高考倒计时

Beijing

讲练测+

JIANG LIAN CE

2011北京市高考

高考总复习一轮用书

海淀、东城、西城、朝阳特高级教师 合审

理科数学

人教B版

快乐考生

快乐考生

Happy Examinee

首都师范大学出版社

CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据
高考倒计时讲练测. 理数/快乐考生编辑部主编
—北京: 首都师范大学出版社,2010.2
ISBN 978-7-81119-924-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①快… Ⅲ. ① 数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ. ①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第026587号

高考倒计时 讲练测
GAOKAO DAOJISHI JIANGLIANCE

数学

本册主编 戈占松
副 主 编 沈建军 檀晋轩 高 斌 王肖华
张 征 杨晓琦 曾范英 金永涛
白司雪

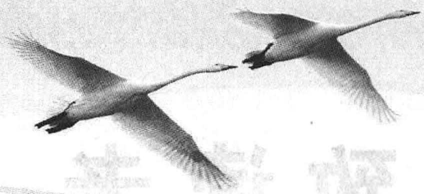
丛书策划: 快乐考生编辑部
首都师范大学出版社出版发行
地址 北京西三环北路 105号
邮编 100048
电话 68982468 (发行部)
网址 www.cnupn.com.cn
华新印业有限公司印刷
全国新华书店发行
版次 2010年3月第1版
印次 2010年3月第1版印刷
开本 880mm×1230mm 1/16
印张 26
字数 650千
印数 1—10000册
定价 65.00元

致读者

让飞翔的梦在六月张开翅膀

蓦然回首，我们经历了整整 12 年，准备了整整 12 年。
如果说之前的 12 年是漫长的马拉松，我们已经进入那最后的冲刺。
如果说之前的付出是勤恳的耕耘，我们已面临夏秋之交的更迭；
我们早已拉满弓，上好箭，我们唯一差的，
就是这最后的努力，最后的挥汗如雨。
鲜红的终点在前方真真切切，成功从来没有如此贴近我们年轻的生命，
受太阳之光华，乘春风之快意，御天地之灵气，
是强者必可脱颖而出，是胜者必可力压群雄。
我们举目苍穹，不是为了摘星取月，而是为了有一个不屈服的姿态。
给自己一个目标，让生命为它燃烧。
我们将用青春证明，没有比人更高的山，没有比脚更长的路。
同学们！
冲锋的号角在耳边响彻，波澜壮阔的画卷已经尽情铺展。
永不言败的信念，可以让脚步更加坚定。
踏实勤奋的学习，可以让进步更加显著。
平实严谨的作风，可以让道路在脚下无限延伸。
激情火热的勇气，可以让未名湖、博雅塔的风景在我们眼前更加鲜明夺目。
同学们，让我们不负父母的期盼，
不负恩师的厚望，
不负天赐的智慧，
不负青春的理想，
拼搏，
奋斗，
让飞翔的梦在六月张开翅膀，
让雄心与智慧在六月闪光！

栏目导读



基础知识梳理
夯实基础知识
梳理考点脉络
直击高考考点
能力升华提高
知识提纲挈领
脉络条理清晰

自学导航

要点梳理

1. 集合中元素的三个特性 ①_____；②_____；③_____.

2. 集合中元素与集合的关系
元素与集合的关系有___和____，分别用符号_、_表示.

3. 常见集合的符号表示：

基础自测

1. 已知集合 $A=\{x\in N|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$，则必有 (　　)
A. $-1\in A$　　B. $0\in A$
C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $2\in A$

典例剖析

题型一 集合的概念

例1 已知 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

[思维点拨] 由 $1\in A$ 可知 $a+2=1$ 或 $(a+1)^2=1$，或 $a^2+3a+3=1$，分别求出 a 并检验即可确定 a 的值.

