

数学解题

靠数学思想给力

(下)

笑王
著连



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

书山题海——跋涉艰难
名师大家——仙人指路

数学解题

靠数学思想给力

(下)

王笑
连著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本套书是关于数学解题与数学思想的书,本书共有三章,第六章特殊与一般的思想,第七章有限与无限的思想,第八章或然与必然的思想。

本书适合高中师生和数学爱好者参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学解题:靠数学思想给力.下/王连笑著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011.6

ISBN 978-7-5603-3340-3

I. ①数… II. ①王… III. ①数学-解法
IV. ①O1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 121495 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 李长波

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 17.5 字数 307 千字

版 次 2011 年 6 月第 1 版 2011 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3340-3

定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-06	138.00	134

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	即将出版	38.00	116
中学数学证明方法	即将出版	48.00	117

历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
历届俄罗斯大学生数学竞赛试题及解答	即将出版	68.00	
前苏联大学生数学竞赛试题集	2011-06	48.00	128



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	36
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-03	58.00	87
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2011-06	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅰ)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷Ⅱ)	2011-01	28.00	78
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的五心	2009-06	28.00	51
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室



已出版(即将出版)图书目录

书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
数论入门	2011-03	38.00	99
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
初等数学研究(Ⅰ)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011-07	60.00	127
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
理论与实用算术	2010-06	38.00	126
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上)	2011-08		134
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(下)	2011-08		135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84
最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从玢数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn

目 录

第六章 特殊与一般的思想.....	1
第一节 用一般性结论解决特殊性问题.....	2
第二节 从特殊性结果归纳出一般性结论	23
第三节 把特殊问题拓广为一般问题	35
第四节 用特殊化方法解决一般性问题	44
第五节 特殊化——解某些选择题的一种策略	70
第七章 有限与无限的思想	87
第一节 有限数列与无限数列	91
第二节 通过有限探求无限.....	107
第三节 用有限解决无限的数学归纳法.....	123
第四节 用无限研究有限.....	151
第五节 极限化——解某些选择题的一种策略.....	178
第八章 或然与必然的思想.....	191
第一节 古典概型——由或然接近必然.....	196
第二节 统计方法——由或然估计必然.....	205
第三节 数学期望——用必然回答或然.....	220
第四节 概率统计与其他数学知识的综合——用必然 研究或然.....	236
第五节 用概率统计知识证明等式或不等式——用或 然求解必然.....	258
后记.....	271
编后语.....	273

第六章

特殊与 一般的思想

在解决一个数学问题时,如果我们没有获得成功,原因常常在于我们没有认识到更一般的观点,即眼下要解决的只不过是一连串有关问题的一个环节。

——D. 希尔伯特

由特殊到一般,再由一般到特殊反复认识的过程是人们认识世界的基本过程之一.对数学这种由特殊到一般,再由一般到特殊的研究数学问题的基本认识的过程,就是数学研究的特殊与一般的思想.

特殊与一般的思想包括两个方面:第一个方面是,通过对某些个体的认识与研究,逐渐积累对这类事物的了解,再逐渐形成对这类事物的总体认识,发现特点,掌握规律,形成公式,由浅入深,由现象到本质,由局部到整体,从实践到理论.这种认识事物的过程就是由特殊到一般的认识过程.第二个方面是,当用特殊的方法归纳出一般结论和规律、形成理论之后,还要在理论指导下,用得到的规律解决这类事物中的新问题,这种认识事物的过程就是由一般到特殊的认识过程.由特殊到一般再由一般到特殊反复认识的过程,就是人们认识世界的基本过程.

数学也不例外.在数学学习的过程中,对公式、定理、法则的学习往往都是从特殊开始,通过总结归纳得出来的,这一过程是归纳的过程,经过证明后,成为一般性结论,又使用它们来解决相关的数学问题,这一过程是演绎过程,在数学中经常使用的归纳法、演绎法就是特殊与一般思想的集中体现.

