



高等教育自学考试辅导丛书

高等数学(一)

沈家英 许闻天 编著
方永宏 王盛群

山东大学出版社

全国高等教育自学考试辅导丛书
财 经 类

高 等 数 学
(一)

沈家英 许闻天 编
方永宏 王盛群

山东大学出版社

鲁新登字 09 号

高等数学(一)

沈家英 许闻天
方永宏 王盛群 编

*

山东大学出版社出版发行 济南书刊印刷厂印刷
850×1168 毫米 大 32 开 13.25 印张 330 千字
1993 年 4 月第 1 版 1993 年 4 月第 1 次印刷
印数 1——10000

*

ISBN 7—5607—0978—8/O · 59
定 价:7.30 元

高等教育自学考试辅导丛书编委会

主 编 刘鸣泽

执行主编 胡家俊

副 主 编 王盛群 隋俊奎 吕斋训

编 委 (以姓氏笔划为序)

于志国 王汉雄 王美俊 王盛群

李秀芹 刘鸣泽 吕斋训 吴庆峰

沈家英 胡家俊 隋俊奎

前 言

本书是根据《高等数学(一)自学考试大纲》和《高等数学考核目标》(财经类),配合主教材:经济应用数学基础(一)《微积分》以及《高等数学》(一)编写而成的。

自学高等数学的一些同志,由于缺少教师进行系统的讲授与及时的指导,往往碰到一些困难与问题,诸如感到概念抽象,定义、定理、公式难以理解与运用,不会分析解题,抓不住基本要求与重点,特别是初次参加自学考试时,常常掌握不住考试要求的深度与广度,弄不清题型与题量的特点,不知道如何才能做到解题规范化等等。为了帮助自学的同志学好高等数学,并在自学考试中取得好成绩,编者结合多年从事教学工作的经验和参与社会助学的体会,写成这本自学指导书。针对上述实际情况,本书总的结构框架是按主教材的顺序,逐章分为五个部分进行辅导。

一、基本要求:根据自学考试的要求,对不同的内容明确的提出了不同层次的要求,以便读者了解各章学习的重点、深度与广度。

二、主要内容:扼要的叙述了各章的基本概念与理论、基本运算与公式、简单的应用与注意事项等。目的在于帮助读者将所学的知识进行整理与归纳,以便对全章内容融汇贯通有一个系统的理解。

三、学习指导:这是本书的主要部份,我们精选了具有典型性与代表性的例题,采取对例题进行分析与解答的形式,具体的、深入浅出的指导读者怎样理解和运用基本概念,怎样运用定理和公式,怎样沿着正确的思路去解题。同时,对读者感到困难和容易出错之处都一一作了说明与指导。

四、模拟训练题:根据历年全国高等教育自学考试高等数学

(财经类)试题提供的有关信息,逐章选编了若干套主要涉及本章内容的模拟训练题,其目的不仅是使读者有针对性的作一些训练,而且使读者从中体会到自学考试的深度与广度以及题型上的特点。

五、模拟训练题参考解答:这是给读者自我检查与对照所用的,具有阶段性自我测验与自我评分的作用。

本书的编著者都是多年来从事高等教育自学考试命题、社会助学等方面的专家。编写这种形式的辅导丛书,是社会助学形式的一种新的尝试,肯定会有不周不妥之处,诚恳希望专家、学者和助学教师们予以指教。我们也期望广大自学考生,通过本书的辅导能得到一些帮助,从而在自学考试中取得较好的成绩。

一九九三年五月

目 录

第一章 函 数	(1)
一、基本要求	(1)
二、主要内容	(2)
三、学习指导	(11)
1. 关于集合的概念及其运算的问题	(11)
2. 关于函数概念及求定义域与函数值的问题	(12)
3. 关于函数的奇偶性与周期性的问题	(19)
4. 关于反函数和复合函数的问题	(22)
5. 关于建立函数关系式的问题	(24)
四、模拟训练题	(26)
五、模拟训练题参考解答	(31)
第二章 极限与连续	(35)
一、基本要求	(35)
二、主要内容	(35)
三、学习指导	(42)
1. 关于极限的概念和性质的问题	(42)
2. 关于运用极限运算法则的问题	(44)
3. 关于无穷小量与无穷大量的概念、无穷小量的 性质与比较的问题	(53)
4. 关于连续函数的概念与性质的问题	(59)
四、模拟训练题	(63)
五、模拟训练题参考解答	(68)
第三章 导数与微分	(71)
一、基本要求	(71)
二、主要内容	(72)