变式训练

1. 集合 $P=\{x|x=2k,k\in Z\}$，$Q=\{x|x=2k+1,k\in Z\}$，$R=\{x|x=4k+1,k\in Z\}$，$a\in P$，$b\in Q$，则有 (　　)
A. $a+b\in P$
B. $a+b\in Q$
C. $a+b\in R$
D. $a+b$ 不属于 P,Q,R 中任意一个

命题要点聚焦
剖析重点难点
诠释疑点热点
探究规律方法
提炼解题技巧
易错易混展示
巧避知识陷井

讲

高考驿站

方法归纳

1. 解题时要特别关注集合元素的三个特性，特别是互异性，要进行解题后的检验.注意将数学语言与集合语言进行相互转化.

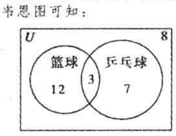
2. 空集$\varnothing$在解题时有特殊地位，它是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，时刻关注对空集的讨论，防止漏掉.

3. 能够规范准确地使用列举法和描述法表示集合，对于集合的问题，首先要清楚集合中的元素有多少，是什么，要准确理解用集合语言叙述的数学问题的题意.

高考解题示范

1. (2009·湖南)某班共30人，其中15人喜爱篮球运动，10人喜爱乒乓球运动，8人对这两项运动都不喜爱，则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为_______.

[解析] 由韦恩图可知：



[答案] 12

2. (2008·福建高考)设 P 是一个数集，且至少含有两个数，若对任意 $a,b\in P$，都有 $a+b,a-b,ab,\frac{a}{b}\in P$(除数 $b\neq 0$)，则称 P 是一个数域，例如有理数集 Q 是数域；数集 F

典型例题研析
精选典型例题
即时点拨解析
方法总结归类
知识迁移提升
巧设变式训练
解题触类旁通

课时作业
题型题量适中
梯度设计有序
方法探究提升
热点深度透析
知识全面覆盖
巩固即时高效

高考倒计时 讲练测　　课时作业　　快乐考生 Happy Examinee

课时作业1　集合与集合的表示方法

一、选择题

1. (2009年山东德州)已知集合 M 具有性质：若 $a\in M$，则 $2a\in M$.已知 $-1\in M$，则下列元素一定是 M 中的元素的是 (　　)
A. $-\frac{1}{2}$　　B. 0
C. -2　　D. 2

2. 下列命题中错误的是 (　　)

(3)若 $C=\{x|-1<x<10,x\in N^*\}$，则 0_______C；

(4)若 $D=\{x|x^2\leqslant 3,x\in N\}$，则 2_______D.

三、解答题

11. 已知集合 $A=\{$小于6的正整数$\}$，$B=\{$小于10的质数$\}$，$C=\{$24和36的正公约数$\}$，用列举法表示：
(1)$\{y|y\in A$ 且 $y\in C\}$；(2)$\{y|y\in B$ 且 $y\notin C\}$.

练

测

高考倒计时 讲练测　　单元质量检测　　快乐考生 Happy Examinee

单元质量检测(一)

(时间：100分钟，满分150分)

一、选择题(本大题共12小题，每题5分，满分60分)

1. 设集合 $U=\{1,2,3,4\}$，$A=\{1,2\}$，$B=\{2,4\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$ (　　)
A. $\{2\}$　　B. $\{3\}$
C. $\{1,2,4\}$　　D. $\{1,4\}$

2. 命题"若 a,b 都是奇数，则 $a+b$ 是偶数"的逆否命题是 (　　)
A. a,b 都不是奇数，则 $a+b$ 是偶数

栏的4个运动员 A,B,C,D 作赛前预猜：
甲说："C 或 D 将夺冠军."
乙说："D 将夺冠军."
丙说："夺冠者应是 C."
丁说："A 和 C 不可能夺冠."
赛后证明，以上四句话中只有两句是对的，那么夺冠者应是 (　　)
A. A　　B. B

单元质量评估
考点全面检测
应试能力提高
搭配最新模拟
再现近年真题
掌控高考脉博
轻松应对高考

目录

第一板块

第二板块

第三板块

第四板块

第五板块

第六板块

第七板块

目录

第八板块

第九板块

第十板块

第十一板块

第十二板块

第十三板块

第十四板块

第十五板块

第十六板块

第一板块

必修1　第一章　集合

§1.1　集合与集合的表示方法

自学导航

要点梳理

1. 集合中元素的三个特性 ①______； ②______； ③______.