第一节 用一般性结论解决特殊性问题

把要解决的一些特殊问题推进到一般,用一般性结论来解决,就是把维数较低或抽象程度较弱的有关问题转化为维数较高、抽象程度较强的问题,通过整体性质或本质关系的考虑,而使问题获得解决,离散的问题可以一般化,用连续手段处理,有限的问题可以一般化,用数学归纳法处理,由于特殊情况往往涉及一些细节而掩盖了问题的关键,一般情况则更明确地表达了问题的本质.波利亚说:“这看起来矛盾,但当从一个问题过渡到另一个,我们常常看到,新的雄心大的问题比原问题更容易掌握,较多的问题可能比只有一个问题更容易回答,较复杂的定理可能更容易证明,较普遍的问题可能更容易解决.”有时,为了解决一个特殊问题,我们去思考包含这个特殊问题的一个更大的问题,更普遍的问题,更一般的问题,将所遇到的问题放到一个更加波澜壮阔的背景上去考查,用一般性结论解决特殊性问题,是数学解题常用的方法.

【例1】(2006 江西卷理5) 对于 $\mathbf{R}$ 上可导的任意函数 $f(x)$, 若满足 $(x-1)f'(x) \geq 0$, 则必有().

- A. $f(0) + f(2) < 2f(1)$ B. $f(0) + f(2) \leq 2f(1)$
C. $f(0) + f(2) \geq 2f(1)$ D. $f(0) + f(2) > 2f(1)$

【分析及解】 依题意,当 $x \geq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上

是增函数;

当 $x < 1$ 时, $f'(x) \leq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上是减函数;

故 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时取得最小值, 即有

$$f(0) \geq f(1), f(2) \geq f(1), \text{ 即 } f(0) + f(2) \geq 2f(1). \text{ 故选 C.}$$

本题首先考虑的是一般性的结果: 任意函数 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时取得最小值, 然后再根据题目的要求, 对特殊的函数值进行比较.

【例 2】 设 $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$, 求和

$$f\left(\frac{1}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{3}{2\ 011}\right) + \cdots + f\left(\frac{2\ 009}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2\ 010}{2\ 011}\right)$$

【分析及解】 直接计算, 无从下手, 我们注意到, 所求和式中的分母相同, 都是 2 011, 而分子是从 1 到 2 010 的连续的正整数, 因而有 $\frac{1}{2\ 011} + \frac{2\ 010}{2\ 011} = 1$, $\frac{2}{2\ 011} + \frac{2\ 009}{2\ 011} = 1$ 等等, 所以可以先考虑一般情形:

$$\begin{aligned} f(a) + f(1-a) &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^{1-a}}{4^{1-a} + 2} = \\ &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4}{4 + 2 \times 4^a} = \\ &= \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{2}{4^a + 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{3}{2\ 011}\right) + \cdots + f\left(\frac{2\ 009}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2\ 010}{2\ 011}\right) = \\ &\left[f\left(\frac{1}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2\ 010}{2\ 011}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{2\ 009}{2\ 011}\right)\right] + \cdots + \\ &\left[f\left(\frac{1\ 005}{2\ 011}\right) + f\left(\frac{1\ 006}{2\ 011}\right)\right] = \\ &\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{1\ 005\text{个}} = 1\ 005 \end{aligned}$$

【例 3】 求和 $a_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \cdots + kC_n^k + \cdots + nC_n^n$.

【分析及解】 引进恒等式, 考虑二项式这样一个一般情形, 即

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k.$$

由于所求的和式 C_n^k 的系数为 k , 而 k 恰为二项展开式中 x^k 的指数, 使我们联想到导数.

$$\text{对 } x \text{ 求导, 有 } n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1},$$

令 $x=1$, 得 $\sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}$.