三、学习指导	(79)
1. 关于用导数的定义求导数的方法问题	(79)
2. 关于导数几何意义的问题	(83)
3. 关于运用导数的基本公式和四则运算 法则求导的问题	(86)
4. 关于运用复合函数求导法则的问题	(90)
5. 关于运用取对数求导法则的问题	(94)
6. 关于运用隐函数求导法则的问题	(96)
7. 关于求高阶导数的问题	(97)
8. 关于边际与弹性的问题	(101)
9. 关于微分的概念、计算及应用问题	(103)
四、模拟训练题	(108)
五、模拟训练题参考解答	(112)
第四章 中值定理、导数的应用	(117)
一、基本要求	(117)
二、主要内容	(117)
三、学习指导	(123)
1. 关于中值定理的问题	(123)
2. 关于运用罗彼塔法则的问题	(125)
3. 关于判别函数的单调性、凹向性及 求极值的问题	(131)
4. 关于求函数最大值、最小值的应用问题	(133)
四、模拟训练题	(141)
五、模拟训练题参考解答	(144)
第五章 不定积分	(152)
一、基本要求	(152)
二、主要内容	(152)
三、学习指导	(160)

1. 关于原函数与不定积分的概念、性质及基本积分公式的问题·····	(160)
2. 关于运用不定积分第一换元积分法的问题·····	(163)
3. 关于运用不定积分第二换元积分法的问题·····	(172)
4. 关于运用不定积分分部积分法的问题·····	(181)
四、模拟训练题 ·····	(194)
五、模拟训练题参考解答 ·····	(199)
第六章 定积分 ·····	(205)
一、基本要求·····	(205)
二、主要内容·····	(206)
三、学习指导·····	(215)
1. 关于定积分的概念、性质及几何意义的问题·····	(215)
2. 关于变上限函数的概念及其求导法则、运用牛顿时——莱布尼兹公式的问题·····	(219)
3. 关于广义积分的问题·····	(224)
4. 关于运用定积分的换元积分法的问题·····	(225)
5. 关于运用定积分的分部积分法的问题·····	(230)
6. 关于运用定积分计算平面图形面积的问题·····	(235)
7. 关于运用定积分计算旋转体体积的问题·····	(238)
8. 关于运用定积分计算经济领域中的应用问题·····	(247)
四、模拟训练题 ·····	(250)
五、模拟训练题参考解答 ·····	(256)
第七章 无穷级数 ·····	(263)
一、基本要求·····	(263)
二、主要内容·····	(264)
三、学习指导·····	(279)
1. 关于无穷级数及其敛散性的概念问题·····	(279)
2. 关于无穷级数性质的问题·····	(280)

3. 关于判别正项级数的敛散性问题.....	(282)
4. 关于判别交错级数的敛散性问题.....	(285)
5. 关于判别任意项级数的敛散性、绝对收敛 与条件收敛的问题.....	(287)
6. 关于求幂级数的收敛半径及确定幂级数的收敛区 间的问题.....	(288)
7. 关于泰勒公式与求函数的马克劳林级数的 问题.....	(291)
8. 关于利用间接方法将函数展成马克劳林级数的 问题.....	(292)
9. 关于幂级数在近似计算中的应用问题.....	(300)
四、模拟训练题	(302)
五、模拟训练题参考解答	(307)
第八章 多元函数	(314)
第一部分 空间解析几何简介和多元函数的概念	(314)
一、基本要求	(314)
二、主要内容	(314)
三、学习指导	(318)
1. 关于确定点的坐标问题.....	(318)
2. 关于确定空间平面与曲面的方程问题.....	(319)
3. 关于区域与多元函数的概念问题.....	(321)
四、模拟训练题	(323)
五、模拟训练题参考解答	(326)
第二部分 多元函数微分学	(328)
一、基本要求	(328)
二、主要内容	(328)
三、学习指导	(333)
1. 关于求偏导数与全微分的问题.....	(333)

2. 关于求二元函数的极值和最大值最小值 应用题的问题	(338)
3. 关于利用全微分进行近似计算的问题	(340)
四、模拟训练题	(342)
五、模拟训练题参考解答	(345)
第三部分 二重积分	(350)
一、基本要求	(350)
二、主要内容	(350)
三、学习指导	(354)
1. 关于在直角坐标系下二重积分的计算问题	(354)
2. 关于在极坐标系下二重积分的计算问题	(358)
3. 关于利用二重积分求曲顶柱体的体积问题	(361)
四、模拟训练题	(362)
五、模拟训练题参考解答	(364)
第九章 微分方程简介	(369)
一、基本要求	(369)
二、主要内容	(369)
三、学习指导	(371)
1. 关于微分方程的一般概念问题	(371)
2. 关于一阶微分方程的求解问题	(373)
四、模拟训练题	(378)
五、模拟训练题参考解答	(380)
附录一、预备知识:初等数学基础	(384)
附录二、样题	(393)

第一章 函 数

一、 基本要求

1. 了解集合的概念,熟悉集合中常用的符号,会求集合的交集与并集,会用集合表示区间和平面区域.

