21世纪高职院校规划教材

——基础课

高等数学基础

GAODENG SHUXUE JICHU

胡 建 赵 勇 主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21世纪高职院校规划教材——基础课

高等数学基础

胡　建　赵　勇　主编

西南交通大学出版社
·成 都·

图书在版编目（C I P）数据

高等数学基础 / 胡建，赵勇主编. —成都：西南交通大学出版社，2012.8

21 世纪高职院校规划教材. 基础课

ISBN 978-7-5643-1796-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①胡… ②赵… Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 140346 号

21 世纪高职院校规划教材——基础课

高等数学基础

胡建 赵勇 主编

责任编辑	刘娉婷
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网址	http: //press.swjtu.edu.cn
印刷	成都蓉军广告印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm×260 mm
印张	16.875
字数	418 千字
版次	2012 年 8 月第 1 版
印次	2012 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-1796-6
定价	33.00 元

前　言

高等职业技术学院的人才培养宗旨是培养生产第一线的高级技术应用人才，基于这一共识，使学生掌握高等数学的基本思想，培养学生在本专业及相关领域中应用数学分析问题、解决问题的意识和数学应用能力，提高学生的数学文化素质便成为数学教学的基本目标。因此，高职类高等数学教材的编写，在内容体系上应突出以应用为目的，以提升学生运用数学思想和数学方法解决实际问题、加强数学与各专业及其他领域之间的联系为核心，以有限的课时数最大化教学内容为目标，本着“以能力培养为主，必须够用为度”的思想，力求在教材编写上有所创新。

本教材有以下几方面的特点：

（1）体现高等职业技术教育的特点，符合“以必须、够用为度”的原则，除保证必要的系统外，突出本课程内容的应用性和针对性。

（2）缓解教学内容多而教学课时不足的矛盾。

（3）全书力求做到语言准确，条理清楚，简明扼要，由浅入深，灵活多样，不过分追求理论证明和推导的严密性，而注重加强那些与实际应用联系较多的基础知识；不追求过分复杂的计算，而加强基本运算方法的训练和能力的培养；既注重教材的科学性和逻辑性，更注重培养学生科学的、良好的思维习惯，提升学生的学习素质。

（4）本教材适用面广，可供高等职业技术学院工科类各专业选用，也可作为专科层次及成人教育的高等数学教材。

全书内容包括：函数、极限与连续、导数及其应用、一元函数积分及其应用、二元函数微分学及其应用、空间解析几何、级数、常微分方程、数学软件 mathematic 初步应用等方面的基本概念、基本理论、基本方法和运算技能。为便于及时消化和理解概念及方法，每节都配有习题，每章后配有复习题。基本教学课时数约为 86 学时。

本教材由广安职业学院的胡建、赵勇主编。参加编写的有黄林、刘宇、姚又铭。其中胡建编写了第一章，赵勇编写了第四、五、十、十一章，黄林编写了第二、七、八章，刘宇编写了第三、六章，姚又铭编写了第九章。

限于编者水平有限，加之时间仓促，书中一定存在不妥之处，敬请使用本书的同行和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月 3 日

目 录

第一章　函　数

函数是高等数学研究的主要对象.在中学已经学过函数的概念和一些性质，本章将在复习集合知识的基础上，复习巩固函数的概念、性质等基础知识，为后面的学习打好基础.

第一节　函数的概念

一、集　合

1. 集合的概念

在现实问题中，我们研究的对象不都是一些个体，在很多情况下，我们研究的对象还会是由某些事物所组成的群体，如一个班的学生、一批产品、全体自然数等.

一般地，我们把具有某种属性的对象的全体称为集合（简称集），同时把构成这个集合的对象称为集合的元素.一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示集合的元素.

如果 a 是集合 A 中的元素，则记作 $a\in A$，读作 a 属于 A；如果 a 不是集合 A 中的元素，则记作 $a\notin A$，读作 a 不属于 A.

