最新初中数学奥林匹克试题精选精析

王向东　徐清舟　韩普宪　编著

今日中国出版社

最新初中数学
奥林匹克试题精选精析

王向东　徐清舟　韩普宪　编著

今日中国出版社

（京）新登字132号

最新初中数学

奥林匹克试题精选精析

王向东　徐清舟　韩普宪　编著

*

今日中国出版社出版
（北京百万庄路24号）
全国各地新华书店经销
河北省三河市印刷二分厂印刷

*

787×1092毫米　32开本15$\frac{1}{16}$印张　290千字
1994年2月第一版　1994年2月第一次印刷
印数：1—8000册
ISBN7-5072-0695-5/G·121
定价：7.50元

前　言

连续几年来我国在国际数学奥林匹克中成绩卓著，令世人瞩目，全国广大中学师生和数学工作者都为之振奋，热忱不断高涨。使国内数学竞赛活动进入了一个新的阶段：每年都有数以万计的小学、初中和高中学生参加全国的或地区的各种层次的数学竞赛；各地数学奥林匹克学校和培训班纷纷成立，规模之大，参加人数之多任何国家都无以伦比；各种学校，各级政府对数学竞赛活动如此重视也是前所未有的；特别是近来数学奥林匹克已作为当代数学教育研究的重要课题之一，在发现与培养数学人才方面的作用日益受到了广泛关注，也受到了愈来愈多的数学家与数学教育家的重视；更值得一提的是为使全国的数学竞赛活动进一步规范化和科学化，把握方向、持久健康、逐步深入地开展下去，中国数学会普及工作委员会于1992年又制定了《初中数学竞赛大纲》和《高中数学竞赛大纲》，为广大中学师生和各级数学奥林匹克教练员指明了方向。本书就是根据《初中数学竞赛大纲》和我们多年来指导数学竞赛活动的实践经验编写而成的。其主要特点是紧扣“竞赛大纲”，贯彻“少而精”的原则。对“竞赛大纲”规定的内容，我们从学生的实际出发，由浅入深，由易到难，分阶段、分层次，循序渐进，逐步介绍；其次，全书立足于最新“教学大纲”，内容多源于现行初中数学教材。我们从中学生的认知结构和思维发展的水平

以及心理特点进行了必要的加深、拔高和拓广，故又高于教材。而且我们尽可能按初中数学教材内容顺序编写并保持同步；另外，全书例题新颖、解法典型，具有代表性。我们通过典型例题的分析和探索，介绍了解初中数学竞赛题的一些常用思想方法和各种技巧，以及这些思想方法和技巧的种种变形和应用。

本书共七章，其中第一、五、七章由王向东执笔；第二、三章由徐清舟执笔；第四、六章由韩普宪执笔。最后由王向东统一审定。在编写过程中，我们参阅了大量有关的书籍、文献和资料，例题选用了数十个国家和国内几十个多个省市、地区的数学竞赛试题，在此一并表示感谢。

由于水平所限。加之时间苍促，书中片面和不足之处一定难免，敬请广大读者批评指正。

王向东

目　录

第一章 整数问题与方法

由于解决有关整数的问题常常需要灵巧的方法和独到的技巧、因而在国内外各种数学竞赛中，涉及整数的问题颇多。本章中我们主要讨论整数的问题与各种方法。

§1.1 整数的十进制表示及其应用

数的进位制多种多样，十进制是最常用的一种。所谓整数的十进制表示或称多项式表示，即对任何一个$n+1$位自然数N可表示为

$$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1a_0}$$

$$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_1\times10+a_0,$$

其中a_i都是整数且$0\leqslant a_i\leqslant 9$（$i=0, 1, 2, \cdots, n$），$a_n\neq 0$。自然数最左边的一位数字$a_n$叫做这个数的首位数字（数码），最右边的一位数字$a_0$叫做自然数的末位数字（数码）。

利用自然数的上述表示方法，不但可以证明整数的许多性质，而且还可以解决许多有趣的竞赛题。

例1 计算：$\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+\underbrace{199\cdots9}_{n个9}$。

