

財務金融類 6

財務數學概論

AN ELEMENTARY INTRODUCTION TO
MATHEMATICAL FINANCE SECOND EDITION

OPTIONS AND OTHER TOPICS

作者：SHELDON M. ROSS

譯者：楊和利、蔡佩珊、林問一



台灣金融研訓院

Taiwan Academy of Banking and Finance

財務金融類 6

財務數學概論

AN ELEMENTARY INTRODUCTION TO
MATHEMATICAL FINANCE

SECOND EDITION

OPTIONS AND OTHER TOPICS

作者：SHELDON M. ROSS

譯者：楊和利、蔡佩珊、林義順



台灣金融研訓院

Taiwan Academy of Banking and Finance

財務數學概論／Sheldon M. Ross 原著．

楊和利, 蔡佩珊, 林問一譯．

-- 初版.-- 臺北市：臺灣金融研訓院，民 93
面； 公分.-- (財務金融系列；7)

ISBN 986-7506-28-6 (平裝)

1. 商業數學

493.1

93023044

財務數學概論

著作者：Sheldon M. Ross

譯者：楊和利、蔡佩珊、林問一

發行：財團法人台灣金融研訓院

地址：111 台北市中山北路 7 段 81 巷 51 號

電話：(02)28741616(222~225)

印刷：優彩股份有限公司

初版：民國九十四年一月

郵撥帳號：0532300-1 財團法人台灣金融研訓院

版權所有，翻印必究

本書如有缺頁、破損、裝訂錯誤，請寄回更換。

ISBN 986-7506-28-6

〈財務數學基本入門，二版〉

關於選擇權定價理論數學上的基本介紹即為布雷克－休斯選擇權理論，亦涵蓋諸如貨幣的時間價值、投資報酬率、效用函數、最大的預期效用、平均數變異數分析、風險值、最適投資組合選擇、最適模型和資本資產定價模式等一般的財務專題。

作者假設不需先對機率有所認知，而所有必須具備的知識將在機率、常態隨機變數和構成布雷克－休斯理論的幾何布朗運動模型等章節，簡單且清楚地說明。作者以很多例題清楚地解釋套利的概念；而後介紹套利理論，且利用套利理論和幾何布朗運動的多期二項式近似模型，獲得布雷克－休斯買權公式簡易的推導。此簡易的推導有助於推論出： δ 避險策略；布雷克－休斯公式偏微分的推導；支付股票股利及證券價格易受到隨機跳動影響之選擇權非套利定價。另外，也將探討估計幾何布朗運動波動參數的新方法。之後的章節將論述新奇選擇權風險中立(無套利)的定價——透過蒙地卡羅模擬、多期二項式歐式與美式選擇權的近似模型等兩種模型。最後，作者指出符合幾何布朗運動的真實價格資料，並非完全適合證實模型如何被用來處理較一般的情況。

本書其他章節亦論述數學上極精確且較適用方法的複雜主題。在此呼籲專業交易者及大學生研讀本書所介紹的基礎財務概念。

Sheldon M. Ross為美國加州柏克萊大學工業工程和管理研究學系教授，其於史丹佛大學獲得統計學博士學位且之後任教於柏克萊大學。他發表超過100篇的文章與各類統計學和機率領域的教科書。其在工程機率與資訊科學期刊上持續發表文章，為數學統計學會的研究員，且為Humboldt U.S. Senior Scientist Award的獲獎者。

〈原著序〉

選擇權擁有於特定條件下買進或賣出某一標的證券的權利，但無義務。買權為擁有買進標的證券的權利，而賣權為擁有賣出標的證券的權利，此兩類選擇權將有一個履約價格和執行時點。此外，在選擇權運作下存在兩個標準條件：在到期日才可執行的歐式選擇權，反之則為可於到期日之前的任何時點執行的美式選擇權。因此，履約價格為 K 而到期日為 t 的歐式買權，給予持有人於時點 t 以 K 的價格買進一單位標的證券的權利；而美式買權則給予持有人可於到期日 t 之前的任何時點，或到期時點 t 買進一單位標的證券的權利。

選擇權強勢市場的前提則以有效率的計算方式進行評價，根據著名的布雷克－休斯公式對買權(美式或歐式)進行評價，此公式假設標的證券的價格服從一個幾何布朗運動。此意含 $S(y)$ 為標的證券在時點 t 的價格，直到時點 t 的任一歷史價格，在未來特定時點 $t+y$ 相對於時點 y 的價格比率為一個對數常態分配，其平均數和變異參數分別為 $t\mu$ 和 $t\sigma^2$ 。意即，

$$\log\left(\frac{S(t+y)}{S(y)}\right)$$

此為一平均數為 $t\mu$ 而變異參數為 $t\sigma^2$ 的常態隨機變數。布雷克和休斯證實，在價格服從一個幾何布朗運動的假設下，買權存在一個單一價格，且不允許一個理想化的交易者——在無

