

文都教育

2007

考研数学

必做客观题1500题
精析

主编：蔡子华

把握正确的解题思路

提高快速的解题能力

现代出版社



2007

考研数学

必做客观题1500题

主 编：蔡子华

副主编：曾祥金 蒋志刚 韩於羹

把握正确的解题思路

提高快速的解题能力

图书在版编目(CIP)数据

考研数学必做客观题 1500 题精析/蔡子华编. —北京:
现代出版社, 2006. 2
(学习战略丛书)
ISBN 7-80188-215-6

I. 考... II. 蔡... III. 高等数学-研究生-入学考试-解题
IV. 013-44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 008108 号

编 者:蔡子华 504

责任编辑:刘宝明

出版发行:现代出版社

地 址:北京市安定门外华安

邮政编码:100011

电 话:010-64267325 64240483(传真)

电子邮箱:xíandai@cnpitc.com.cn

印 刷:北京市燕鑫印刷有限公司

开 本:787×1092 毫米 1/16

印 张:22.25

版 本:2004 年 2 月第 1 版 2006 年 2 月第 3 次修订 2006 年 2 月第 3 次印刷

书 号:ISBN 7-80188-215-6

定 价:30.00 元

版权所有,翻印必究;未经许可,不得转载

前 言

客观题(填空题与选择题)在研究生入学考试数学试卷中占有近 40% 的比例,而且求解客观题应用概念广泛、严密,几乎覆盖数学考研大纲规定的所有范围和知识考点。另外,客观题解题技巧独特,使不少考生感到棘手(事实上,每年考生在解答客观题上花费的时间并不少,而得分率却不高)。

在考研辅导班上不少同学建议能否编写一本关于如何快速有效准确求解客观题的辅导用书,以帮助考生正确理解概念,掌握正确的解题思路、方法与技巧。

本书就是针对上述情况,专门为报考硕士研究生的考生编写的。全书精选 1500 道考研数学客观题,分为客观题集和客观题解两部分;内容包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计,适合选考数学一至数学四各卷种的考生备考使用。

客观题集中,历年研究生入学考试真题占有相当大的比例,其余题目亦都且有很强的代表性,且内容全面。遴选该部分题目的原则是:紧扣硕士研究生入学统一考试数学考试大纲,重视基础,摒弃偏题、怪题,难度贴近历年考试真题。

客观题解中,答案详尽,重视解析过程,对不同题型、知识点、解题思路与方法、答题技巧都有不同程度的揭示。

考生可先尝试求解本书第一部分的题例,再在第二部分的帮助下找出自己在理解数学基本概念、基本原理及运用基本方法诸方面的差距,在实战中增强个人发现问题、分析问题和解决问题的能力,从而大幅度提高应试水平。

在本书的编写过程中,文都考研信息中心全体同志做了大量有益的工作,在此一并表示感谢。由于时间仓促,错误和疏漏之处难免,恳请广大读者、数学同仁批评指正。

编 者

2006 年 2 月

目 录

绪论	(1)
----------	-----

第一部分 客观题集

第一篇 高等数学	(4)
一、函数与极限	(4)
二、导数与微分	(11)
三、中值定理与导数的应用	(19)
四、不定积分	(26)
五、定积分	(29)
六、定积分的应用	(37)
七、空间解析几何和向量代数	(40)
八、多元函数微分学	(44)
九、重积分	(50)
十、曲线、曲面积分	(55)
十一、级数	(59)
十二、微分方程与差分方程	(68)
第二篇 线性代数	(73)
一、行列式、矩阵	(73)
二、向量的线性相关性及矩阵的秩	(81)
三、线性方程组	(88)
四、相似矩阵、二次型	(94)
第三篇 概率与统计	(103)
一、概率论的基本概念	(103)
二、随机变量及其分布	(107)

三、多维随机变量及其分布	(112)
四、随机变量的数字特征	(118)
五、大数定理、中心极限定理、抽样分布	(124)
六、参数估计、假设检验	(129)

第二部分 客观题解

第一篇 高等数学	(135)
一、函数与极限	(135)
二、导数与微分	(147)
三、中值定理与导数的应用	(161)
四、不定积分	(171)
五、定积分	(177)
六、定积分的应用	(191)
七、空间解析几何和向量代数	(197)
八、多元函数微分学	(204)
九、重积分	(215)
十、曲线、曲面积分	(223)
十一、级数	(232)
十二、微分方程与差分方程	(246)
第二篇 线性代数	(257)
一、行列式、矩阵	(257)

二、向量的线性相关性及矩阵的秩	 (271)	 (308)
三、线性方程组	 (280)	三、多维随机变量及其分布
四、相似矩阵、二次型	 (287)	 (315)
第三篇 概率与统计	 (302)	四、随机变量的数字特征
一、概率论的基本概念	 (302)	 (323)
二、随机变量及其分布		五、大数定理、中心极限定理、抽样分布
		 (332)
		六、参数估计、假设检验
		 (339)

绪 论

硕士研究生入学统一考试客观题分为两类:填空题和单项选择题. 填空题主要考察考生掌握基本概念的程度和对基本计算题的解题能力、运算速度及技巧,故主要用观察法和计算法来求解.