2. 掌握实数的绝对值概念及其简单性质,会用不等式和绝对值不等式表示区间和邻域.并会把区间和邻域在数轴上表示出来.

3. 深刻理解函数的概念,能叙述函数的定义,能求函数的定义域和函数值,能根据函数的定义,鉴别两个不同形式的函数是否为相同的函数.

4. 理解函数的性质,能写出函数的奇、偶性定义和各自图形的特征,能用定义判别函数的奇偶性.

能叙述函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内单调增或单调减的概念.

了解函数的周期性概念,会求出函数 $\sin \omega x$ 、 $\cos \omega x$ 、 $\operatorname{tg} \omega x$ 及 $\operatorname{ctg} \omega x$ 的周期,其中 ω 是正常数.

能判别函数在给定区间内是否有界.

5. 理解反函数的概念,会求给定函数的反函数.知道函数及其反函数的图形的特征.

6. 深刻理解复合函数的概念,会分析复合函数的复合过程,能求出复合函数的定义域,能判别函数 $y=f(\varphi(x))$ 是否构成一个复合函数.

7. 熟记基本初等函数及其图形.

能写出 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\sqrt{x}, y=\sqrt[3]{x}, y=\frac{1}{x}$ 及

$y=\frac{1}{x^2}$ 等常用幂函数的定义域,并能画出它们的图形.

能写出指数函数 $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ 的定义域,并能画出它们的草图.

能写出对数函数 $y=\ln x$ 和 $y=\lg x$ 的定义域,并能画出它们的草图.

能写出三角函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的定义域并能画出它们的草图.

能写出反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 和 $y=\operatorname{arccot} x$ 的定义域并能画出它们的草图,

理解初等函数的概念,并能指出它是怎样构成的.

8. 理解分段函数和绝对值函数的概念.

能将绝对值函数化为分段函数,会求分段函数的定义域和函数值.

9. 会建立简单应用问题中的函数关系式包括经济应用问题,如需求函数、总成本函数、总收益函数和利润函数等等.

二、主要内容

1. 关于集合的概念

所谓集合是指具有某种属性的事物的全体.通常用 $A, B, C, \dots$ 等表示集合,构成集合的事物叫做该集合的元素,通常用 $a, b, c, \dots$ 等表示.

如果 a 是集合 A 的元素,记作 $a \in A$

如果 a 不是集合 A 的元素,记作 $a \notin A$

一个元素也没有的集合叫做空集,记作 $\emptyset$

注意:集合 $\{0\}$ 是含有一个零元素的集合所以它不是空集.集合的表示方法,有两种.

(1) 列举法,将集合中的所有元素都列举出来,并用花括号 $\{ \}$ 括起来,例如由 a, b, c, d 四个元素构成的集合 A , 记作 $A = \{a, b, c, d\}$ 又例如由方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的根构成的集合 B , 记作 $B = \{2, 3\}$. 自然有 $b \in A, 1 \in B$

(2) 构造式法,就是在花括号 $\{ \}$ 内写明集合中元素所具有的特征,一般形式为

$$A = \{x | x \text{ 所具有的性质} \}$$

例如 $A = \{x | 2 < x < 5\}$, 就是集合 A 是由所有大于 2 小于 5 的实数构成的集合对任何实数都能鉴别它是否为 A 的元素。例如 $\frac{7}{2} \in A, 8 \notin A$ 等等。

(3) 如果集合 B 中的每一个元素都是集合 A 的元素,即若 $b \in B$ 则 $b \in A$, 就称集合 B 是集合 A 的子集,记作 $B \subset A$ 若 $B \subset A$ 又 $A \subset B$ 则 $A = B$

(4) 并集和交集

由给定集合 A 和 B 的所有元素合并在一起构成的集合,称为 A 和 B 的并集记作 $A \cup B$, 例如 $A = \{x | -2 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | -1 < x < 5\}$ 则 $A \cup B = \{x | -2 \leq x < 5\}$

由给定集合 A 和 B 的所有公共元素构成的集合,称为集合 A 和 B 的交集,记作 $A \cap B$, 例如 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$ $B = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ 则 $A \cap B = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$

由并集和交集的概念,可得

$$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup A = A \quad A \cap A = A$$