【例 4】(2008 江苏卷 23) 请先阅读: 在等式 $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 (x \in \mathbf{R})$ 的两边求导, 得

$$(\cos 2x)' = (2\cos^2 x - 1)'$$

由求导法则, 得

$$(-\sin 2x) \cdot 2 = 4\cos x \cdot (-\sin x)$$

化简得等式: $\sin 2x = 2\cos x \cdot \sin x$.

(I) 利用上题的想法(或其他方法), 结合等式 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n (x \in \mathbf{R}, \text{正整数 } n \geqslant 2)$, 证明: $n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^n kC_n^k x^{k-1}$.

(II) 对于正整数 $n \geqslant 3$, 求证:

$$(1) \sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k = 0;$$

$$(2) \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 C_n^k = 0;$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

【分析及解】 (I) 将等式 $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$ 两边求导得

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = n + \sum_{k=2}^n kC_n^k x^{k-1}$$

所以

$$n[(1+x)^{n-1} - 1] = \sum_{k=2}^n kC_n^k x^{k-1}$$

(II) 证明这三个结论可以使用(I)已经得到的一般性结论和方法.

$$(1) \text{ 由(I)的结果, 有 } n(1+x)^{n-1} = n + \sum_{k=2}^n kC_n^k x^{k-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1},$$

令 $x=-1$, 则有

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k = (-1) \sum_{k=1}^n k C_n^k (-1)^{k-1} = (-1) \cdot n \cdot (1-1)^{n-1} = 0$$

(2) 对等式

$$n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \cdots + nC_n^n x^{n-1} = \sum_{k=1}^n kC_n^k x^{k-1}$$

再一次求导得

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^n k(k-1)C_n^k x^{k-2}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2 C_n^k &= \sum_{k=1}^n (-1)^k k(k-1)C_n^k + \sum_{k=1}^n (-1)^k k C_n^k = \\ &= \sum_{k=1}^n k(k-1)C_n^k (-1)^{k-2} - \sum_{k=1}^n k C_n^k (-1)^{k-1} = \\ &= n(n-1)(1-1)^{n-2} - n(1-1)^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

(3) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{k+1}C_n^k &= \frac{1}{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \\ &= \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} \end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}C_n^k = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \cdots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

【例 5】 在一个国家里,国王要建 201 个城市,并在它们之间修 200 条道路,使得从每个城市可以到达任何一个城市(每条道路联结两个城市,道路不相交),国王要求每两个城市间沿路网的最小路径分别等于 1 km, 2 km, 3 km, ..., 19 900 km.

问:国王的要求能否做到?

【分析及解】 注意到 $1+2+3+\cdots+200 = \frac{200 \times 199}{2} = 19\,900$, 所以为了

研究方便,我们可以考虑一般情形,即

国王要建 n 个城市,并在它们之间修 $n-1$ 条道路,使得从每个城市可以到达任何一个城市(每条道路联结两个城市,道路不相交也不经过其他城市),国王要求每两个城市间沿路网的最小路径分别等于 1 km, 2 km, 3 km, ..., $\frac{1}{2}n(n-1)$ km.

从一个城市到另一个城市的千米数,不是奇数就是偶数,

所以,我们按千米数的奇偶性分类.

为叙述方便,我们把 $A \rightarrow B$ 的距离为偶数时,称 B 为“好城市”,把 $A \rightarrow B$ 的距离为奇数时,称 B 为“坏城市”.

设 x 是“好城市”的数目, y 是“坏城市”的数目. 则

$$x + y = n$$

于是 $1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}n(n-1)$ 中有 xy 个奇数.

下面对 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 分为奇数和偶数两种情况讨论.

(1) 当 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为偶数时.

$$xy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}n(n-1) \right] = \frac{1}{4}(n^2 - n)$$

$$n = n^2 - 4xy = (x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$$

所以, n 是一个完全平方数.

(2) 当 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 为奇数时.

$$xy = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right] = \frac{1}{4}(n^2 - n + 2)$$

$$n = n^2 - 4xy + 2 = (x + y)^2 - 4xy + 2 = (x - y)^2 + 2$$

所以, n 是一个完全平方数加 2, 即 $n - 2$ 是一个完全平方数.