任何交易成本之下立即進行交易（在所有情況皆會保證獲利的策略）。換句話說，當選擇權的價格由布雷克－休斯公式評價時，將不存在保證獲利（亦即無套利機會）。除此之外，選擇權的價格只根據幾何布朗運動中的變異參數 σ （利率、標的證券的價格和選擇權的條件），而不根據參數 μ 。因為參數 σ 為證券波動性的衡量工具，故常被稱為波動參數。

風險中立的投資者會透過報酬的預期現值來衡量投資工具。假使此類投資人透過買進與賣出證券的所有投資工具，變成公平賭局的幾何布朗運動方式來塑造一證券，而此投資人對證券買權的評價，將透過布雷克－休斯公式準確得知。基於此項理由，布雷克－休斯評價時常被稱為風險中立評價。

本書首要目的為推導和解釋布雷克－休斯公式。然而，此推導需要具備一些機率常識，而前三章即為關於機率議題的探討。第1章介紹機率與實驗機率。探討隨機變數——數值由實驗機率之結果決定，為期望值與隨機變數之變異數的概念。第2章探討隨機變數；此隨機變數之機率由鐘型曲線決定。本章也將介紹中央極限定理，即機率可能為最重要的理論結果，說明隨機變數大數總和將近似於一常態隨機變數。第3章介紹幾何布朗運動過程；我們定義及證實其如何由較簡單的步驟限制而得之，並探討證券價格模型。

在了解機率概念之後，本書的第二部分始於第4章，此章將介紹利率及現值的概念。再者，構成布雷克－休斯公式的主要概念為套利理論，此為第5章的主題。在本章中我們將證實套利理論將如何用來決定不同情況下的價格，包含單期二項式

選擇權模型。第6章則說明利用套利理論來說明在多期二項式模型下的特定無套利選擇權成本。第7章則是利用第6章的結果，且遵循第3章幾何布朗運動的近似值，得出布雷克－休斯方程式對於買權定價的簡單推導；亦推導合成選擇權成本參數的函數之特性，作為delta避險的策略。將於第8章探討選擇權額外的結果，其中我們將推導支付股票股利下的選擇權價格；證實如何利用多期二項式模型，以決定美式賣權風險中立價格的近似值；提出當證券價格服從一個加上隨機跳動值的幾何布朗運動模型時的選擇權價格；且提出許多不同波動參數的估計式。

第9章則說明，在許多情況下，套利考量不只產生單一成本。我們將證實投資人效用函數及其對於投資可能結果機率估計之重要性。同時將介紹平均數變異數分析，風險值和條件風險值的概念及資本資產定價模式。此外，我們將證明，當證券價格服從一個幾何布朗運動，根據布雷克－休斯公式定價買權，可能仍存在預期報酬為正且標準差相對小的投資機會。(即當投資人對於幾何布朗運動中參數 μ 的評價異於使所有投資皆為公平賭局的價值時，投資機會就將出現。)

第10章我們將探討財務上一些最適的模型。第11章則介紹一些非標準或「新奇的」選擇權，如界限、亞式和回顧型選擇權。我們將解釋如何利用蒙地卡羅模擬來降低變異數之技術，進而有效率的決定幾何布朗運動之風險中立評價。

我們即使懷疑幾何布朗運動形成的正確性，但布雷克－休斯公式仍是有用的。只要此模型的概念至少約略有根據的，利

用此模型即可獲得選擇權的近似價格。因此，假使選擇權真實的交易價格低於理論價格，而相對於證券本身的價格而言，選擇權的價格似乎將會被低估，因而會引導投資人考慮一個買進選擇權和賣出證券的策略（當選擇權真實的交易價格高於理論價格，則建議採取相反的策略）。第12章則說明真實資料不可能總是符合幾何布朗運動模型，因此可能需要考慮較一般化的模型。在商品價格的個案中，許多交易者深信證券價格均數回復之概念：特定商品的市場價格傾向回復到固定值。第13章探討一個較幾何布朗運動一般化的模型，此模型可被用來訂定此商品的價格。