例 1 (2000403) 已知四阶矩阵 A 相似于 B , A 的特征值为 $2, 3, 4, 5$, E 为四阶单位矩阵, 则 $\det(B - E) =$ _____.

本题主要考察了知识点:

- (1) 相似矩阵有相同的特征值.
- (2) λ 是 B 的特征值, 则 $\lambda - 1$ 为 $B - E$ 的特征值.
- (3) 矩阵的行列式等于特征值的乘积.

故此题是一个概念型的题, 用观察法即可求解.

解 因为 A 相似于 B , 所以 B 的特征值为 $2, 3, 4, 5$, 则 $B - E$ 的特征值为 $1, 2, 3, 4$, 所以 $\det(B - E) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$.

例 2 (2001203) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx =$ _____.

本题主要考察的知识点:

- (1) 奇偶函数在关于原点对称的区间上的定积分的求法.
- (2) 定积分的换元积分法.

故此题基本上是一个计算型的填空题, 应用计算法求解.

解 原式 $= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \sin^2 2x dx$
 $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$

对类似的计算型填空题, 寻求快速解法是良策, 如:

例 3 (2004102) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$ 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) =$ _____.

本题的快速解法: $f'(e^x) = (\ln e^x) e^{-x} \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{t} \ln t \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \ln^2 t + c$

代入 $f(1) = 0$ 得 $c = 0 \Rightarrow f(t) = \frac{1}{2} \ln^2 t$

选择题主要考察考生掌握基本概念、定理、重要公式等的程度, 可用观察法、排除法、推演法、赋值法与图示法来求解.

例 4 (2001103) 将一枚硬币重复掷 n 次, 以 X 和 Y 分别表示正面朝上和反面朝上的次数, 则 X 和 Y 的相关系数为 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

解 本题完全是一个概念题,用观察法求解.因为 $Y = n - X$,即它们存在线性关系,由 $Y = aX + b$ 中的 $a = -1 < 0$,故它们负相关,相关系数为 -1 .

例 5 (1998203) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$,则下列断言正确的是()

- A. 若 x_n 发散,则 y_n 必发散 B. 若 x_n 无界,则 y_n 必有界
C. 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小 D. 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小,则 y_n 必为无穷小

解 用排除法.设 $y_n = 0, x_n = n$,排除 A;

设 $x_n = \begin{cases} 2k & n = 2k \\ 0 & n = 2k-1 \end{cases}, y_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ 2k-1 & n = 2k-1 \end{cases}$ 排除 B;

设 $x_n = \frac{1}{n}, y_n = 1 + \frac{1}{n}$,排除 C,故 D 正确.

例 6 (1999203) 记行列式 $\begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix}$ 为 $f(x)$,则方程

$f(x) = 0$ 的根的个数为()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解 计算行列式得 $f(x) = 5x(x-1)$,故 B 正确.

例 7 (1991303) 若曲线 $y = x^2 + ax + b$ 和 $2y = -1 + xy^3$ 在点 $(1, -1)$ 处相切,其中 a, b 是常数,则()

- A. $a = 0, b = -2$ B. $a = 1, b = -3$
C. $a = -3, b = 1$ D. $a = -1, b = -1$

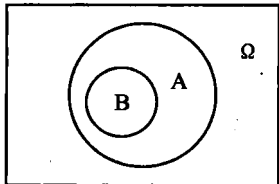
解 将 $a = -1, b = -1$ 代入得 $y = x^2 - x - 1$,由 $y' = 2x - 1 \Rightarrow y'(1) = 1$. 对 $2y = -1 + xy^3$ 两边求导得 $2y' = y^3 + 3xy^2 y'$,将 $x = 1, y = -1$ 代入得 $y'(1) = 1$,知 D 正确.

此题所用方法为赋值法,当选择题为确定待定常数时用此法较好.