所以,如果符合国王的要求, n 是一个完全平方数或 $n - 2$ 是一个完全平方数.

一般性的问题解决了,具体的问题就容易了.

由于 201 不是完全平方数, $201 - 2 = 199$ 也不是完全平方数,所以不能建成国王所要求的道路.

关于 $n - 2$ 是一个完全平方数时,能建成国王所要求的道路,我们举一个简单的例子,例如 $n = 6$, 则 $n - 2 = 4$ 是一个完全平方数. 所建道路网如图 6.1 所示.

其中 $A \rightarrow C$: 1 km, $B \rightarrow C$: 2 km, $A \rightarrow C \rightarrow B$: 3 km, $D \rightarrow E$: 4 km,
 $C \rightarrow D$: 5 km, $A \rightarrow C \rightarrow D$: 6 km, $B \rightarrow C \rightarrow D$: 7 km, $D \rightarrow F$: 8 km,
 $C \rightarrow D \rightarrow E$: 9 km, $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$: 10 km, $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$: 11 km,
 $E \rightarrow D \rightarrow F$: 12 km, $C \rightarrow D \rightarrow F$: 13 km, $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$: 14 km,
 $B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F$: 15 km.

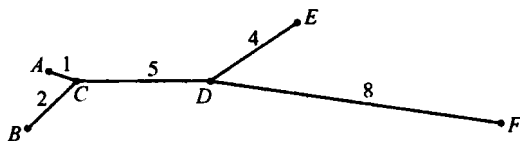


图 6.1

【例 6】 计算 $\sqrt{2\ 012 \times 2\ 011 \times 2\ 010 \times 2\ 009 + 1}$.

【分析及解】 如果不使用计算器, 本题直接计算的运算量比较大, 我们不妨先放下具体的数字, 而考虑一般的情形.

设 $2\ 011 = n$,

$$\begin{aligned} & \sqrt{(n+1)n(n-1)(n-2)+1} = \\ & \sqrt{[(n+1)(n-2)] \cdot [n(n-1)] + 1} = \\ & \sqrt{(n^2-n-2)(n^2-n)+1} = \\ & \sqrt{(n^2-n)^2 - 2(n^2-n) + 1} = \\ & \sqrt{(n^2-n-1)^2} = \\ & |n^2-n-1| \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sqrt{2\ 012 \times 2\ 011 \times 2\ 010 \times 2\ 009 + 1} &= 2\ 011^2 - 2\ 011 - 1 = \\ & 2\ 011 \times 2\ 010 - 1 = 4\ 042\ 109 \end{aligned}$$

【例 7】 求证 $2\ 010^{2\ 011} > 2\ 011^{2\ 010}$.

【分析及解】 本题和上题一样, 是一个特殊的问题, 我们可以把问题一般化, 只须证明:

当 $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$ 时, $n^{n+1} > (n+1)^n$ 成立即可.

设 $f(n) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n}$. 我们研究这个函数的单调性.

$$\begin{aligned} \frac{f(n+1)}{f(n)} &= \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = \\ & \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \cdot \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right]^n > 1 \end{aligned}$$

所以

$$f(n+1) > f(n)$$

即函数 $f(n)$ 是 $[3, +\infty)$ 上的单调递增函数.

于是

$$f(n) \geq f(3) = \frac{81}{64} > 1$$

即有

$$f(n) = \frac{n^{n+1}}{(n+1)^n} > 1$$

$$n^{n+1} > (n+1)^n$$

再把结果特殊化,令 $n=2\ 010$, 则 $2\ 010^{2\ 011} > 2\ 011^{2\ 010}$ 成立.