例如，$\mathbf{N}$ 表示全体自然数构成的集合（称为自然数集），则 $2\in\mathbf{N}$，$2.1\notin\mathbf{N}$.

如果一个集合只含有限个元素，那么称这个集合为有限集；含有无限多个元素的集合称为无限集.例如，全体英文字母组成的一个集合是有限集，全体整数组成的集合是无限集.

2. 集合的表示法

集合的表示法通常有列举法、描述法和图示法.

（1）列举法：在大括号内把集合的元素一一地列举出来，这种表示集合的方法叫列举法.

例 1　由方程 $x^2+2x-3=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为 $A=\{-1,3\}$；由前 10 个自然数构成的集合 B，可表示为 $B=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

一般地，有限集常常用列举法来表示比较方便，对于无限集，如果我们知道其元素的排列规律，也可采用列举法来表示.

例如：自然数集可表示为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,4,\cdots\}$.

（2）描述法：把集合中的元素的公共属性描述出来，并按下面的格式书写在大括号内，如$\{\,x\,|$ 元素 x 的公共属性$\}$.

例 2　由方程 $x^2-4x+3=0$ 的根所构成的集合 A，可表示为

$$A=\{x|x^2-4x+3=0\}.$$

满足不等式 $0\leqslant x<6$ 的实数所构成的集合 B，可表示为

$$B=\{x|0\leqslant x<6\}.$$

在 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径为 2 的圆周及内部所有点组成的集合 C，可表示为

$$C=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

（3）图示法：用平面图形表示集合的方法. 这是英国逻辑学家 Venn（1834—1888）为我们提供的一种更为直观的集合表示法. 表示集合的平面图形，又称为韦恩图.

韦恩图是用一个简单的平面区域代表一个集合，集合中的元素抽象地用区域内的点表示，如图 1-1 所示.

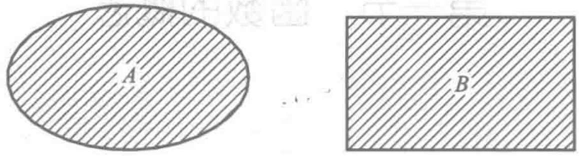

图　1-1

3. 全集、空集、子集与相等集

（1）全集：在某领域内研究对象时，通常把该领域内的所有对象构成的集合称为全集，用字母 U 表示.

全集是相对于我们研究的对象而言的. 如某学校开展对学生的调查工作，如果调查的对象仅限于一年级的学生，则一年级学生构成的集合作为一个全集；如果调查的对象是全校的学生，则学校所有学生构成的集合就作为一个全集.

（2）空集：不包含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$.

例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解构成的集合就是空集 $\varnothing$.

（3）子集：如果集合 A 的元素都属于集合 B，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

如果 $A\subseteq B$ 且 B 中存在不属于 A 的元素，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 真包含于 B 或 B 真含 A，如图 1-2 所示.

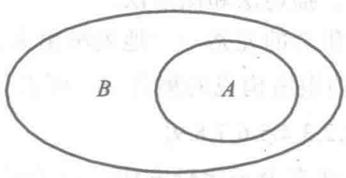

图　1-2

该定义用数学语言表述为：

若 $x\in A$，则 $x\in B$，那么 $A\subseteq B$. 若 $A\subseteq B$ 且存在 $x\in B$ 但 $x\notin A$，则 $A\subset B$.

规定：空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

一般地，在给定全集的情况下，任意集合都是全集的子集.

（4）相等集：对集合 A、B，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等（也称 A 与 B 是相等集）记作 $A=B$.

例 3 若 $A=\left\{x\middle|x^2-4x+3=0\right\}$，$B=\left\{x\middle|x\text{是奇数,且}1\leqslant x\leqslant 4\right\}$，则 $A=B$.

一般地：① $A\subseteq A$；②如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$.