2. 集合中元素与集合的关系

元素与集合的关系有____和______，分别用符号__、__表示.

3. 常见集合的符号表示：

数集	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集
记法	**N**	$\mathbf{N}^*$或$\mathbf{N}_+$	**Z**	**Q**	**R**

4. 集合的表示法 ______， __________， __________.

基础自测

1. 已知集合$A=\{x\in\mathbf{N}|-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\}$，则必有　（　　）

A. $-1\in A$　　B. $0\in A$

C. $\sqrt{3}\in A$　　D. $2\in A$

2. 有下列各组对象：①高一年级会学习的同学；②大于3，小于4的整数；③高一年级任教的老师；④被3除余数是1的所有整数；⑤全校所有教学质量较高的教师. 其中能构成集合的对象有　（　　）

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

3. 已知集合$M=\{a,b,c\}$中的三个元素可构成某一三角形的三边长，那么此三角形一定不是　（　　）

A. 直角三角形　　B. 锐角三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰三角形

4. 已知集合$A=\{2,3,4\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，$C=\{(x,y)|x\in A,y\in B$，且$\log_x y\in\mathbf{N}_+\}$，则$C$中元素个数是　（　　）

A. 9　　B. 8

C. 3　　D. 4

5. 用"$\in$"或"$\notin$"填空：

(1)$\frac{1}{2}$______**N**；(2)π______**R**；(3)0______$\mathbf{N}^*$；

(4)$\cos 45°$______**Q**；(5)$\sqrt{3}$______**Z**；(6)-1______**Z**.

典例剖析

题型1　集合的概念

例1 已知$A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若$1\in A$，求实数$a$的值.

［思维点拨］ 由$1\in A$可知$a+2=1$或$(a+1)^2=1$，或$a^2+3a+3=1$，分别求出a并检验即可确定a的值.

变式训练

1. 集合$P=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$，$Q=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$R=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$a\in P$，$b\in Q$，则有　（　　）

A. $a+b\in P$

B. $a+b\in Q$

C. $a+b\in R$

D. $a+b$不属于P，Q，R中任意一个

题型2　集合中元素的特征

例2 设$a,b\in\mathbf{R}$，集合$\{1,a+b,a\}=\{0,\frac{b}{a},b\}$，则$b-a=$　（　　）

A. 1　　B. -1

C. 2　　D. -2

［思维点拨］ 利用集合相等的条件列出方程或方程组即可求解.

变式训练

2. 含有三个实数的集合可表示为$\{a,\frac{b}{a},1\}$，也可表示为$\{a^2,a+b,0\}$，则$a^{2010}+b^{2010}=$______.

题型③ 集合的表示方法

例3 用适当的形式表示下列对象构成的集合.

(1)比5大3的数;

(2)11以内的质数;

(3)方程$x^2-5x+6=0$的解;

(4)函数$y=x^2+4$的图象上的点.

[思维点拨] 对于一个集合用描述法还是用列举法表示,从理论上讲都可以,但有些时候为了方便,要结合具体的问题来选择合理的表示方法.

变式训练

3. 观察下面的三个集合:

(1)$\{x|y=x^2+1\}$;

(2)$\{y|y=x^2+1\}$;

(3)$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

它们表示的含义相同吗?为什么?

题型④ 实际应用

例4 已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若A是空集,求a的取值范围;

(2)若A中只有一个元素,求a的值,并把这个元素写出来;

(3)若A中至多有一个元素,求a的取值范围.

[思维点拨] (1)A是空集,等价于方程$ax^2-3x+2=0$无实根;(2)A中只有一个元素,等价于方程$ax^2-3x+2=0$只有一个实根或两个相等的实根,要讨论$a=0$与$a\neq0$两种情况;(3)A中至多有一个元素,是(1)(2)两小题的并集.

变式训练

4. 已知集合$A=\{x|ax^2-2x+4=0\}$,若集合A中有两个元素,试求整数a的最大值.