此版本更新的部分

第二版遵循第一版整體的架構，新增的部分如下所示：

- 介紹一個新且更深入的布雷克－休斯評價公式簡單的推導方式(7.2節)。
- delta避險的選擇權複製技術已被證實(7.4節)。
- 推導布雷克－休斯選擇權成本函數的偏微“Greeks”方程(7.5節)。此推導尚未出現在之前的其他文獻中，而且較為簡單。
- 根據三種不同股利支付形式，進行推導支付股票股利之歐式買權的無套利價格(8.2節)。
- 介紹一個估計波動參數的新方法。且相較於目前大多數人所採用的方法而言，此方法容易被採用，並且應可產生一個較佳的波動率估計式(8.5.4節)。
- 在缺乏價格評價模型之下透過套利訂定合約價格，此

章節增加一些額外的論點，如買權價格為一履約價格 K 的凸函數和選擇權投資組合定理(5.2節)。

- 介紹一個新且簡單的買權無套利價格之推導，當證券價格服從一個加上隨機跳動的幾何布朗運動過程。一個明確的公式(當跳動值為一對數分配)，界限和近似值(在一般個案下)已被證實(8.4節)。
- 第10章為一全新的章節，此章介紹財務上最適的模型。
- 增加風險值與條件風險值一節(9.4節)。
- 補充更多新的例題與習題。

一個應被提出的技術性論點，則為我們利用 $\log(x)$ 表示法表示自然對數 x 。意即，對數 e 定義為

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$$

而值約為2.71828...。

我們想要感謝Ilan Adler和Shmuel Oren兩位教授會談的啟發；Mr. Kyle Lin許多珍貴的評論；Mr. Nahoya Takezawa整體的評論及其於財務章節部分所進行的數值分析。

〈譯者序〉

近年來，由於金融環境的快速變遷，為因應國內現階段的金融困境，政府金融改革的決心日益殷切，特別是民國88年11月及90年6月分別通過了「金融機構合併法」及「金融控股公司法」。再加上國內在加入WTO後，跨國性金融集團的強敵壓境，為因應國際競爭趨勢，金融商品日趨多元，金融控股公司爭相成立，乃至跨業多角化的經營，無不力求綜效，以降低經營成本，強化產業規模與競爭優勢。顯然地，金融商品將不斷地在國內推陳出新，而其定價通常與數學有關，故如何強化「財務」內涵，提升「數學」能力，實為金融從業人員提升自我競爭力應正視的問題。

本書研討的主題計有：機率、常態隨機變數、幾何布朗運動、利率與現值、套利理論、套利定價、布雷克—休斯公式、選擇權及新奇選擇權等等。其中，由於近年來國內金融市場快速發展，衍生性金融商品亦隨之推陳出新，且成為專業投資人避險及投機的工具。現今，在金融市場不斷的擴大為世界性市場的潮流下，了解衍生性金融商品價格的訂定尤其重要。

布雷克—休斯選擇權定價公式，在選擇權定價理論中扮演極為重要的角色，因此只要談論關於選擇權價格的訂定問題，大多數人則會想到著名的布雷克—休斯公式。而「財務數學概論」則是藉由最基本的布雷克—休斯公式推導，引領讀者進入選擇權定價的世界，之後說明界限、亞式和回顧型等新奇選擇

權價格的訂定議題。因此，金融從業人員甚至大學院校財經系所學生及研究生若善加研讀本書所介紹的財務概念，應有極大的助益。

楊和利 蔡佩珊 林同－ 謹識

民國 94 年 1 月

＜推薦序＞

財務數學就是在財務上以大量及複雜的數學運算加上經濟思考模式，來取代舊有的純理論觀念，亦即將數學運用於財務理論上，以期減少傳統投資決策上的人為偏誤，提高避險與套利等財務績效，並大幅強化金融創新及風險管理能力。

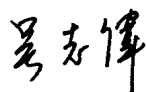
財務數學的歷史可以回溯到17世紀法國數學家B.Pascal與P.Fermat創立系統性的方法來計算未來事件發生的機率開始，而其理論核心直到1973年才出現。這一年F.Black與M.Scholes提出了著名的「或有求償權」(Contingent claim) 定價模式、交易避險策略以及或有求償權之價值所遵循的偏微分方程式，可謂是財務數學的濫觴。

美國學界對於財務數學的重視，如麻省理工學院、芝加哥大學及賓州大學華頓學院等一流商業教育學府，近年來都發展出綜合經濟、財務與統計等學科整合的課程，希望能培育出具有堅實計量分析基礎的頂尖商業人才。此一風潮已蔚為美國財經學界的最新趨勢；而國內在大學科系或學程設計上亦有跟進之勢。然就國內實務界而言，由於自民國88年起國內衍生性金融商品陸續上市，市場上對於財務工程人才之需求極為殷切，因此具備財金專業理論、嚴謹數理及資訊科技訓練的財務工程高手，將是21世紀最炙手可熱的專業人才之一。

