21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

高等数学

GAODENG SHUXUE

主编◎邬冬华 唐一鸣 陈基明 俞国胜

中国人民大学出版社

21世纪高等继续教育精品教材·公共课系列

高等数学

主编 邬冬华 唐一鸣
陈基明 俞国胜

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/邬冬华等主编. 一北京：中国人民大学出版社，2010
21 世纪高等继续教育精品教材. 公共课系列
ISBN 978-7-300-13063-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①邬… Ⅲ.①高等数学-成人教育：高等教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 230843 号

21 世纪高等继续教育精品教材·公共课系列
高等数学
主　编　邬冬华　唐一鸣　陈基明　俞国胜

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2011 年 2 月第 1 版
印　　张	23.75	**印　　次**	2011 年 2 月第 1 次印刷
字　　数	532 000	**定　　价**	39.00 元

总 序

成人高等教育是我国高等教育的有机组成部分，在我国国民教育体系和终身教育体系中占有重要地位。随着我国经济社会的发展和建设学习型社会进程的加快，成人高等教育将起到越来越重要的作用。

教材建设是成人高等教育教学基本建设的一项重要工作。目前，许多成人高校使用的教材主要选用全日制普通高校已有的教材。这种做法固然可以在某种程度上保证所选教材的质量，但另一方面又很容易缺失所选用教材的针对性和适用性，这是因为成人教育的特殊性，成教学生有与普教学生不同的教学需求。

首先，成教学生的结构复杂多样，反映在他们的年龄差距较大，知识背景差异较大。虽然学生都是通过统一的入学考试入学的，但是他们的文化和技能基础参差不齐，学习能力、水平、需求都不尽相同。其次，他们具有较为丰富的社会实践经验，分析能力、理解能力和自学能力普遍较强，具有明确的学习目的和目标。他们不仅仅是为了获得学历而来学校，他们更希望通过高等教育学习，获取知识，提高自己的工作能力和社会竞争能力。再次，成教学生承担着不同的社会角色，工作、生活与学习之间的矛盾甚为突出，学习时间难以得到保障。因此，成人教育与全日制普通高校在培养目标和教学要求上有较大差异。全日制普通高校的教材理论偏深，实践内容较少，不适合成教学生自学，难以满足成人教育的需求。

针对成教学生的上述特点，成人教育必须确立“学习者需要是主体，一切为了学习者”的理念，强化服务意识，深化教学改革，深入研究教学内容与方法，加强成人教育的教材建设，不断提高教学质量。为此，上海大学成人教育学院遴选在本学科有一定学术水平、有丰富成人教育教学经验、教学效果突出，并长期工作在教学第一线的专家，组织他们编写具有成教特色的系列教材，以使教材主动适应和满足成人教育的需要。

本系列教材坚持以“应用为主，够用为度”的原则，针对成教学生的学习特性，精心设计编排教材内容，注重知识的实用性和前沿性，以增强学生的创新意识，促进学生的个性发展；培养学生学以致用、解决实际问题的能力；推动成人教育从“以教为主”向“以学为主”转变，提高学生的学习能力。

由于时间仓促，书中难免有疏误和不妥之处，恳切希望广大师生和读者批评指正。我们将在今后的教学实践中，不断总结经验，认真听取各方反馈意见，适时组织教材的修订工作。

最后，谨向为编撰本系列教材而付出辛勤劳动的编委们表示衷心的感谢，并向辛勤耕耘在成教工作战线上的老师们致以崇高的敬意。

潘庆谊

（上海大学成人教育学院院长）

前 言

在当今高科技时代，自然科学、社会科学的各领域的研究进入更深的层次和更广的范畴，在这些研究中微积分知识的运用往往是实质性的，微积分与自然科学和社会科学的关系从来没有像今天这样密切。微积分作为人类智慧的最伟大发现之一，自它诞生后的三百多年来，在阐明和解决来自数学、物理学、工程学及经济、管理、金融和社会科学等领域问题中具有强大的威力，特别是电子计算机的发明和它的广泛使用都以微积分的背景知识为坚实基础。进入21世纪，微积分作为一门技术为人类的发展必将发挥更重要的作用。正因为如此，微积分已经成为培养人才的重要的必备内容。

作为成人教育高等数学课程的教材，其应当适合学生自主学习能力的培养，同时应当有助于学生自主学习能力的提高，使学生学以致用，能够在工作中利用数学思想和方法解决实际问题，为学生在后续的再学习、再工作、再研究和再开拓创新能力的培养方面提供必要的基础支撑。