例 4 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

为后面学习的需要，我们把自然数集记为 $\mathbf{N}$，整数集记为 $\mathbf{Z}$，有理数集记为 $\mathbf{Q}$，实数集记为 $\mathbf{R}$，显然：$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

4. 集合的基本运算

（1）并集：设 A，B 是两个集合，由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，读作"A 并 B"即：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

（2）交集：由所有既属于集合 A 又属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，读作"A 交 B"，即：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

（3）差集：由所有属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，叫做集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A\setminus B$，即：

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A,x\notin B\}.$$

特别的，若集合 B 包含于集合 A（即 $B\subset A$），则称 $A\setminus B$ 为 B 关于 A 的余集（或补集），记作 $\complement_A B$. 如：在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\left\{x\mid -3\leqslant x<5\right\}$ 关于 $\mathbf{R}$ 的余集为

$$\complement_A B=\left\{x\mid x<-3\text{ 或 }x\geqslant 5\right\}.$$

集合的并集、交集、差集的运算满足下面的基本法则（可利用集合的相关定义来验证）.

设 A、B、C 为三个任意集合，则有：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$.

（4）幂等律：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$.

（5）吸收律：如果 $A\subseteq B$，则：$A\cup\varnothing=A$，$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

5. 区 间

一些特殊集合可以用区间来表示.

设 a、b 为实数，且 $a<b$，则

（1）满足不等式 $a<x<b$ 的所有 x 构成的集合叫做以 a、b 为端点的开区间，记作(a,b)，即：$(a,b)=\left\{x\middle|a<x<b\right\}$，在数轴上表示如图 1-3 所示.

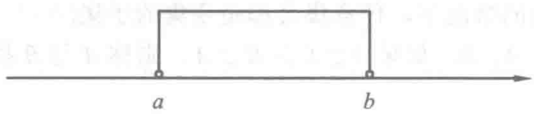

图 1-3

（2）满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的所有 x 构成的集合叫做以 a、b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即：$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$，在数轴上表示如图 1-4 所示.

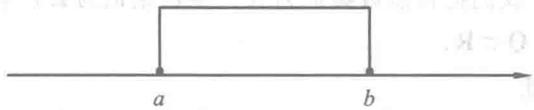

图 1-4

（3）满足不等式 $a<x \leqslant b$ 或 $a \leqslant x<b$ 的所有 x 构成的集合叫做以 a、b 为端点的半开半闭区间，分别记作 $(a,b]$ 或 $[a,b)$，即 $(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$，$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$，在数轴上分别表示如图 1-5 和图 1-6 所示.

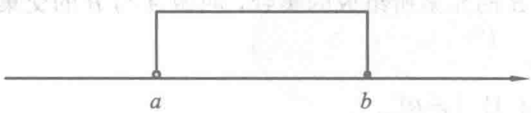

图 1-5

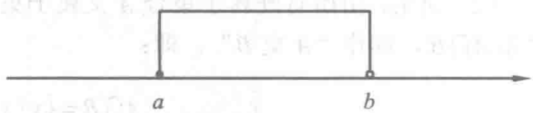

图 1-6

以上三类区间统称为有限区间，另外还有下面几类无限区间：

（4）$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$，如图 1-7 所示.

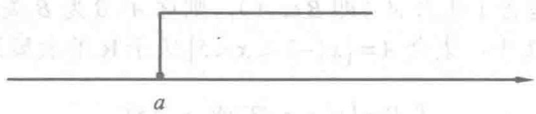

图 1-7

（5）$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$，如图 1-8 所示.

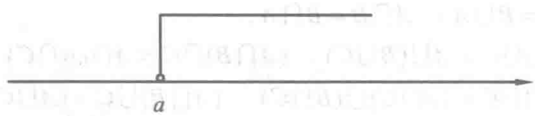

图 1-8

（6）$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$，如图 1-9 所示.

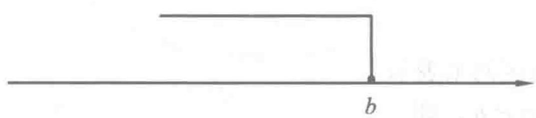

图 1-9

（7）$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，如图 1-10 所示.