高考驿站

方法归纳

1. 解题时要特别关注集合元素的三个特性,特别是互异性,要进行解题后的检验.注意将数学语言与集合语言进行相互转化.

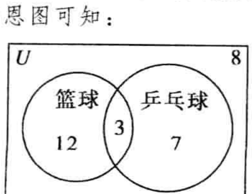
2. 空集$\varnothing$在解题时有特殊地位,它是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集,时刻关注对空集的讨论,防止漏掉.

3. 能够规范准确地使用列举法和描述法表示集合,对于集合的问题,首先要清楚集合中的元素有多少,是什么,要准确理解用集合语言叙述的数学问题的题意.

高考解题示范

1. (2009·湖南)某班共30人,其中15人喜爱篮球运动,10人喜爱乒乓球运动,8人对这两项运动都不喜爱,则喜爱篮球运动但不喜爱乒乓球运动的人数为________.

[解析] 由韦恩图可知:



[答案] 12

2. (2008·福建高考)设P是一个数集,且至少含有两个数,若对任意a、$b\in P$,都有$a+b$、$a-b$,ab、$\frac{a}{b}\in P$(除数$b\neq0$),则称P是一个数域,例如有理数集Q是数域;数集$F=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbf{Q}\}$也是数域,有下列命题:

①整数集是数域;

②若有理数集$Q\subseteq M$,则数集M必为数域;

③数域必为无限集;

④存在无穷多个数域.

其中正确的命题的序号是________.(把你认为正确的命题的序号都填上)

[解析] 命题①:$1\in\mathbf{Z}$,$2\in\mathbf{Z}$但$\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$,

故整数集是数域不正确;

命题②:设$M=\{x|x\in Q$或$x=\pi\}$,则满足$Q\subseteq M$.

由$2\in M$,$\pi\in M$但$2\pi\notin M$知②不正确;

命题③:设P是数域,$m\in P$且$m\neq0$,

则由数域定义知$2m\in P$,$3m\in P$,$4m\in P$,…,$nm\in P(n\in N^*)$,

故P中有无限个元素,即命题③正确;

命题④:设P是数域,则集合$\{a+kb|a,b\in P,k\in\mathbf{Q}$且$k\neq0\}$也是数域,

故这样的数域有无数个,即命题④正确.

[答案] ③④

温馨提示

一节课学习完了,所有的知识您都掌握了吗?为了方便您的学习,课时作业单独成册,快乐考生提醒您注意完成"**课时作业1**"。

相信您的收获一定不小!

§1.2 集合之间的关系与运算

自学导航

要点梳理

1. 集合间的基本关系

关系＼表示	文字语言	符合语言
子集	集合 A 中任意一元素都是集合 B 中的元素	______或______
真子集	集合 A 是集合 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不____A	______或______
空集	空集是任何集合的____是任何________的真子集	$\varnothing\subseteq A$，$\varnothing\subsetneqq B(B\neq\varnothing)$
相等	集合 A 中的____都是集合 B 的元素，集合 B 的____也都是集合 A 的元素	______ $\Leftrightarrow A=B$

2. 集合的基本运算

	集合的并集	集合的交集	集合的补集
符合表示	______	______	若 U 为全集，A 是 U 的子集，则 A 在 U 中的补集为 $\complement_U A$
意义	______ ______	______ ______	$\complement_U A=$________

3. 集合的性质：

并集的性质：

$A\cup\varnothing=A$，$A\cup A=A$；

$A\cup B=B\cup A$；$A\cup B=A\Leftrightarrow B\subseteq A$.

交集的性质：

$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap A=A$；

$A\cap B=B\cap A$；$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$.