学习微积分与中学学习初等数学的方法有所不同，虽然在微积分的学习中也需要学习如何计算及这些计算的方法和技巧，但更需要在精确和深刻层次上发展其他的方法和技巧。微积分的学习中引入了非常多的新概念和计算方法，学生不可能在课堂上学习完毕他们所需要的所有内容，必须通过课后的自学学到他们所需要的更多内容。

如何编写好一本符合成人高等教育专科及专升本学生的数学教材，是一个不断探索的过程。本书的特点是强调微积分在科学、工程和经济中的应用。本教材力图以高等数学中的微积分思想和方法作为引导，使学生能通过对本教材的学习牢固掌握微积分的基本内容、方法及概念，在推理、论证、演算等诸能力方面有所提高，同时使学生能从教材中学到一些必要的微积分知识并得到一定程度的数学训练。本书中“*”号所注内容为选修内容。

在本书的出版过程中，上海大学成人教育学院潘庆谊院长等领导给予了大力支持和帮助；中国人民大学出版社的编辑为此也做了大量卓有成效的工作，在此一并致以深深的谢意。

本书由邬冬华、唐一鸣、陈基明、俞国胜任主编，参加编写的还有姚奕荣、杨建生、郭伟娟。全书由邬冬华统一修改、统稿、定稿。

由于编者学识与水平有限，书中难免出现一些缺点和错误，敬请广大读者批评指正，并及时与我们联系，以便改正。对于大家的支持，编者不胜感激。

编者

2011年1月

目 录

第一章

函数及其基本性质

微积分是关于运动和变化的数学，哪里有运动与变化，哪里用到的数学必定就是微积分。微积分的诞生初期是这样，今天仍然还是这样。

微积分首先是为了满足16、17世纪科学家对数学方面的需求，本质上说是为满足力学发展的需要而发明的。微分学所处理的是计算变化的问题，它使人们能够定义曲线的斜率，计算运动物体的速度和加速度，求得炮弹能达到其最大射程的发射角，预测何时行星靠得最近或离得最远。积分学所处理的是从函数变化率的信息确定函数自身的问题，它使人们能够从物体现在的位置和作用在物体上力的信息计算出该物体未来的位置，计算出平面上不规则区域的面积，度量曲线的长度，以及求出任意空间物体的体积和质量。

现在，微积分及其在数学分析方面的延伸确实是意义深远。假如早年发明微积分的物理学家、数学家和天文学家能了解到微积分能够解决如此大量的问题以及现在用来理解我们周围的宇宙和世界的数学模型所涉及的众多领域的话，他们肯定会感到十分幸会。

从古到今，整个数学的发展大体可分为五个时期：(1) 公元前600年以前的数学萌芽时期；(2) 公元前600年到17世纪中叶的初等数学时期；(3)17世纪中叶到19世纪20年代的变量时期；(4)19世纪20年代到第二次世界大战的近代数学时期；(5)20世纪40年代以来的现代数学时期。

每一数学时期的发展，从来就是和生产实践、科学技术的水平密切相关的。首先，生产实践和科学技术向数学提出需要解决的问题，刺激数学向生产实践和科学技术发展的方向发展。其次，生产实践和科学技术向数学提供丰富的研究资料和物质条件，计算机技术的发展推动整个数学的发展就是最典型的案例。此外，生产实践和科学技术为检验数学结论的正确性提供了真理性的标准。因此数学的发生和发展归根到底是由生产实践决定的。同时数学发展到一定阶段，对于生产实践具有一定的相对独立性。

本章将在复习中学教材中有关函数内容的基础上，进一步研究函数的性质，分析初等函数的结构。

第一节　预备知识

一、集合

“集合”是现代数学中的一个重要的基本概念。集合是指具有某种特定性质的事物的全体。组成这一集合的事物称为该集合的元素。

例 1　所有皮制火炬牌篮球构成一个集合，那么每一只皮制的且是火炬牌的篮球都是该集合的元素。

例 2　所有正整数的全体构成一个集合，那么每一个正整数都是该集合的元素。

通常，我们用英文大写字母如 A,B,X,Y 等表示集合，用英文小写字母如 a,b,x,y 等表示集合中的元素。如果 a 为集合 A 中的元素，则记作 $a \in A$，读作 a 属于 A 或 a 在 A 中；如果 a 不是集合 A 中的元素，则记为 $a \notin A$，读作 a 不属于 A 或 a 不在 A 中。