【分析】 解决本题的关键在于抓住数的十进制表示。由于n位数$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}$（$a_n\neq0$）可表为

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_1}=a_n\times10^{n-1}+a_{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+a_2\times10+a_1$$

$$=a_n\times10^{n-1}+\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1}\quad(a_n\neq0)$$

于是 $\underbrace{199\cdots9}_{n个9}=10^n+\underbrace{99\cdots9}_{n个9}$。从而我们有可能通过提取 公因数进行计算，即有如下解法：

【解】 原式 $=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+10^n$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)+10^n$$

$$=\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times10^n+10^n$$

$$=10^n(\underbrace{99\cdots9}_{n个9}+1)$$

$$=10^n\times10^n=10^{2n}.$$

例2 求证：12，1122，111222，…中任何一个数 都 是相邻两个自然数的乘积。

【分析】 欲证这串数中的任何一个都是相邻两个自然数的乘积，只需在这串中任取一个数，然后将它用自然数的十进制表示出来，再设法将它因数分解成两个相邻的自然数乘积即可。

【解】 所给的这串数中的任意一数都可用自然数的十进制表示法表示为：

$$\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\underbrace{22\cdots2}_{n个2}=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^n+2\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$$

$$=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times(10^n+2)$$

$$=\frac{1}{9}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}\times(10^n+2)$$

$$=\frac{1}{9}\times(10^n-1)(10^n+2)$$

$$=\left(\frac{10^n-1}{3}\right)\left(\frac{10^n-1}{3}+1\right),$$

由于$\frac{10^n-1}{3}=\frac{1}{3}\times\underbrace{99\cdots9}_{n个9}=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$为自然数，所以 $\frac{10^n-1}{3}$与$\frac{10^n-1}{3}+1$是两个连续自然数。

例3 试确定最小的正整数n，其末位数为6，若将末位数的6移作首位数，则为原数的4倍。

【解】 设n是k位数，即$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_1}$，其中$a_1=6$，从而$n=\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2}\times10+6$。依题意得：$4n=\overline{6a_ka_{k-1}\cdots a_2}$ $=6\times10^{k-1}+\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2}$。记$\overline{a_ka_{k-1}\cdots a_2}=$则

$$4(10x+6)=6\times10^{k-1}+x.$$

由此得：$39x=6\ (10^{k-1}-4)$，即$x=\frac{2\ (10^{k-1}-4)}{13}$显然，

$13|\ (10^{k-1}-4)$。依次取$k=2,3,\cdots,6$，得出$13+6$，$13+9$，$13+996$，$13+9996$，$13+99996$，所以$x=2\times7692$ $=15384$，于是

$$n=15384\times10+6=153846.$$

例4 一个4位数乘以9，其积正好是这个四位数倒过来，请找出这个四位数。

【解】 设此四位数为$\overline{abcd}$。由题设得

$$\overline{abcd}\times9=\overline{dcba}.$$

显然，a、d不能为数码0，又因乘数为9，所以$a=1$，从而$d=a\times 9=9$，于是

$$(10^3+b\times 10^2+c\times 10+9)\times 9=9000+100c+10b+1,$$

$$9000+900b+90c+81=9000+100c+10b+1,$$

$$890b+80=10c,$$

即$89b+8=c$。因此，只有$b=0,c=8$,从而知$\overline{abcd}=1089$。

【评注】 在例4中非常有趣的是在1089这个四位数中间添上若干个9,并不影响它们的次序,倒过来也是这个数,即有

$$10\underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}89\times 9=98\underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}01.$$