例 8 (1990403) 设 A, B 为两随机事件,且 $B \subset A$,则下列式子正确的是()

- A. $P(A+B) = P(A)$ B. $P(AB) = P(A)$
C. $P(B|A) = P(B)$ D. $P(B-A) = P(B) - P(A)$

解 画出文氏图为



则从图中可以看出, $A+B = A$,所以 $P(A+B) = P(A)$. 图示法多用来求解概率类的已知事件之间的关系求概率的题目.

第 一 部 分

客 观 题 集

第一篇 高等数学

一、函数与极限

(一) 填空题

1. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$, 则函数 $\psi(x) = f(x+1) + f(x-1)$ 的定义域为

2. 设 $f(x) = e^x, f[g(x)] = 1 - x^2$, 则 $g(x) =$ _____

3. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln[1+f(x)]}{x^2} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ _____.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \sin \frac{1}{x} + e^x - e^{-x} - 2x}{\sin^3 x} =$ _____.

5. 设 $f(x) = \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^x$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x+1) =$ _____.

6. 已知 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 0, & x = 2 \\ x-1, & x > 2 \end{cases}, g(x) = e^x + 1, \lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)] =$ _____.

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x - \cos x \ln x) =$ _____.

8. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - x - 1}{3x} & x > 0 \\ \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3} & x < 0 \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

9. 设 $f(x) = b \int_0^{\tan x} \sin^a t dt, g(x) = x^5 + x^4$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim g(x)$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\sin(\sin x)]}{\tan x} =$ _____.

11. 函数 $f(x) = \frac{e^x - b}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷型间断点 $x=0$, 有可去间断点 $x=1$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

12. 若 λ, k 均为常数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$ _____.

13. 若 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的偶函数, 且图形关于 $x=2$ 对称, 则 $f(x)$ 一定是周期函数, 其周期 $T =$ _____.

14. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$, 则 $f(x) =$ _____.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \tan^n \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{n}\right) =$ _____.

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{ax - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{b+t}} dt = 1$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

17. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln^2 x \ln \left(1 + \frac{x}{\ln x}\right) =$ _____.

18. $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} =$ _____.

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x \ln(1+x^2)} =$ _____.

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{x+2} \sin \frac{1}{x^2} \cdot \cos x =$ _____.

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right) =$ _____.

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x^2}\right] =$ _____.

23. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4 \\ x, & 4 < x \leq 6 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 2 \\ 2+x, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)} =$ _____.

25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] =$ _____.

26. 若常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)} \right]^n =$ _____.

27. 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____, $\varphi(x)$ 的定义域为 _____.

28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} =$ _____.

29. 若 $f(x) = \begin{cases} (\sin 2x + e^{2ax} - 1)/x & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 则 $a =$ _____.

30. 已知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{a(\sqrt{n})^3 + bn + c} = 2$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

31. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx =$ _____.

32. 若 $x \rightarrow 0$ 时, $[(1-ax^2)^{1/4} - 1]$ 与 $x \sin x$ 是等价无穷小, 则 $a =$ _____.

33. $\lim_{x \rightarrow 0} [1 + \ln(1+x)]^{2/x} =$ _____.

(二) 选择题

1. 设在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x) > 0$, 且当 k 为大于 0 的常数时有 $f(x+k) = \frac{1}{f(x)}$, 则在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内函数 $f(x)$ 是()

- A. 奇函数 B. 偶函数 C. 周期函数 D. 单调函数

2. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sqrt{1-\cos t}} =$ ()

- A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 不存在

3. 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$, 在 $x=0$ 点的任何邻域内都是()

- A. 有界的 B. 无界的 C. 单调增加的 D. 单调减少的

4. 若 $f(x) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}} & x \leq 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}} & x > 0 \end{cases}$, 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的()

- A. 连续点 B. 无穷型间断点 C. 跳跃间断点 D. 可去间断点

5. 已知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x - \sqrt{ax^2 + bx + c}) = 2$, 则必有()

- A. $a=25, b=-20$ B. $a=b=25$
C. $a=-25, b=0$ D. $a=1, b=2$

6. 已知 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 且在 x_0 点的某个邻域内 $|g(x)| \geq M$ (M 为大于 0 的常数), 则当 $x \rightarrow x_0$ 时, $f(x)g(x)$ 为()

- A. 一定是无穷大 B. 一定是无穷小
C. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 存在 D. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x)$ 不存在但不是无穷大

7. 若 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln[3 + \frac{f(x)}{x^2}]}{x^a} = a$ (其中 a 为大于 0 的常数), 则必有()

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ 存在且不为 0 B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^a}$ 存在且不为 0
C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^2}$ 存在且不为 0 D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{2+a}}$ 存在且不为 0