如果集合中所包含的元素的个数只有有限多个，则称这种集合为有限集。如果集合中所包含的元素的个数有无限多个，则称这种集合为无限集。不包含任何元素的集合称为空集，记为 Φ。

例 3　$A=\{x \mid x^2+1=0, x\text{ 为实数}\}$ 为空集。

定义 1.1.1　设有集合 A,B，如果集合 A 中的每一元素都是集合 B 中的元素，即 $a \in A$，必有 $a \in B$，则称集合 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$，或 $B \supset A$，读作 A 包含于 B，或 B 包含 A。

例 4　设 $A=\{2,4,6\}, B=\{1,2,4,5,6\}$，则 A 中的任一元素都是 B 中的一个元素，$A \subset B$。

定义 1.1.2　设集合 A,B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称集合 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

例 5　设 $A=\{x \mid x^2-5x+4=0\}, B=\{1,4\}$，则 $A=B$。

二、实数集

自公元前十几个世纪，人类历史开始从青铜器时代过渡到铁器时代。铁器的应用，大大促进了生产力的发展，社会财富迅速增加，刺激了社会的商业活动。由于经济生活的需要，人们越来越多地要计算产品的数量和生产工时的长短，测定建筑物的大小和丈量土地的面积等。人类从长期的社会实践中积累了许多有关数的知识，从而产生数的概念，并产生数的运算的方法。

随着社会的发展，人类对数的认识越来越深刻。由文明古国印度所发明的阿拉伯数码正整数已被人类所广泛认识。通常地，全体正整数构成的数集记为 $\mathbf{N}_+=\{1,2,3,\cdots\}$。为对正整数进行一系列的算术运算，数的范围扩大到了整数和有理数，分别记整数集为 $\mathbf{Z}=\{\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots\}$，有理数集为 $\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\dfrac{p}{q}; p,q \in \mathbf{Z}, q \neq 0\right\}$。

如果用十进制来表示有理数，则有理数可表示成有限或无限循环的小数。一个数为有理数当且仅当可以表示成分数。

如果一个数用十进制表示时，都不是有限的和无限循环的，这种无限不循环小数被称为

无理数。例如：$\pi = 3.141\,592\,6\cdots$，$e = 2.718\,28\cdots$，这种无限不循环小数都是无理数。

通常把具有原点、方向和长度单位的直线称为数轴。有理数在数轴上对应的点称作有理点；无理数在数轴上对应的点称作无理点。有理数和无理数的全体称为实数集，记为 $\mathbf{R}$。实数集充满整个数轴。

我们把能被 2 整除的正整数称为偶数，否则称为奇数。其中偶数 n 可表示为 $n = 2m$（m 为整数），奇数 n 可表示为 $n = 2m + 1$（m 为整数）。

如果一个正整数只能被自身和 1 整除，则称该正整数称为素数或质数。例如：2，3，5，7，11… 为素数，其中最小的素数为 2，唯一的偶素数也为 2。

三、绝对值

定义 1.1.3　任何实数 x 的绝对值，记为 $|x|$，定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

x 的绝对值 $|x|$ 表示为数轴上点 a 到原点之间的距离。实数绝对值具有如下性质：

(1) $|x| \geqslant 0$，当且仅当 $x = 0$ 时有 $|x| = 0$。

(2) $|-x| = |x|$。

(3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$。

(4) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$；$|x - y| \geqslant ||x| - |y|| \geqslant |x| - |y|$。

(5) $|xy| = |x||y|$。

(6) $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}(y \neq 0)$。

四、区间与邻域

区间与邻域是微积分中常用的实数集，其中区间按不同的名称记号和定义可分为如下 9 种形式：

闭区间	$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$
开区间	$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$
半开区间	$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$
	$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$
无限区间	$(a,\infty) = \{x \mid x > a\}$
	$[a,\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$
	$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$
	$(-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b\}$
	$(-\infty,\infty) = \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$

其中 a,b 为给定的实数，分别称为区间的左端点和右端点。$+\infty$ 读作为“正无穷大”，$-\infty$ 读作为“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是记号。

定义 1.1.4　设 a 与 δ 为两个给定的实数，集合

$$\{x \mid |x - a| < \delta, \delta > 0\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径，记为 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x - a| < \delta, \delta > 0\}$$