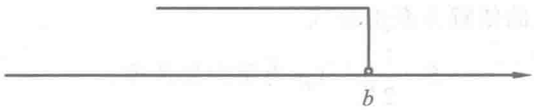

图　1-10

（8）$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，表示全体实数的集合.

6. 邻　域

设 x_0、δ 为给定的实数且 $\delta>0$，称数集（$x_0-\delta$，$x_0+\delta$）为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，同时称 x_0 是邻域的中心，δ 是邻域的半径，即：

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x\big||x-x_0|<\delta\}.$$

事实上，$U(x_0,\delta)$ 在数轴上表示到 x_0 的距离小于 δ 的所有点构成的集合，如图 1-11 所示.

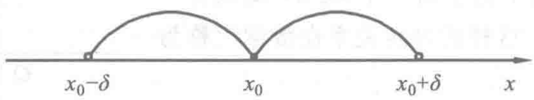

图　1-11

例如：$|x-1|<2$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，以 2 为半径的邻域，也就是开区间$(-1,3)$.

在点 x_0 的 δ 邻域内去掉点 x_0 得到的集合称为以点 x_0 为中心，以 δ 为半径的去心邻域，记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$.即有 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$，如图 1-12 所示.

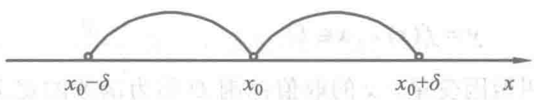

图　1-12

例如：$0<|x-1|<2$，即为以点 $x_0=1$ 为中心，以 2 为半径的去心邻域，即$(-1,1)\cup(1,3)$.

二、函数的概念

1. 常量与变量

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会遇到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在某个问题的研究过程中始终保持不变的量，称为常量；另一类是在某个问题研究过程中会出现变化，即可取一些不同值的量，称为变量.

例如，掷同一铅球数次，其中铅球的质量、体积为常量，而投掷距离、上抛角度均为变量.又如，将一密闭容器中的气体加热，在加热过程中容器中气体的体积和分子数保持不变，是常量；而容器内气体的温度和气压在不断变化，是变量.

常量一般用 $a,b,c,\cdots$ 字母表示，变量用 $x,y,u,t,\cdots$ 字母表示，常量 a 为一定值，在数轴上可用定点表示.

在研究实际问题的过程中，人们还发现有几个变量同时变化，它们并不是孤立的，而是互相联系且遵循一定的变化规律.

例 5　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 S，如果取开始下落时

刻$t=0$，那么S与t之间的依赖关系由公式

$$S=\frac{1}{2}gt^2\ （g 为重力加速度）$$

表示。若物体到达地面的时刻$t=T$，则t在时间区间$[0,T]$上任取一个值时，由上面的公式都可确定出S的对应值.

例 6 设集合X、Y均为实数集，按照关系$y=x-2$，对集合X中的每一个实数x，在集合Y中有唯一的一个数y与之相对应.满足此关系的点集为

$$\{(x,y)|y=x-2,x\in X,y\in Y\}.$$

此集合在直角坐标平面上对应的点的集合，如图 1-13 所示.

这个例子给出了集合X中的元素与集合Y中的元素的一种对应规则，通过此规则，建立起了由集合X到集合Y的一种对应关系.其中，对于每一个$x\in X$，均只有一个确定的$y\in Y$与之对应，这样的对应关系在数学上称为函数关系.

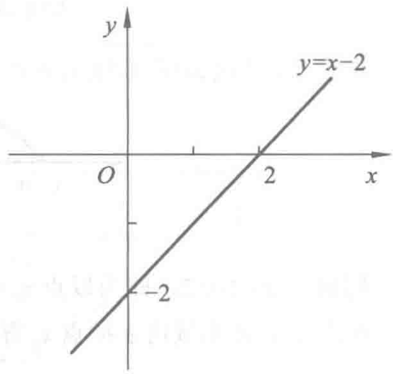

图 1-13

2. 函数的定义

定义 1 设D是一个非空实数集合，如果对任意一个$x\in D$，按照对应规则f，总存在唯一确定的实数值y与之对应，则称f是D上的一个函数，习惯上也称y是x的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

式中：x叫做自变量，y叫做因变量，x的取值范围D称为函数的定义域.