事实上，左边 $=(10\times 10^{n+1}+\underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}\times 10^2+89)\times 9$

$$=[10\times 10^{n+1}+(10^{n-1}-1)\times 10^2+89]\times 9$$

$$=(10\times 10^{n+1}+10^{n+1}-10^2+89)\times 9$$

$$=99\times 10^{n+1}-99$$

$$=99(10^{n+1}-1)$$

右边 $=98\times 10^{n+1}+\underbrace{99\cdots9}_{n-1个9}\times 10^2+1$

$$=98\times 10^{n+1}+(10^{n-1}-1)\times 10^2+1$$

$$=98\times 10^{n+1}+10^{n+1}-99$$

$$=99(10^{n+1}-1).$$

所以，右=左。

例5 已知等式

$$\underbrace{aa\cdots a}_{n个a}+\underbrace{bb\cdots b}_{n个b}+1=(\underbrace{cc\cdots c}_{n个c}+1)^2$$

对任意自然数都成立，试求出相应的数码。

【解】 将所给不等式写成

$$a\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}\times10^n+b\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}+1=(c\times\underbrace{11\cdots1}_{n个1}+1)^2 \quad ①$$

令 $p_n=\underbrace{11\cdots1}_{n个1}$,则

$$p_n=10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1。$$

上式两边同乘以$10-1$，有

$$(10-1)p_n=(10-1)(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+10+1)$$
$$=10^n-1,$$

即 $9p_n+1=10^n$。将此式代入①式，得

$$ap_n(9p_n+1)+bp_n+1=(cp_n+1)^2,$$

整理得

$$(9a-c^2)p_n^2+(a+b-2c)p_n=0。$$

因为p_n的值有无限多个，所以

$$9a-c^2=0,\ a+b-2c=0,$$

从而，得

$$a=\left(\frac{c}{3}\right)^2,\ b=2c-\left(\frac{c}{3}\right)^2.$$

由此可知c应为3的倍数，但$0\leqslant c\leqslant9$，所以$c=3$，6，9。故得

$$\begin{cases}c=3\\b=5\\a=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}c=6\\b=8\\a=4,\end{cases}\qquad\begin{cases}c=9\\b=9\\a=9.\end{cases}$$

练习 1-1

1.计算 $\underbrace{11\cdots1}_{1986个1}\ \underbrace{22\cdots2}_{1986个2}\div\underbrace{33\cdots3}_{1986个3}$.

2. 大于10小于100的自然数中，当数字交换位置后，所得的数比原数增加9的数有多少个？这些数字是多少？

3. 有一若干位正整数，它的前两位数字相同，将它的数字倒排得一新数，新数与原数之和为10879，试求原数。

4. 在一种室内游戏中，魔术师要求一个参加者想好一个三位数 $\overline{abc}$，然后，魔术师再要求他记下五个数 $\overline{acb}$，$\overline{bac}$，$\overline{bca}$，$\overline{cab}$，$\overline{cba}$，并把它们加起来，求出和N，只要讲出N的大小，魔术师就能识别出原数 $\overline{abc}$ 是什么。如果$N=3194$，请你确定 $\overline{abc}$。

5. 证明：$21\underbrace{99\cdots}_{n-1\text{个}9}78 \times 4 = 87\underbrace{99\cdots}_{n-1\text{个}9}12$。

6. 把19，20，…，79，80这些数连写成数

$$N=192021\cdots7980,$$

证明：$1980\mid N$。

7. 已知自然数n使得$1987\mid\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}$，求证：对此$n$，也有

$$1987\mid\underbrace{11\cdots1}_{n\text{个}1}\ \underbrace{99\cdots9}_{n\text{个}9}\ \underbrace{88\cdots8}_{n\text{个}8}\ \underbrace{77\cdots7}_{n\text{个}7}.$$

8. 有一个四位数，已知其十位数字减去2等于其个位数字，其个位数字加上3等于其百位数字，把这个4位数的四个数字反着次序排列所成的数与原数之和等于8877，试求这个四位数。

9. 在十进制表示中，数a是由1985个数字8组成，数b是由1985个数字5组成，则数$9ab$的各位数字之和是多少？

10. 若A、B、C、D、E、F表示不同的十进制数码，且整数 $\overline{ABCEFD}$ 的3倍等于整数 $\overline{EFDABC}$ 的4倍，求这个六位数。