习题 1—1

1. 用区间表示下列集合：
(1) 不大于 2 的实数
(2) 大于 -2、小于 5 的实数
(3) 不小于 1、小于 π 的实数
2. 求 20，-12，a 的绝对值。
3. 解下列不等式：
(1) $|x-1|>2$ (2) $|3-2x|\leqslant 5$ (3) $\left|\dfrac{3x-5}{4}-1\right|\leqslant\dfrac{3}{8}$ (4) $|2-x^2|\geqslant 1$
4. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来。
(1)$A=\{x\,|\,|x+3|<2\}$ (2)$B=\{x\,|\,|x-1|\geqslant 2\}$
(3)$C=\{x\,|\,1<|x-3|<2\}$

第二节 函 数

一、函数的概念

笛卡儿的“几何学”中引入了坐标与度量，开创了解析几何，使过去对立着的两个研究对象“形”和“数”统一起来，完成了数学史上一项划时代的变革。笛卡儿引入变量以后，随之而来的便是函数概念。虽然他没有使用变量和函数这两个词，但两者的关系如此密切，它们在历史上是同时出现的。笛卡儿在指出 y 和 x 是变量时，注意到了 y 依赖于 x 而变化。这正是函数思想的萌芽。

客观事物是在不断发展变化的，因此，对某个特定的现象进行观察时，其中出现的各种量也在不断地变化。例如，上海本地区的气温、区域内噪声的分贝数；上海市的房地产指数等都在不断地变化，这些变化的量都是变量。

微积分与初等数学的重要区别在于微积分以变量为研究对象，而初等数学的研究对象基本上是常量。

我们经常碰到这样一些变量，它们总是随着另外一个变量的变化而变化。例如在超市购物时，我们的付款数目随所购买商品的数量增加而不断增加。这种依赖关系，通常称为函数关系。

定义 1.2.1 设 x 和 y 为两个变量，D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的子集。如果对任意的 $x\in D$，按照一定的规则 f 有唯一确定的实数值与之对应，则称规则 f 是定义在 D 上的函数，也称 f 为变量 x 的函数，记为 $y=f(x)$。此处 D 称为函数 f 的定义域，也可记为 $D(f)$，称 x 为自变量，y 为因变量。

对于每一个 $x\in D$，按法则 f 所对应的唯一的 y 称为函数 f 在点 x 处的函数值。当 x 取遍 D 的每一个值时，对应的变量 y 取值的全体组成的数集称为该函数的值域，记为 $R(f)$。

如果两个函数的定义域相同，并且对应规则也相同，则称此两个函数相同，均表示为同

一函数。我们约定：函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的一切实数所组成的实数集。

例1　求函数 $y=\frac{x+1}{x-2}$ 的定义域。

解　当分母 $x-2\neq 0$ 时，此函数才有意义，所以函数的定义域为 $x\neq 2$ 的全体实数，即

$$D=\{x\mid x\neq 2\}$$

例2　判断 $f(x)=1+x$ 与 $g(x)=\frac{1-x^2}{1-x}$ 是否为相同的函数。

解　由于当 $x\neq 1$ 时，$f(x)=g(x)$，但当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有定义而 $g(x)$ 无定义，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同，两者不是同一个函数。

二、函数的表示法

函数的表示法通常有三种：表格法、图示法和公式法。

(1) 表格法。表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出，这样函数关系就用表格表示出来。例如，大家熟悉的开方表、三角函数表、对数表等都是用表格法表示函数的。

表格法的优点是方便易用，可直接查到对应的函数值；缺点是数据不全面，不能查出函数的任意值。

(2) 图示法。函数 $y=f(x)$ 的图形能直观地表达自变量 x 与因变量 y 之间的关系。图示法的主要优点是直观性强，函数的主要特征在图上一目了然；图示法的缺点是不便于作理论上的推导、分析与运算。

(3) 公式法。用数学公式表示自变量与因变量之间的对应关系，是函数的公式法。用公式法表达函数的优点是简明准确，便于理论分析；缺点是不够直观，有些实际问题很难用公式法表示。

函数的三种表示法各有优点和缺点，针对不同的问题可以采用不同的表示法。为了直观之便，本书常采用公式法表示函数的同时，辅之以图示法。

习题 1—2

1. 判断下列各对函数是否相同，并说明理由。

(1) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$　　(2) $f(x)=1, g(x)=\sin^2x+\cos^2x$

(3) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}, g(x)=x+2$　　(4) $f(x)=\ln x^3, g(x)=3\ln x$

(5) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$　　(6) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=x^3-2x+1$　　(2) $y=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{9-x^2}$

