21世纪高等院校经典教材同步辅导
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

高等几何

第三版

全程导学及习题全解

高星强　闫晓红　编

中国时代经济出版社

高等几何

第三版

全程导学及习题全解

高星强　闫晓红　编

中国时代经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等几何(第三版)全程导学及习题全解/高星强,闫晓红编.
—北京:中国时代经济出版社,2011.9
(21世纪高等院校经典教材同步辅导)
ISBN 978-7-5119-0941-1
Ⅰ.①高… Ⅱ.①高… ②闫… Ⅲ.①高等几何—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第149837号

书　　名:高等几何(第三版)全程导学及习题全解
出 版 人:王鸿津
作　　者:高星强　闫晓红
出版发行:中国时代经济出版社
社　　址:北京市丰台区玉林里25号楼
邮政编码:100078
发行热线:(010)83910219
传　　真:(010)68320584
邮购热线:(010)88361317
网　　址:www.cmepub.com.cn
电子邮箱:zgsdjj@hotmail.com
经　　销:各地新华书店
印　　刷:北京昌平百善印刷厂
开　　本:880×1230 1/32
字　　数:200千字
印　　张:9
版　　次:2011年9月第1版
印　　次:2011年9月第1次印刷
书　　号:ISBN 978-7-5119-0941-1
定　　价:16.00元

前　言

高等几何是师范院校和理工院校本科数学专业的重要基础课程，也是自然科学和工程技术领域中的一种重要数学工具。学习高等几何不仅可以培养和提高学生的空间想象能力，还可以提高学生的抽象思维能力。高等几何主讲的仿射几何和射影几何是欧式几何的推广，学习高等几何对于开拓学生的视野也有很大的帮助。然而高等几何内容丰富，具有基本概念多、习题类型广、技巧性强等特点。在教学课时数有限的情况下，很多内容和方法不能在课堂教学内完成。这就要求学生不仅要在课堂内系统学习基本概念和理论，还要在课外进行大量的自学和练习，才能熟练掌握解题技巧和方法。

梅向明、刘增贤、王汇淳、王智秋老师编写的《高等几何》（第三版），对高等几何教学进行了大胆的探索，把高等几何内容的更新与高等代数的发展接轨，是一本不可多得的好教材。我们针对该书编写了这本辅导书，为了帮助同学们进一步理解高等几何的基本概念、巩固基本理论和提高解题技巧，使学生们能够尽快掌握这门课程的思想方法和解题技巧，我们对本书内容作了如下安排：

1. 知识点归纳。本部分归纳总结了相应章节的知识要点，包括基本概念、性质以及重要定理等。高等几何学习建立在概念基础上，对概念及其性质的深入理解和体会是掌握各章节知识的关键。经常浏览该部分内容，既方便同学复习，还有助于同学理顺整体思路和框架。

2. 典型例题分析。本部分针对高等几何的重点和难点，精选了一些典型例题进行分析和解答。原教材中所包含的例题非常经典，为了避免重复，我们没有纳入其中，希望学习者对原教材和本辅导教材的典型例题充分理解，分析解题方法和思路，并熟练运用。

3. 习题全解。本部分内容给出了原教材课后习题的详细解答，为同学们自我练习给予帮助。

4. 同步练习题精选。本部分内容列举了一些新的题型，是典型例题和课后习题的补充，以加深对本章知识的掌握，进一步增强解题

能力。

全书最后我们精编了几套综合模拟题，以便大家检验学习的效果，进一步增强综合理解能力。

高星强（南开大学）负责编写了1—5章、闫晓红（天津城市建设学院）负责编写了6—10章，编写过程中杨红彦博士也提供了诸多帮助，同时本书参考了多本高等几何的教材和复习资料，在此向这些书籍的作者表示衷心感谢。对《高等几何》（第三版）教材作者梅向明、刘增贤、王汇淳、王智秋老师表示衷心的谢意！限于作者水平，书中有疏漏之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2011年6月

目　录

第一章　仿射坐标与仿射变换

一、知识点归纳

§1　透视仿射对应

本节主要掌握单比的概念，理解透视仿射对应及其性质.

1. 单比

共线三点 P_1，P_2，P 的单比表示为$(P_1\ P_2\ P)$，我们定义

$$(P_1\ P_2\ P)=\frac{P_1P}{P_2P}$$

其中 P_1P,P_2P 是有向线段$\overline{P_1P}$,$\overline{P_2P}$的数量，称 P_1，P_2 为基点，P 为分点.