函数的定义中，对于每个$x\in D$，按照某种对应法则f，总存在唯一确定的实数值y与之对应.这个实数值y称为函数f在x处的函数值，记作$f(x)$即$y=f(x)$.当x遍取实数集D的每个数值时，对应函数值的全体构成的数集$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

表示函数对应法则的符号常常用“g”、“f”等表示，这时函数就记作$y=g(x)$、$y=f(x)$等.

值得注意的符号f与$f(x)$是有区别的：f表示自变量x和因变量y之间的对应法则，而$f(x)$表示自变量x对应的函数值.

3. 函数的相等

函数概念反映了自变量和因变量之间的依赖关系.它涉及定义域、对应法则和值域.很明显，只要定义域和对应法则确定了，值域也就随之确定.因此，定义域和对应法则是确定函数的两个基本要素.

定义 2 两个函数的定义域和对应法则都分别相同，就称这两个函数相同（或相等）.

例 7 函数$f(x)=\dfrac{x}{x}$与$g(x)=1$，因为$f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$g(x)$的定义域为（$-\infty$，$+\infty$），所以$f(x)$与$g(x)$是不同的函数.

例 8 $y=\arcsin(x^2+2)$.

对任何实数x，都没有与给定规则相对应的y值存在，函数定义域不能为空集，所以此式

不是函数.

思考：$y=x^2$与$y=(\sqrt{x})^4$是不是相同的函数？$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$呢？

4. 函数定义域的求法

对于由实际问题得到的函数，其定义域应该由问题的具体条件来确定.

如函数$S=\pi r^2$中，自变量r是圆的半径，故此函数的定义域就是（0，+∞）. 例6中，自变量t表示自由落体下落的时间，T是落到地面的时刻，故此函数的定义域是[0，T].

若函数由公式给出时，不考虑函数的实际意义，这时函数的定义域就是使式子有意义的自变量的一切实数值.

通常情况下，求函数定义域时要注意以下几点：

（1）分式中分母不能为零.

（2）偶次根式中被开方式的值非负.

（3）对数式中真数大于零，底数大于零且不等于1.

例9　求函数$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域和值域.

解　由$1-x^2\geqslant 0$得$-1\leqslant x\leqslant 1$，即$y=\sqrt{1-x^2}$的定义域是$[-1,1]$.

又在$[-1,1]$内，$0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$，所以$y=\sqrt{1-x^2}$值域是$[0,1]$.

例10　求$y=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$的定义域.

解　由$\begin{cases}x^2-1\neq 0\\x>0\end{cases}$可得$\begin{cases}x\neq 1 \text{ 或 } x\neq -1\\x>0\end{cases}$

即$0<x<1$或$x>1$，所以$y=\dfrac{\ln x}{x^2-1}$的定义域是$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

5. 函数的表示方法

一般情况下，表示函数的方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法）.

（1）表格法：如一块钢坯从1 000°C的炉中取出放入温度为0°C的水中冷却，每隔一分钟测量一次钢坯的温度，得到如下数据：

时间/min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
温度/°C	607	367	223	135	82	50	30	18	11	6	…

从上面的表格可以清楚地看出钢坯的温度随时间变化的规律，随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近冷水的温度.

（2）图形法：用图形法表示函数是基于函数图形的基本概念，即坐标平面上的点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数$y=f(x)$，$x\in D$的图形.

