases}$$

后的图形.

(1) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$；　(2) $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{12}=1$；　(3) $y^2=2x$.

5. 在同一平面直角坐标系中，经过伸缩变换$\begin{cases} x'=3x, \\ y'=y \end{cases}$后，曲线 C 变为曲线 $x'^2+9y'^2=9$，求曲线 C 的方程并画出图象.
6. 在同一平面直角坐标系中，求满足下列图形变换的伸缩变换：

(1) 直线 $x-2y=2$ 变成直线 $2x'-y'=4$；

(2) 曲线 $x^2-y^2-2x=0$ 变成曲线 $x'^2-16y'^2-4x'=0$.

二　极坐标系

在解决本节开头的问题时，我们用“在信息中心的西偏北 45°方向，距离 $680\sqrt{10}$ m 处”描述了巨响的位置. 实际上，这是以信息中心为基点，以正西方向为参照，用与信息中心的距离和与正西方向所成的角来刻画巨响的位置. 这是日常生活中常用的刻画位置的方法，体现了极坐标思想.

1. 极坐标系的概念

思考

图 1-9 是某校园的平面示意图. 假设某同学在教学楼处，请回答下列问题：

(1) 他向东偏北 60°方向走 120 m 后到达什么位置？该位置惟一确定吗？

(2) 如果有人打听体育馆和办公楼的位置，他应如何描述？

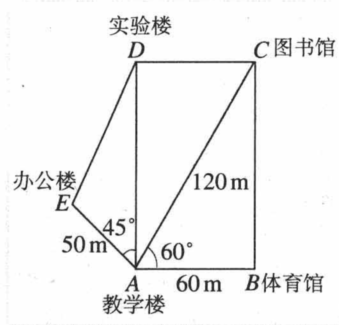


图 1-9

以 A 为基点，射线 AB 为参照方向，利用与 A 的距离、与 AB 所成的角，就可以刻画平面上点的位置. 有时它比直角坐标更方便，如在台风预报、地震预报、测量、航空、航海中就主要采用这种方法.

思考

类比建立平面直角坐标系的过程，怎样建立用距离与角度确定平面上点的位置的坐标系？

如图 1-10，在平面内取一个定点 O，叫做**极点**；自极点 O 引一条射线 Ox，叫做**极轴**；再选定一个长度单位、一个角度单位（通常取弧度）及其正方向（通常取逆时针方向），这样就建立了一个**极坐标系**.

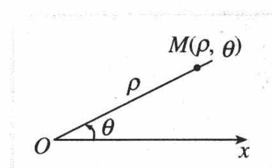


图 1-10

设 M 是平面内一点，极点 O 与点 M 的距离 $|OM|$ 叫做点 M 的**极径**，记为 ρ；以极轴 Ox 为始边，射线 OM 为终边的角 xOM 叫做点 M 的**极角**，记为 θ. 有序数对 (ρ, θ) 叫做点 M 的**极坐标**，记为 $M(\rho, \theta)$.

一般地，不作特殊说明时，我们认为 $\rho \geqslant 0$，θ 可取任意实数.

例 1 如图 1-11，在极坐标系中，写出点 A，B，C 的极坐标，并标出点 $D\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$，$E\left(4, \frac{3\pi}{4}\right)$，$F\left(3.5, \frac{5\pi}{3}\right)$ 所在的位置.

解：由图 1-11，可得点 A，B，C 的极坐标分别为

$$(1, 0), \left(4, \frac{\pi}{2}\right), \left(5, \frac{4\pi}{3}\right).$$

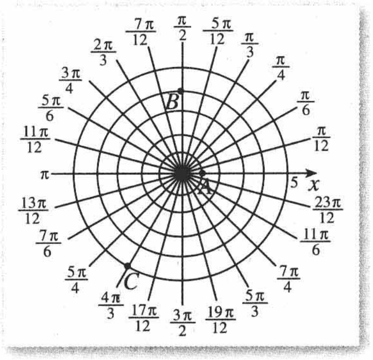


图 1-11

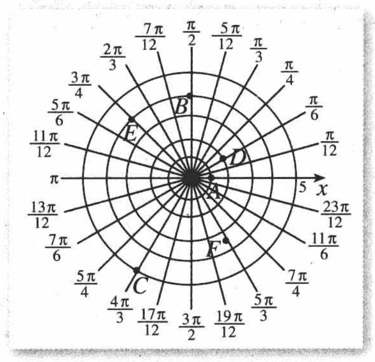


图 1-12

点 D，E，F 的位置如图 1-12 所示.