当 P 为线段 P_1P_2 的中点时，$(P_1P_2)=-1$.

2. 透视仿射对应

(1) 同一平面内两直线的透视仿射对应

在一平面上设有两条直线 a 和 a'，l 为此平面上与 a，a' 均不平行的另一条直线，通过直线 a 上各点 A，B，C，… 分别作与 l 平行的直线，顺次交 a' 于A'，B'，C'，…，这样便得到直线 a 上点到 a' 上点的一个一一对应，称为透视仿射对应，如图 1—1.

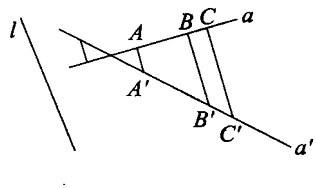

图 1—1

如果直线 a 和 a' 相交，则称交点是自对应点或不变点(二重点).

(2) 空间二平面的透视仿射对应

设两平面 π，π'，直线 l 与平面 π 和 π' 都不平行，如图 1—2. 通过平面

π内各点,$A,B,C,D\cdots$分别作l的平行线交平面π'于$A',B',C',D'\cdots$,这样便使平面π内的点与平面π'内的点建立了一一对应,称为平面π到π'的透视仿射对应.

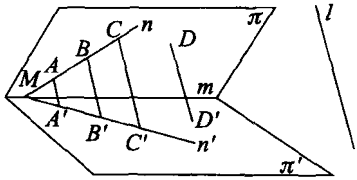

图 1—2

如果平面π和π'相交于直线m,则m上的每个点都是自对应点,并且在π和π'间的透视仿射对应下的自对应点都在直线m上,直线m叫做透视轴,简称轴. 如果π平行于π',则无自对应点,也不存在透视轴.

注:透视仿射对应与直线l的方向有关. 如果直线l方向不同,则得到不同的透视仿射对应.

3. 透视仿射对应的性质

(1) 保持同素性

(2) 保持结合性

(3) 保持共线三点的单比不变性

(4) 保持二直线的平行性

§2　仿射对应与仿射变换

1. 仿射对应(变换) 第一定义

有限次透射仿射对应复合.

(1) 同一平面内两直线的仿射对应

设同一平面内有n条直线$a_1,a_2,\cdots,a_n,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$顺次表示$a_1$到$a_2$,$a_2$到$a_3$,$\cdots$,$a_{n-1}$到$a_n$的透视仿射对应,经过这一串透视仿射对应,使$a_1$上的点与$a_n$上的点建立了一一对应,这个对应称为$a_1$到$a_n$的仿射对应,记为

$$\varphi=\varphi_{n-1}\cdot\varphi_{n-2}\cdot\cdots\cdot\varphi_2\cdot\varphi_1$$

如果a_1与a_n重合,则a_1到a_n的仿射对应叫做直线a_1到自身的仿射变换.

(2) 空间内二平面间的仿射对应

设 $\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_n$ 是 n 个平面，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$ 顺次表示 π_1 到 π_2，π_2 到 π_3，$\cdots$，π_{n-1} 到 π_n 的透视仿射对应，经过这一串透视仿射对应，使 π_1 上的点与 π_n 上的点建立了一一对应，这个对应称为 π_1 到 π_n 的仿射对应，记为

$$\varphi=\varphi_{n-1}\cdot\varphi_{n-2}\cdot\cdots\cdot\varphi_2\cdot\varphi_1$$

如果 π_1 与 π_n 重合，则 π_1 到 π_n 的仿射对应叫做平面 π_1 到自身的仿射变换.

2. 仿射对应(变换) 第二定义

若两个平面间(平面到自身)点的一个一一对应保持同素性、结合性和共线三点单比不变，则这个一一对应称为仿射对应(变换).

3. 仿射对应(变换) 性质

(1) 保持同素性，结合性

(2) 保持共线三点的单比不变

(3) 保持直线的平行性

§3 仿射坐标

1. 仿射坐标系

仿射变换不保持距离和角度，所以直角坐标系经过仿射变换不再是直角坐标系，因此我们要引进仿射坐标系.

笛卡儿坐标系在仿射对应(变换) 下的象叫做仿射坐标系.

设仿射坐标系 $O'-x'y'$，e'_1，e'_2 为两坐标轴上的任意正向量，则平面上任意点 P' 可表示为

$$\overrightarrow{O'P'}=x'e'_1+y'e'_2$$

(x',y') 称为 P' 的仿射坐标.