(3) $y=\frac{\ln(5-x)}{\sqrt{x+4}}$　　(4) $y=\frac{\ln(2-x)}{\sqrt{2x+6}}$

(5) $y=\dfrac{\sqrt{3-x}}{\ln(1+x)}$

(6) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5-x}, & x\leqslant 0\\ x, & 0<x<1\\ \dfrac{2}{1+x}, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

(7) $f(x)=\dfrac{\ln(3-x)}{\sin x}+\sqrt{5+4x-x^2}$

(8) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

(9) $f(x)=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$

(10) $f(x)=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}3x-1, & 0\leqslant x<1\\ 2+x, & 1\leqslant x<3\\ 3, & x\geqslant 3\end{cases}$，求：(1) $f(x)$ 的定义域；(2) $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(4)$。

4. 设 $g(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $g\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$g(-2)$，并作出函数 $y=g(x)$ 的图形。

第三节　函数的几种特性

一、有界性

定义 1.3.1　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的，如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的。

例如，函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义，对任意的一个 $x\in(0,+\infty)$，均有 $\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内是有界的。函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 和 $[1,+\infty)$ 内均有定义，但在 $(0,1)$ 内是无界的，在 $[1,+\infty)$ 内是有界的。

二、单调性

定义 1.3.2　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果对区间内任意两点 x_1,x_2：

(1) 当 $x_1<x_2$ 时，满足 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调增加的，相应区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调增加区间；

(2) 当 $x_1<x_2$ 时，满足 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数在区间 (a,b) 内是单调减少的，相应区间 (a,b) 称为 $f(x)$ 的单调减少区间。

单调增加函数与单调减少函数统称为单调函数。单调增加区间与单调减少区间统称为单调区间。

例 1　判断函数 $y=x^3$ 的单调性。

解　由于 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，对于任意 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

当 x_1,x_2 异号时，有 $x_1x_2\leqslant 0, x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-x_1x_2>0$，故

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

当 x_1,x_2 同号时，有 $x_1x_2\geqslant 0, x_1^2+x_1x_2+x_2^2>0$，故

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

即对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1<x_2$ 均有 $f(x_2)>f(x_1)$。换言之，$y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加函数。

三、奇偶性

定义 1.3.3　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$。

(1) 如果对于任意一个 $x\in(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 $x\in(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数；

(2) 如果对于任意一个 $x\in(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，满足 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为 $x\in(-a,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数。

例 2　判断函数 $f(x)=x^5+x^3$ 的奇偶性。

解　由于函数 $f(x)=x^5+x^3$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=(-x)^5+(-x)^3=-x^5-x^3=-(x^5+x^3)=-f(x)$$

所以 $f(x)=x^5+x^3$ 为奇函数，见图 1—1。

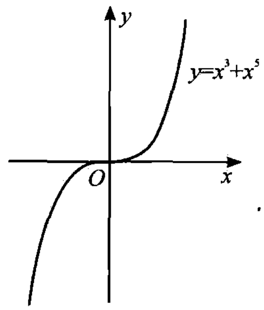

图 1—1

例 3　判断函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的奇偶性。

解　由于函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$，对于任意一个 $x\in[-1,1]$，有

$$f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

所以函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 是偶函数，见图 1—2。

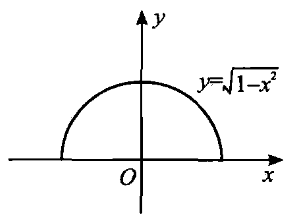

图 1—2

从几何形态上而言，偶函数是关于 y 轴对称的，奇函数则关于坐标原点中心对称。

例 4　判断函数 $f(x)=\cos x+\sin x$ 的奇偶性。

解　由于函数 $f(x)=\cos x+\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，对于任意一个 $x\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(-x)=\cos(-x)+\sin(-x)=\cos x-\sin x$$

$f(-x)$ 既不等于 $f(x)$，也不等于 $-f(x)$，所以 $f(x)=\cos x+\sin x$ 为非奇非偶函数。

四、周期性

定义 1.3.4　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在正的常数 l，使得对任意的 $x\in D, x+l\in D$，满足 $f(x+l)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数。满足这个等式的正数 l，称为函数的周期，通常所说的周期是指最小的正周期。

例如，函数 $y=\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数。

周期函数很重要，我们在科学中研究的许多现象的性态特征都具有周期性。例如脑电波和心跳及家用的电压和电流是周期函数。几乎所有的周期现象都可表现为三角函数的代数