§1.2 带余除法及其应用

我们知道用一个整数b去除另一个整数a，有时恰好除

尽，有时会有余数，设商为q余数为r，则整数a可表示 为

$$a=bq+r\ (0\leqslant r<b) \qquad ②$$

特别地，当$r=0$时，即为b整数a。这样，任何一个整数a都可用公式②表示，而且这种表示是唯一的。通常称 ② 式为余数公式，其运算过程叫做带余除法。

显然，我们在研究一个整数a是否被b整除时，只需讨论r是否被b整除即可。

例1 若今年元旦是星期二，问再经过

$$\underbrace{199019901990\cdots1990}_{1991个1990}$$

天是星期几？

【分析】 本题必须注意到100010001可以被7整除，而

$$199019901990=1990\times100010001,$$

所以 199019901990也可被7整除。

又 $\because 1991\div3=663$余2,所以题设的数可按3个1990分成663节，还余下2个1990，即前面663节的数可被7整除，余下的19901990被7除是：

$19901990\div7=2843141$余3,

所以，再经过$\underbrace{19901990\cdots1990}_{1991个1990}$天是星期二后的第三天，即星期五。

例2 有同样大小的红珠⊙、白珠○和黑珠●共180个，按先红5个，次白4个，再黑3个排列着：

⊙⊙⊙⊙⊙○○○○●●●⊙⊙⊙⊙⊙○○○○●●●……

试问：（1）黑珠共有几个？

(2) 第158个珠是什么颜色？

【解】(1) 把5个红珠，4个白珠，3个黑珠作为一个循环节，180个珠共有

$$180 \div (5+4+3) = 180 \div 12 = 15$$

个循环节。因每个循环节中有3个黑珠，故共有黑珠 $3 \times 15 = 45$（个）；

(2) 因为 $158 \div 12 = 13$ 余2，所以158个珠子中共有13个循环节，外加两个珠子，而外加的两个珠子必为红珠，所以第158个珠子是红色的。

例3 1至1001各自然数按以下格式排列成表，如表所示，用一个正方形框住九个数，要使这九个数的和等于

(1) 1986；(2) 2529；(3) 1989，

是否办得到？若办不到，简单说明理由；若办得到，试写出正方形框里的最大数与最小数。

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
……						
995	996	997	998	999	1000	1001

【分析】如果设框里的最小数为x，则框里的其它几个数可用x表示出来。另外，应该注意正方形框里的最小数被7除的余数不可能是6和0，最大的数被7除的余数不能是1和2。

【解】设最小数为x，则正方形框里的九个数为

x　　　$x+1$　　$x+2$

$$x+7 \quad x+8 \quad x+9$$
$$x+14 \quad x+15 \quad x+16$$

它们的和为$9x+72$。

(1) 如果$9x+72=1986$，则$9x=1914$。因为1914不能是9的倍数，所以这样的x不存在；

(2) 如果$9x+72=2529$，则有$9x=2457$，解出$x=273$。又由于$273\div7$余0，也不符合要求；

(3) 如果$9x+72=1989$，则有$9x=1917$。解出$x=213$，$213\div7=30$余3，满足要求，此时最小数为213，最大数为$213+16=229$。

例4 已知$N=\overline{2x78}$，若$17|N$，试求x。

【解】$\because$ $N=2078+100x$
$$=17(122+6x)+(4-2x),$$
又$\because$ $17|N$，$\therefore$ $17|(4-2x)$，即$17|2(2-x)$。

$\therefore$ $17|(2-x)$，即 $x=2$。

例5 1987以内是3的倍数但不是5的倍数的自然数有几个？

【分析】 注意既是3的倍数又是5的倍数的数一定是15的倍数，在所有3的倍数中，除去那些15的倍数，剩下的就是3的倍数但不是5的倍数。

【解】 利用带余除法，有
$$1987=3\times662+1$$
$$1987=15\times132+7。$$
这两个式子分别说明：在1到1987之间的整数有662个是3的倍数，有132个既是3的倍数又是5的倍数，因此，1987以内有$662-132=530$个整数是3的倍数，但不是5的倍数。