笛卡儿坐标系是仿射坐标系的特例，两坐标系的差别是：笛卡儿坐标系两轴上的单位长度相同，两坐标轴互相垂直；仿射坐标系两轴上单位长度可以不同并且两轴夹角任意.

注：平面上规定了正方向的两相交直线和直线外一点就可以确定一个仿射坐标系.

定理 3.1 设共线三点 P_1,P_2,P_3 的仿射坐标顺次为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，(x_3,y_3)，则单比

$$(P_1P_2P_3)=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}$$

定理 3.2 在仿射坐标系下，经过两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 的直线方程为

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

2. 仿射变换的代数表示

定理 3.3 平面上的仿射变换在仿射坐标系下的代数表示式为

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{cases} \qquad ①$$

其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

若 $\Delta=0$，也就是在奇异情况下，将没有逆变换，即构不成一一对应，所以 $\Delta\neq 0$ 是必要的.

仿射变换的逆变换式为

$$\begin{cases} x=a'_{11}x'+a'_{12}y'+a'_{13} \\ y=a'_{21}x'+a'_{22}y'+a'_{23} \end{cases}$$

其中

$$\Delta'=\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

在仿射变换的代数表示式中，要确定 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23}$ 这六个数，如果给出不共线的三对对应点，设 $(x_1,y_1)\to(x'_1,y'_1)$，$(x_2,y_2)\to(x'_2,y'_2)$，$(x_3,y_3)\to(x'_3,y'_3)$，代入仿射变换式后，得到两方程组

$$\begin{cases} x'_1=a_{11}x_1+a_{12}y_1+a_{13} \\ x'_2=a_{11}x_2+a_{12}y_2+a_{13} \\ x'_3=a_{11}x_3+a_{12}y_3+a_{13} \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} y'_1=a_{21}x_1+a_{22}y_1+a_{23} \\ y'_2=a_{21}x_2+a_{22}y_2+a_{23} \\ y'_3=a_{21}x_3+a_{22}y_3+a_{23} \end{cases}$$

由于三对对应点不共线，所以上面两方程的系数行列式不为零，可解出 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23}$，从而确定一个仿射变换.

从而可知不共线的三点唯一决定一个仿射变换.

3. 仿射变换的第三定义

平面上点之间的一个线性变换

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \end{cases}$$

其中 $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，叫做仿射变换.

4. 几种特殊的仿射变换

(1) 正交变换

当仿射变换 ① 式的系数满足正交条件，即

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1 \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 \end{cases}$$

时，仿射变换是正交变换.

(2) 位似变换

当仿射变换 ① 式的系数满足

$$\begin{cases} x' = kx + a_{13} \\ y' = ky + a_{23} \end{cases} \qquad (k \neq 0)$$

时为位似变换，k 为位似比.

(3) 相似变换

当仿射变换 ① 式的系数满足

$$\begin{cases} x' = a_1x - \lambda b_1y + d_1 \\ y' = b_1x + \lambda a_1y + d_2 \end{cases} \qquad (\lambda = \pm 1)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & -\lambda b_1 \\ b_1 & \lambda a_1 \end{vmatrix} = \pm (a_1^2 + b_1^2) \neq 0$$

时为相似变换.

注：相似变换总能分解为一个正交变换和一个位似变换的乘积.

(4) 压缩变换

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = by \end{cases} \qquad (ab \neq 0)$$

§4 仿射性质

1. 仿射性质(不变量)

图形经过任何仿射变换后都不变的性质(量),称为图形的仿射性质(仿射不变量).

注:同素性,结合性,平行性和共线三点单比不变是基本的仿射性质.

2. 有关仿射性质的一些定理和推论

定理 4.1 两条平行直线经过仿射变换后仍变为两条平行直线.

推论 1 两条相交直线经过仿射变换后仍变为两条相交直线.

推论 2 共点直线经仿射变换后,仍变为共点直线.

定理 4.2 两条平行线段之比是仿射不变量.

定理 4.3 两个三角形面积之比是仿射不变量.

推论 1 两个多边形面积之比是仿射不变量.

推论 2 两个封闭图形面积之比是仿射不变量.

二、典型例题分析

例 1 两条平行线段之比是仿射不变量.