（3）解析法：在用解析法表示函数时，有些函数在整个定义域范围内可以用一个数学式子来表示.但有些函数在其定义域的不同部分要用不同的数学式才能表示，这类函数称为分段函数.值得注意的是，分段函数的定义域是几个不相交的“子定义域”的并集.求分段函数值时，应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如，函数 $y=\begin{cases}-x+1, 0\leqslant x<1,\\ -x-1, -1\leqslant x<0.\end{cases}$ 是一个分段函数，其定义域为 $\{x\mid -1\leqslant x<1\}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$；

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{1}{2}$.

6. 函数关系的建立

在解决实际问题建立函数关系时，首先要分析问题中哪些是常量，哪些是变量；其次要分清变量中哪个应作为自变量，哪个作为函数值，并用习惯上常用的字母区别，然后把变量暂时固定，利用几何关系、物理定律或其他知识列出变量间的等量关系式，简化后便能得到需要的函数关系.在找出函数关系式后，一定还要根据题意写出函数的定义域.

例 11　一块边长为 a 的正方形铁皮，在其四角剪去同样大小的小正方形后制成无盖容器.求该容器的容积与被剪小正方形边长之间的函数关系.

解　根据题意，设被剪小正方形的边长为 x，容器的容积为 V，则 V 与 x 关系为

$$V(x)=(a-2x)^2x$$

显然，容器的底边长和高都应为正值，所以 $V(x)$ 的定义域为 $0<x<\dfrac{a}{2}$.

例 12　某公共汽车路线全长 20 km，乘坐 5 km 以下者收费 1 元，乘坐 5~10 km 者收费 2 元，乘坐 10 km 以上者收费 3 元.试将票价表示成路程的函数.

解　根据题意，票价 $f(x)$ 与路程 x 的函数关系为 $f(x)=\begin{cases}1, & (0<x<5),\\ 2, & (5\leqslant x\leqslant 10),\\ 3, & (10<x\leqslant 20),\end{cases}$ 如图 1-14 所示.

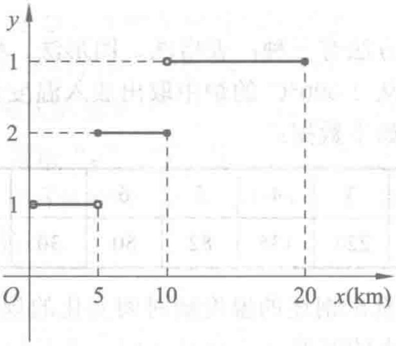

图　1-14

习题　1-1

1. 已知集合 $A=\{a,b,c,\}$，则集合 A 的非空真子集的个数是________.

2. 若集合 $M=\{0,1,2\}$，$N=\{x\mid x=2a, a\in M\}$，则集合 $M\cup N=$________，$M\cap N=$________.

3. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.

（1）当 $m=3$ 时，求集合 $A\cap B$，$A\cup B$；

（2）若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

4. 求下列函数的值域：

（1）$y=\sqrt{x}+1$；（2）$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；

（3）$y=-x^2+4x-7$，$x\in\{0,1,2,3,4\}$；（4）$y=-x^2+4x-7$（$x\in[0,3]$）.

5. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

（2）$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

6. 某市场经营一批进价为 30 元/件的商品，在市场试销中发现，此商品的销售单价 x（元）与日销售量 y（件）之间呈线性函数关系 $y=a-bx$（a，b 为常量），如下表所示：

x	…	30	40	45	50	…
y	…	60	30	15	0	…

（1）根据表中提供的数据，确定 y 与 x 的函数关系式；

（2）设经营此商品的日销售利润为 p 元，根据上述关系，写出 p 关于 x 的函数关系式，并指出销售单价 x 为多少元时，才能获得最大日销售利润？（提示：日销售利润=进售价差×日销售量）

7. 设一圆柱体体积为 V，试将其表面积 S 表示为底半径 r 的函数，并求其定义域.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}|x-1|-2, & (|x|\leqslant 1),\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & (|x|>1).\end{cases}$ 求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$、$f(-3)$.