【例 8】 解方程:

$$\sqrt{x^2 - 10\sqrt{3}x + 80} + \sqrt{x^2 + 10\sqrt{3}x + 80} = 20 \quad ①$$

【分析及解】 如果直接平方求解, 运算比较复杂, 我们可以考虑将问题一般化.

由于

$$x^2 \pm 10\sqrt{3}x + (5\sqrt{3})^2 = (x \pm 5\sqrt{3})^2$$

则原方程 ① 化为

$$\sqrt{(x - 5\sqrt{3})^2 + 5} + \sqrt{(x + 5\sqrt{3})^2 + 5} = 20 \quad ②$$

如果设 $y^2 = 5$,

则 ② 化为

$$\sqrt{(x - 5\sqrt{3})^2 + y^2} + \sqrt{(x + 5\sqrt{3})^2 + y^2} = 20$$

显然这符合椭圆的定义. 此时椭圆的长轴为 20, 即 $2a = 20$, 半焦距 $c = 5\sqrt{3}$, 则半短轴 $b = 5$, 椭圆方程为 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$,

$$\text{解方程组} \begin{cases} \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1, \\ y^2 = 5, \end{cases} \text{ 因此 } \frac{x^2}{100} + \frac{5}{25} = 1, x^2 = 80, x = \pm 4\sqrt{5}.$$

这就是原方程的解.

【例 9】(2007 年 CMO 协作体) 设 $0 < \alpha < \frac{\pi}{32}$, 证明 $\frac{\tan 9\alpha}{\tan \alpha} > 9$.

【分析及解】 我们用数学归纳法证明一个更一般的结论:

若 $n \geqslant 2, 0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$, 则 $\tan n\alpha > n \tan \alpha$ (当 $n=9$ 时这就是本题结论).

首先考虑 $n=2$ 的情形,

由于 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$ 故 $0 < 1 - \tan^2 \alpha < 1$, 所以 $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} > 2 \tan \alpha$,

现在假设对 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4(n-1)}$ 有

$$\tan n\alpha > n \tan \alpha \quad \textcircled{1}$$

则当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4n}$ 时,更有 ① 成立.

此外,我们易知(注意 $0 < n\alpha < \frac{\pi}{4}$),

$$0 < \tan \alpha < \tan n\alpha < 1$$

于是

$$0 < 1 - \tan \alpha \tan n\alpha < 1 \quad (2)$$

从而由 ①, ② 导出

$$\tan(n+1)\alpha = \frac{\tan n\alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan n\alpha} \geq (n+1) \tan \alpha$$

综上,命题成立.

【例 10】(2003 全国卷理 22)

(I) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leq s < t, \text{ 且 } s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 6, a_4 = 9, a_5 = 10, a_6 = 12, \dots$;

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下的三角形数

		3		
	5		6	
9		10		12
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...

① 写出这个三角形表的第四行、第五行各数；

② 求 a_{100} .

(II) 设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^r + 2^s + 2^t \mid 0 \leq r < s < t, \text{ 且 } r, s, t \in \mathbb{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k = 1\,160$, 求 k .

【分析及解】 (I) ① 对已知三角形数表进行研究, 逐行写成 2 的幂的和的形式, 就可以完成第四行、第五行各数的填写.

第一行 $3 = 2^0 + 2^1$;

第二行 $5 = 2^0 + 2^2, 6 = 2^1 + 2^2;$

第三行 $9 = 2^0 + 2^3, 10 = 2^1 + 2^3, 12 = 2^2 + 2^3,$

根据以上规律,可写出第四行、第五行各数.

第四行 $2^0 + 2^4 = 17, 2^1 + 2^4 = 18, 2^2 + 2^4 = 20, 2^3 + 2^4 = 24;$

第五行 $2^0 + 2^5 = 33, 2^1 + 2^5 = 34, 2^2 + 2^5 = 36, 2^3 + 2^5 = 40, 2^4 + 2^5 =$

48.

② 为求 a_{100} , 就要研究三角形数表中的第 100 个数位于第几行, 第几列.