8. 设 $x \rightarrow x_0$ 时, $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x)$ 都是无穷小, 且 $\alpha(x) = o[\beta(x)], \beta(x) \sim \gamma(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \beta(x)}{\gamma(x)} = (\quad)$
- A. 0 B. 1 C. 2 D. ∞
9. 设 $f(x+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{n+x}{n-2})^n$, 则 $f(x) = (\quad)$
- A. e^{x-1} B. e^{x+2} C. e^{x+1} D. e^{-x}
10. 设 $F(x) = \begin{cases} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2} & x \neq 0 \\ C & x = 0 \end{cases}$ 是连续函数, 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, $f(0) = 0$, 则 $C = (\quad)$
- A. 0 B. 1 C. 不存在 D. -1
11. 若 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = 2$, 则必有 $(\quad)$
- A. $a = 2, b = 8$ B. $a = 2, b = 5$
C. $a = 0, b = -8$ D. $a = 2, b = -8$
12. $f(x) = \int_0^{\sin x} \tan^2 t dt, g(x) = x - \sin x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 $(\quad)$
- A. 高阶无穷小 B. 低阶无穷小
C. 同阶非等价无穷小 D. 等价无穷小
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arctan x)^2 \tan x} = (\quad)$
- A. 0 B. 1 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{1/\sin \sqrt{1+n^2} \pi} = (\quad)$
- A. e^π B. $e^{\frac{1}{\pi}}$ C. 1 D. $e^{\frac{2}{\pi}}$
15. 设 $0 < x_n < 1, n = 1, 2, \dots$, 且有 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$, 则 $(\quad)$
- A. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ B. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在
C. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ D. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} = (\quad)$
- A. 0 B. 6 C. 36 D. ∞
17. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + k(1 - e^{-x^2})} = 2$, 其中 $a^2 + c^2 \neq 0$, 则 $(\quad)$
- A. a, c 任意, $b = 4k$ B. a, c 任意, $b = -4k$

C. b, k 任意, $a = 4c$

 D. b, k 任意, $a = -4c$

 18. 设函数 $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, 则常数 a, b 满足

()

 A. $a < 0, b < 0$

 B. $a > 0, b > 0$

 C. $a \leq 0, b > 0$

 D. $a \geq 0, b < 0$

 19. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 且对任意 $x_2 > x_1$, 都有 $f(x_2) > f(x_1)$, 则正确的结论是()

 A. 对任意 $x, f'(x) > 0$

 B. 对任意 $x, f'(-x) \leq 0$

 C. 函数 $-f(-x)$ 单调增加

 D. 函数 $f(-x)$ 单调增加

 20. 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内方程 $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$ ()

A. 无实根

B. 有且仅有一个实根

C. 有且仅有两个实根

D. 有无穷多个实根

 21. 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则()

 A. 当 $g(x)$ 为任意函数时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

 B. 当 $g(x)$ 为有界函数时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

 C. 仅当 $g(x)$ 为常数时, 有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

 D. 仅当 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ 时有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$

 22. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 都不存在, 则()

 A. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 一定不存在

 B. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 一定不存在

 C. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$ 中只要有一个存在, 则另一个也一定存在

 D. $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]$ 有可能存在

23. 下列说法正确的是()

A. 两个无穷大量之和一定是无穷大

B. 有界函数与无穷大量的乘积一定是无穷大

C. 无穷大与无穷大之积一定是无穷大

D. 不是无穷大量一定是有界的

 24. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0, \varphi(x)$ 有间断点, 则()

 A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点

 B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

 C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点

 D. $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

25. 设对任意 x 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) =$ ()
- A. 存在且一定为 0 B. 存在且一定不为 0
C. 一定不存在 D. 不一定存在
26. 设 $x \rightarrow 0$ 时, $e^{\tan x} - e^x$ 与 x^n 是同阶无穷小, 则 n 为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
27. 设函数 $g(x) = \begin{cases} 2-x & x \leq 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$; $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ -x & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $g[f(x)] =$ ()
- A. $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$
C. $\begin{cases} 2-x^2 & x < 0 \\ 2-x & x \geq 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 2+x^2 & x < 0 \\ 2+x & x \geq 0 \end{cases}$
28. 设 $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$, 则 $f\{f[f(x)]\}$ 等于 ()
- A. 0 B. 1 C. $\begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ D. $\begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ 1 & |x| > 1 \end{cases}$
29. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $(1 - \cos x) \ln(1 + x^2)$ 是比 $x \sin x^n$ 高阶的无穷小, 而 $x \sin x^n$ 是比 $(e^{x^2} - 1)$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 为 ()
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4
30. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 则下列结论成立的是 ()
- A. $f(x)$ 无间断点 B. $f(x)$ 有间断点 $x = 1$
C. $f(x)$ 有间断点 $x = 0$ D. $f(x)$ 有间断点 $x = -1$
31. $x = \frac{1}{n} (n = 2, 3, \dots)$ 是函数 $f(x) = x \cdot \left[\frac{1}{x} \right]$ 的 $([\cdot])$ 为取整函数) ()
- A. 无穷间断点 B. 跳跃间断点 C. 可去间断点 D. 连续点
32. 设 $f(x) = 2^x + 3^x - 2$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时 ()
- A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量 B. $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量
C. $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量 D. $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量
33. 设数列的通项为 $x_n = \begin{cases} (n^2 + \sqrt{n})/n & n \text{ 为奇数} \\ 1/n & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, x_n 是 ()
- A. 无穷大量 B. 无穷小量 C. 有界变量 D. 无界变量
34. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 + x & x > 0 \end{cases}$, 则 ()
- A. $f(-x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ -(x^2 + x) & x > 0 \end{cases}$ B. $f(-x) = \begin{cases} -(x^2 + x) & x < 0 \\ -x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