例 2 在图 1-9 中，用点 A，B，C，D，E 分别表示教学楼，体育馆，图书馆，实验楼，办公楼的位置. 建立适当的极坐标系，写出各点的极坐标.

解：以点 A 为极点，AB 所在的射线为极轴（单位长度为 1 m），建立极坐标系(图 1-13). 点 A，B，C，D，E 的极坐标分别为（0，0），（60，0），$\left(120,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$，$\left(60\sqrt{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(50,\ \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

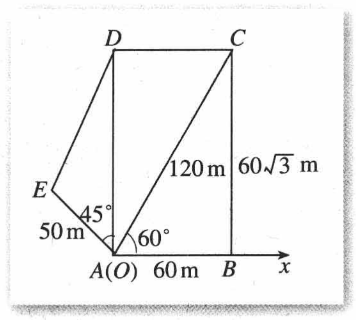


图 1-13

建立极坐标系后，给定 ρ 和 θ，就可以在平面内惟一确定点 M；反过来，给定平面内任意一点，也可以找到它的极坐标$(\rho,\ \theta)$.

思考

在极坐标系中，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}+4\pi\right)$，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}-2\pi\right)$表示的点有什么关系？你能从中体会极坐标与直角坐标在刻画点的位置时的区别吗？

由终边相同的角的定义可知，上述极坐标表示同一个点. 实际上，$\left(4,\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$都表示这个点.

一般地，极坐标$(\rho,\ \theta)$与$(\rho,\ \theta+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$表示同一个点. 特别地，极点 O 的坐标为$(0,\ \theta)(\theta\in\mathbf{R})$. 和直角坐标不同，平面内一个点的极坐标有无数种表示.

如果规定 $\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$，那么除极点外，平面内的点可用惟一的极坐标$(\rho,\ \theta)$表示；同时，极坐标$(\rho,\ \theta)$表示的点也是惟一确定的.

2. 极坐标和直角坐标的互化

思考

平面内的一个点既可以用直角坐标表示，也可以用极坐标表示．那么，这两种坐标之间有什么关系呢？

把直角坐标系的原点作为极点，x 轴的正半轴作为极轴，并在两种坐标系中取相同的长度单位．设 M 是平面内任意一点，它的直角坐标是$(x,\ y)$，极坐标是$(\rho,\ \theta)$．从图 1-14 可以得出它们之间的关系：

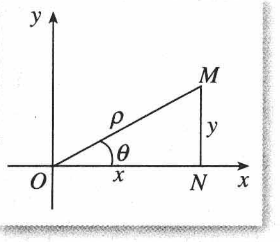


图 1-14

$$\boxed{x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.} \qquad ①$$

由①又可得到下面的关系式：

$$\boxed{\rho^2=x^2+y^2,\ \tan\theta=\frac{y}{x}(x\neq 0).}$$

这就是极坐标与直角坐标的互化公式.

例 3 将点 M 的极坐标$\left(5,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$化成直角坐标.

解：$x=5\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{5}{2}$，$y=5\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

因此，点 M 的直角坐标为 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$.

例 4 将点 M 的直角坐标$(-\sqrt{3},\ -1)$化成极坐标.

解：$\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=2$,

$\tan\theta=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因为点 M 在第三象限，所以 $\theta=\dfrac{7\pi}{6}$. ❶

因此，点 M 的极坐标为$\left(2,\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$.

❶ 把直角坐标转化为极坐标时，通常有不同的表示法（极角相差 2π 的整数倍）. 一般只要取 $\theta\in[0,\ 2\pi)$就可以了.