9. 若 $y=\begin{cases}x^2, & (0<x\leqslant 1),\\ \dfrac{1}{2}, & (x=0),\\ 1-x, & (-1\leqslant x<0).\end{cases}$ 求该函数的定义域和值域，并绘制函数图像.

第二节 函数的几种特性

研究函数性质的目的是了解函数所具有的特性，掌握其变化规律. 本节主要讨论与函数的几何图形有关的单调性、有界性、奇偶性、周期性.

一、函数的单调性

定义 1 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若对于 D 内的任意 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称此函数在 D 内是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称此函数在 D 内是单调减少的.

函数在定义域内具有单调增加或单调减少的性质统称为单调性.

关于函数在区间上的单调性有如下定义：

设函数 $y=f(x)$ 的区间 I 内有定义，若对于 I 内的任意 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$），则称此函数在区间 I 内是单调增加（或减少）的，同时也称区间 I 为函数的单调增加（或减少）区间.

一般地，单调增加的函数图像是沿 x 轴正向逐渐上升的，如图 1-15 所示；单调减少的函数图像是沿 x 轴正向逐渐下降的，如图 1-16 所示.

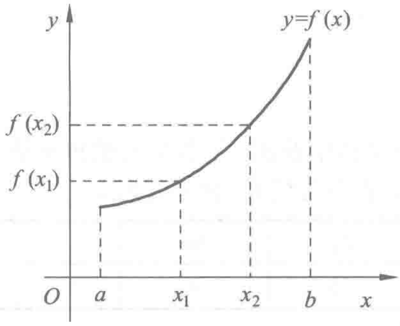

图 1-15

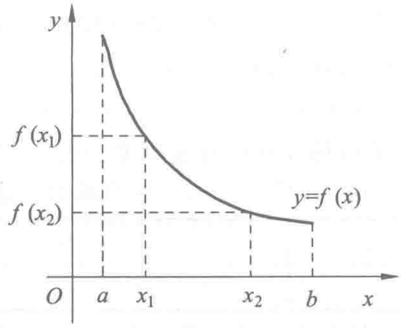

图 1-16

例 1　显然函数 $f(x)=x^2$ 在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内既不是单调增加也不是单调减少的函数，但在 $[0,+\infty)$ 上为单调增加的，在 $(-\infty,0]$ 上为单调减少的，即 $[0,+\infty)$ 与 $(-\infty,0]$ 分别是函数的单调增加区间和单调减少区间，如图 1-17 所示.函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调增加的，如图 1-18 所示.

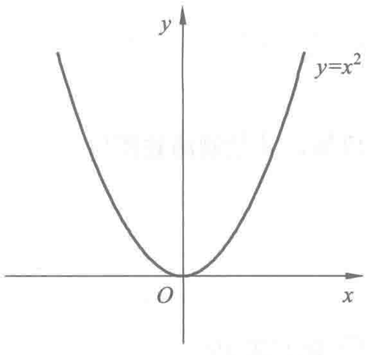

图 1-17

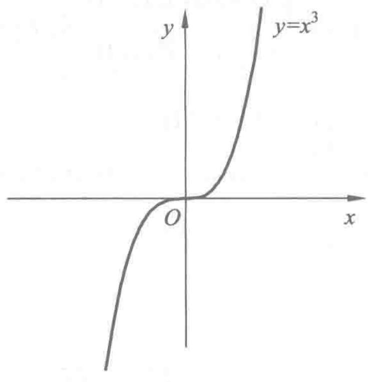

图 1-18

例 2　用定义证明函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

证　对于任意 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1+x_1}-\frac{x_2}{1+x_2}=\frac{x_1(1+x_2)-(1+x_1)x_2}{(1+x_2)(1+x_1)}=\frac{x_1-x_2}{(1+x_2)(1+x_1)}<0$$

即 $f(x_2)>f(x_1)$，故函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的.

二、函数的有界性

定义 2　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个常数 $M>0$，使得对任意 $x\in D$ 恒有