- C. $f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - x & x > 0 \end{cases}$
 D. $f(-x) = \begin{cases} x^2 - x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$
35. 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin t^2 dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 ()
 A. 等价无穷小 B. 同阶但非等价的无穷小
 C. 高阶无穷小 D. 低阶无穷小
36. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 变量 $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$ 是 ()
 A. 无穷小量 B. 无穷大量
 C. 有界的但不是无穷小 D. 无界的但不是无穷大
37. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - (ax + bx^2)}{x^2} = 2$, 则 ()
 A. $a = 1, b = -5/2$ B. $a = 0, b = -2$
 C. $a = 0, b = -5/2$ D. $a = 1, b = -2$
38. $f(x) = |x \sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是 ()
 A. 有界函数 B. 单调函数 C. 周期函数 D. 偶函数
39. 函数 $f(x) = x \sin x$ ()
 A. 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷大量 B. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界
 C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 D. 当 $x \rightarrow \infty$ 时有有限极限
40. 对于函数 $y = \sin(\tan x) - \tan(\sin x)$ ($0 \leq x \leq \pi$), $x = \pi/2$ 是 ()
 A. 连续点 B. 第一类间断点 C. 可去间断点 D. 第二类间断点
41. 单调有界函数若有间断点, 则其类型为 ()
 A. 必为第一类间断点 B. 必为第二类间断点
 C. 第一类或第二类间断点 D. 不能确定
42. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x=0$ 点的某邻域内连续, 且 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^x f(t) \sin t dt$ 是 $\int_0^x t \cdot g(t) dt$ 的 ()
 A. 低阶无穷小 B. 高阶无穷小
 C. 同阶但不等价无穷小 D. 等价无穷小
43. 下列极限存在的是 ()
 A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{x} \arctan \frac{1}{x}$ B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \arctan \frac{1}{x}$
 C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|} \arctan \frac{1}{|x|}$ D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\sin x|}{|x|} \arctan \frac{1}{x}$
44. 下列命题中正确的是 ()
 A. $f(x)$ 为有界函数, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) f(x) = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$
 B. $\alpha(x)$ 为无穷小量, 且 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a \neq 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = \infty$

C. $\alpha(x)$ 为无穷大量, 且 $\lim \alpha(x)\beta(x) = a$, 则 $\lim \beta(x) = 0$

D. $\alpha(x)$ 为无界函数, 且 $\lim f(x)\alpha(x) = 0$, 则 $\lim f(x) = 0$

45. 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$, 则必有

()

A. $a_n < b_n$ 对任意 n 成立

B. $b_n < c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在

D. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在

46. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, g(x) = \begin{cases} f(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则

()

A. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点

B. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点

C. $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点

D. $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关

47. 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间有界()

A. $(-1, 0)$

B. $(0, 1)$

C. $(1, 2)$

D. $(2, 3)$

48. 设函数 $f(x) = \frac{1}{e^{x/(x-1)} - 1}$, 则()

A. $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x = 0, x = 1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点, $x = 1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

二、导数与微分

(一) 填空题

1. 设 $f(x) = (x-a)^n \varphi(x)$, 其中函数 $\varphi(x)$ 在点 a 的某邻域内具有 $n-1$ 阶导数, 则 $f^{(n)}(a) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 若 $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^m \end{cases}$, 则 $\frac{d^n y}{dx^n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 若 $y = x + (\sin x)^x$, 则 $y' = \underline{\hspace{2cm}}$.

4. 若 $g(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 又 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 则 $\frac{d}{dx} \{f[g(x)]\} \big|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.