本書的主要內容在使讀者對金融商品的定價模式、假設條件、適用性及限制條件上能有基本的認識。為使讀者能輕鬆地

進入這些議題，在之前各章首先介紹機率論、終值與現值及隨機過程等主題，所以本書是進入財務工程領域的一本好書。

本書譯者林問一、楊和利、蔡佩珊三位學者在財務數學領域各有所長，特別是林問一教授更是美國紐約州立大學水牛城分校財務與管理經濟學系博士。譯者翻譯本書的用心是希望能在財務數學教育上貢獻所學，而財務數學的要旨無非是金融創新與滿足顧客需求，此二者正是吾人長久以來努力的方向，故樂為之序。



謹識

新竹國際商業銀行 總經理

民國 94 年 1 月

＜推薦序＞

1997年諾貝爾經濟學獎決定頒給推導出布雷克—休斯〈Black-Sholes〉公式的學者，在瑞典皇家科學院宣佈的得獎理由中，讚揚獲獎者「為股票選擇權建立了劃時代的估算方法。此一方法開拓了經濟評估方面許多新的領域，同時產生出新類型且兼具有效風險管理方法的財務工具」。

布雷克—休斯公式可以準確的計算出選擇權和一些重要金融商品的合理價格，並且容易理解與計算，因而被市場交易者廣泛的應用。比較不為人知的是，這個公式本身卻是建構在非常抽象的數學理論——隨機微分方程之上。1940年間，一位著名的日本數學家伊藤清〈Kiyosi Ito〉教授利用微分方程式來描述布朗運動隨著時間的改變。由於布朗運動充滿了不確定性，相當符合金融商品價格變化的特性，這個數學模型因此催生了布雷克—休斯公式。曾有評論提到該年諾貝爾獎獲獎名單若能包括伊藤教授，則這樁美事將更為圓滿。

長久以來，數理經濟與統計學一直是數學家們參與社會科學主要的兩座橋樑。近年來，由於投資已成為金融市場的主要行為，加上衍生性金融商品的多樣化，分析與評估投資報酬率的需求十分殷切。這項工作的挑戰性和高難度，吸引了許多從事數學研究，尤其是具有機率專長的數學家們投入這個領域，因而第三座橋樑儼然成形，它被命名為財務數學。布雷克—休斯公式獲得諾貝爾獎的冠冕，更加確定了這個領域研究工作的

重要性。

每一門學問在發展初期，研究者關注的往往是如何推導出新的理論，走出新的研究方向，財務數學亦復如是。但是，當理論不斷的推陳出新，各家學說又互相爭鋒之際，釐定學門的基礎論點和傳遞知識的工作卻愈顯重要，而擔負這承先啟後責任的學者，需要有先知卓見的判斷力與客觀包容的態度。正因為如此，我們很高興地見到著名的資深機率學家Sheldon Ross教授適時地為財務數學撰寫了這本入門書。

Ross教授在學生時代，即因經常以簡單易懂的語言重述老師的問題而著稱。我有幸曾受教於他，並多次擔任他的助教。對於其敏銳的思考和深入淺出的表達方式印象深刻。在他的課堂上，總是感覺如沐春風。校園內曾經流傳其為柏克萊加大四位金頭腦之一的佳話，至於其他三位是誰，則無人知悉，也許是讚美者刻意的保留彈性。

Ross教授著有許多機率統計方面的暢銷教科書。本書傳承了他一貫的表達技巧，在內容的安排上，從機率、隨機變數和布朗運動等數學工具開始，循序漸進地進入財務數學的基本觀念和理論，再繼以較複雜的財務工具和分析方法。在內容的呈現上，將抽象、艱深的數學公式賦予具體而淺顯的面貌，並輔以實際的範例，加深讀者的了解。尤其是書中充滿了作者流暢無礙的思考及推理，每讓讀者興起「山窮水盡疑無路，柳暗花明又一村」之嘆。

臺灣早年著作權觀念尚未普及時，坊間隨處可見翻印的原文教科書。記得在我赴美求學初次慕名拜訪Ross教授時，曾冒

然的拿出他的著作的「海盜版」向他請益，他不以為杵，微笑著檢視那本來自遠方的翻印本。當我警覺到失禮後，頓時慚愧的無地自容。事隔多年，適逢台灣金融研訓院經授權將Ross教授的新書翻譯成中文，並請我作推薦序，因緣際會，深感榮幸。

王家禮 謹識

于國立東華大學應用數學系

民國94年1月