证明 设线段 AB 平行于线段 CD,经过仿射变换后,其对应线段 $A'B'C'D'$ 互相平行. 下面我们只须证明

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

如图 1—3 所示,连接 BD,作 $CE \parallel BD$ 交 AB 于 E. 由于仿射变换保持结合性和平行性,所以 E 的对应点 E' 在 $A'B'$ 上,且 $C'E' \parallel B'D'$. 又因为仿射变换保持共线三点的单比,所以有

$$(BAE)=(B'A'E')$$

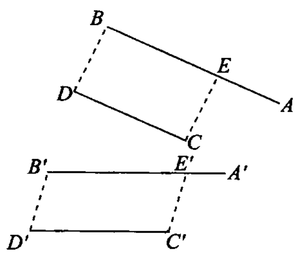

图 1—3

即

$$\frac{BA}{BE}=\frac{B'A'}{B'E'}$$

而

$BE \underline{\mathbin{/\!/}} DC, B'E' \underline{\mathbin{/\!/}} D'C'$

所以

$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$

综上所述，两条平行线段之比经仿射变换后不变.

例 2　求使直线 $x=0, y=0, x+2y-1=0$ 分别变为直线 $x+y=0, x-y=0, x+2y-1=0$ 的仿射变换.

解法一　设所求仿射变换为

$$\begin{cases} x'=a_{11}x+a_{12}y+a_{13} \\ y'=a_{21}x+a_{22}y+a_{23} \end{cases} \tag{①}$$

由 ① 得

$$x'+y'=(a_{11}+a_{21})x+(a_{12}+a_{22})y+(a_{13}+a_{23}),$$

因为$x=0$ 对应的直线为 $x'+y'=0$，则

$$a_{12}+a_{22}=0 \tag{②}$$

$$a_{13}+a_{23}=0 \tag{③}$$

由 ① 得

$$x'-y'=(a_{11}-a_{21})x+(a_{12}-a_{22})y+(a_{13}-a_{23}),$$

因为$y=0$ 对应的直线为 $x'-y'=0$，则

$$a_{11}-a_{21}=0 \tag{④}$$

$$a_{13}-a_{23}=0 \tag{⑤}$$

由 ① 得

$$x'+2y'-1=(a_{11}+2a_{21})x+(a_{12}+2a_{22})y+(a_{13}+2a_{23})-1,$$

因为 $x+2y-1=0$ 对应的直线为 $x'+2y'-1=0$，则

$$\frac{a_{11}+2a_{21}}{1}=\frac{a_{12}+2a_{22}}{2}=\frac{a_{13}+2a_{23}-1}{-1} \tag{⑤}$$

由 ②－⑥ 可解得

$$a_{13}=a_{23}=0, a_{11}=a_{21}=\frac{1}{3}, a_{12}=-a_{22}=-2$$

从而所求仿射变换为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - 2y \\ y' = \dfrac{1}{3}x + 2y \end{cases}$$

解法二　此三条直线不共点,可确定三个不共线点,由三对对应点可确定这个仿射变换.

由已知三条直线

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

求得三交点为$(0,0)$,$(0,\frac{1}{2})$,$(1,0)$.

由三对应直线

$$\begin{cases} x' + y' = 0 \\ x' - y' = 0 \\ x' + 2y' - 1 = 0 \end{cases}$$

求得三对应交点为$(0,0)$,$(-1,1)$,$(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

将上述三对对应点坐标分别代入(1) 式,可求得仿射变换为

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}x - 2y \\ y' = \dfrac{1}{3}x + 2y \end{cases}$$

例 3　利用仿射变换证明三角形中位线定理:三角形中位线平行于底边且等于底边之半.

证明　如图 1—4 所示,EF 为任意 $\triangle ABC$ 的中位线,$\triangle A'B'C'$ 为正三角形,$E'F'$ 为 $\triangle A'B'C'$ 的中位线,则易知 $E'F' \underline{\underline{/\!/}} \frac{1}{2}B'C'$.

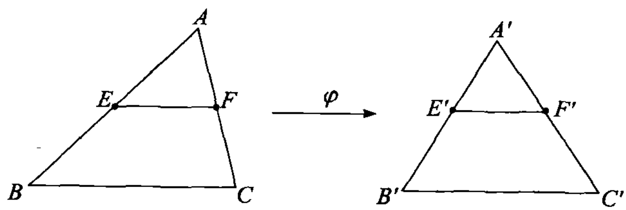

图 1—4