2. 关于绝对值的概念

在计算中常常会遇到绝对值不等式,和带绝对值的函数,必须根据绝对值的定义去掉绝对值然后再进行运算,所以要深刻理解绝对值的概念和性质。

定义:实数 a 的绝对值是

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

例如 $|-5| = -(-5) = 5$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

常用性质:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b| \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a+b| \leq |a| + |b| \quad |a-b| \geq |a| - |b|$$

$$|a| \leq R (R > 0) \Leftrightarrow -R \leq a \leq R$$

$$|a| \geq R (R > 0) \Leftrightarrow a \geq R \text{ 或 } a \leq -R$$

例如 $|x-3| < 5 \Leftrightarrow -5 < x-3 < 5$ 即 $-2 < x < 8$

又如 $|x-3| \geq 5 \Leftrightarrow x-3 \geq 5$ 或 $x-3 \leq -5$

即 $x \geq 8$ 或 $x \leq -2$

3. 数轴区间和邻域的概念

数轴:规定了原点,正方向(一般从左到右的方向为正向)和单位长度的水平直线,称为数轴.数轴上的点与实数之间具有一一对应的关系,实数 a 称为数轴上对应点的坐标,在微积分中给一个实数 a 与给数轴上对应点的坐标是等价的,因此求数轴上一个点就是求该点的坐标.

区间:数轴上两点 a 与 b 之间的所有点构成的集合叫区间,常用的区间有

开区间 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

闭区间 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

半开区间 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

无穷区间: $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$

$(a, +\infty) = \{x | x > a\}$

$$(-\infty, b] = \{x | -\infty < x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x | -\infty < x < b\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | x \in \mathbb{R}\} (\mathbb{R} \text{ 是实数集})$$

邻域: 设 x_0 为一实数, δ 是一正数 ($\delta > 0$) 满足不等式

$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ 或 $|x - x_0| < \delta$ 的实数的全体称为 x_0 的 δ 邻域, 它在实数轴上是一个以 x_0 为中心 2δ 为长度的开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, 一般地, δ 是一个很小的数, 所以就是 x_0 附近的点构成的一个开区间, 简称为邻域。

4. 函数概念

(1) 定义: 设 x 与 y 是在同一变化过程中的两个变量, 当变量 x 在某一范围内任取一个确定的数值, 变量 y 就按照一定的规律, 有一个确定的 y 与之对应, 则称变量 y 是变量 x 的函数。记作 $y = f(x)$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, f 是函数关系的符号, 即表示某种对应规律。

从函数的定义看出决定函数的两个要素是定义域和函数关系 (即对应规律), 缺一就不成为一个函数, 例如 $y = \ln(-x^2)$ 就不成为一个函数, 因为它的定义域是一个空集。

(2) 函数的表示法, 通常有公式法, 图象法和列表法等几种表达函数的方法。公式法是用数学表达式来表示变量 y 与变量 x 之间的关系, 在高等数学(一)中主要研究由公式法表示的函数, 常用的有下列三种。

(i) 用一个公式表示一个函数,

例如: $y = x + \ln x$ $y = \sin x - \sqrt{1+x^2}$ 等等……

(ii) 用二个以上的公式表示一个函数。

例如: $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ 等等

注意: 它是用分别定义在不同区间上的几个表达式来表示一

个函数的,称为分段函数,上例中 $x=1$ 是分段点.不要把它当作是两个函数.

(iii) 用绝对值来表示一个函数.

例如 $f(x)=|x-4|$

注意由绝对值的定义,去掉绝对值符号,可用分段函数来表示:例如

$$f(x)=|x-4|=\begin{cases} x-4 & x\geq 4 \\ 4-x & x<4 \end{cases}$$

(3) 函数定义域的求法:在实际问题中函数的定义域是由问题的实际意义确定的,在公式表示法中,函数的定义域是指使数学公式有意义的自变量的全体数值,也称自然定义域.

求自然定义域时要注意以下几点

(i) 在公式函数中,要去掉使分母为零的点.

例如 $y=\frac{x^2+3x-1}{x+2}$ 的定义域是 $x\neq -2$

(ii) 在开偶次方根式中,被开方的式子必须非负.

例如 $y=\sqrt{1-x}$ 的定义域是 $1-x\geq 0$, 即 $x\leq 1$

(iii) 在对数式子中,真数必须大于零.

例如 $y=\ln(1+x)$ 的定义域是 $x>-1$

(iv) 在含有 $\operatorname{tg} x$ 时, $x\neq r\pi+\frac{\pi}{2}$, 在含有 $\operatorname{ctg} x$ 时, $x\neq r\pi$ (r 为整数)

(v) 在含有 $\arcsin x, \arccos x$ 的式子中,应有 $|x|\leq 1$, 例如

$y=\arcsin\left(x+\frac{1}{3}\right)$ 的定义域 $-\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}$.

(vi) 当函数是由有限项组成时,先求出每一项的定义域再取它们的公共部分(即取交集)

(vii) 分段函数的定义域是各段函数的定义域的并集,特别注意分段点处是否有定义.

(4) 函数值的求法:当函数 $y=f(x)$ 用数学式子表示时,求