补集的性质：

$A\cup(\complement_U A)=U$；

$A\cap(\complement_U A)=\varnothing$；

$\complement_U(\complement_U A)=A$；

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；

$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

基础自测

1. (2008·全国Ⅱ,1)设集合 $M=\{m\in\mathbf{Z}\mid -3<m<2\}$，$N=\{n\in\mathbf{Z}\mid -1\leqslant n\leqslant 3\}$，则 $M\cap N$ 等于（　　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$

C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-1,0,1,2\}$

2. 已知集合 $P=\{1,2\}$，那么满足 $Q\subseteq P$ 的集合 Q 的个数是（　　）

A. 4　　B. 3

C. 2　　D. 1

3. 设集合 $A=\{1,2\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{2,3,4\}$，则 $(A\cap B)\cup C$ 等于（　　）

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{1,2,4\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{1,2,3,4\}$

4. 设 U 为全集，非空集 A、B 满足 $A\subsetneqq B$，则下列集合为空集的是（　　）

A. $A\cap B$　　B. $A\cap(\complement_U B)$

C. $B\cap(\complement_U A)$　　D. $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$

5. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$，若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$________.

典例剖析

题型1 新概念集合类问题

例1 (2010·郑州模拟)设数集 $M=\{x\mid m\leqslant x\leqslant m+\frac{3}{4}\}$，$N=\{x\mid n-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant n\}$，且 M、N 都是集合 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集，如果把 $b-a$ 叫做集合 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 的"长度"，那么集合 $M\cap N$ 的"长度"的最小值是（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{12}$　　D. $\frac{5}{12}$

[思维点拨] 根据 M、N 都是集合 $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 的子集，确定 m、n 的范围，从而求出 $M\cap N$ 的"长度"的最小值.

变式训练

1. 设 $U=\{1,2,3,4\}$，A 与 B 是 U 的子集，若 $A\cap B=\{1,2\}$，则称 (A,B) 为一个"理想配集". 那么符合此条件的"理想配集"的个数是(规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的"理想配集")（　　）

A. 4　　B. 8

C. 9　　D. 16

题型2 集合间的关系

例2 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$，

(1)若 $B\subseteq A$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数 m 的取值范围；

(2)若 $A\subseteq B$，$B=\{x\mid m-6\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数 m 的取值范围；

(3)若 $A=B$，$B=\{x\mid m-6\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，求实数 m 的取值范围.

变式训练

2. 设集合 $A=\{x|x=a^2+2a+4\}$,$B=\{y|y=b^2-4b+7\}$.
(1)若 $a\in\mathbf{R}$,$b\in\mathbf{R}$,试确定集合 A 与 B 的关系;
(2)若 $a\geqslant0$,$b\geqslant0$,试确定集合 A 与 B 的关系.

题型 3 集合的基本运算

例 3 (1)(2008·广东清远)已知集合 $M=\{x|y^2=x+1\}$,$P=\{x|y^2=-2(x-3)\}$,那么 $M\cap P$ 等于 ( )

A. $\{(x,y)|x=\frac{5}{3},y=\pm\frac{2\sqrt{6}}{3}\}$
B. $\{x|-1<x<3\}$
C. $\{x|-1\leqslant x\leqslant3\}$
D. $\{x|x\leqslant3\}$

[思维点拨] 看清代表元素,利用 $y^2\geqslant0$ 把集合进行化简,再求 $M\cap P$.

(2)设 I 为全集,S_1、S_2、S_3 是 I 的三个非空子集,且 $S_1\cup S_2\cup S_3=I$,则下面论断正确的是

A. $(\complement_I S_1)\cap(S_2\cup S_3)=\varnothing$
B. $S_1\subseteq[(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)]$
C. $(\complement_I S_1)\cap(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)=\varnothing$
D. $S_1\subseteq[(\complement_I S_2)\cap(\complement_I S_3)\cup(\complement_I S_3)]$

[思维点拨] (1)构造出符合条件的集合即特殊值法.
(2)用 Venn 图处理.

变式训练

3. (1)已知全集 $U=\mathbf{R}$,$M=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$,$P=\{x|y=\log_{\frac{1}{2}}x,y\in M\}$,下列各式中正确的是 ( )

A. $M\cap P=P$
B. $M\cup(\complement_U P)=M$
C. $(\complement_U M)\cup P=\{x|x\leqslant1\}$
D. $(\complement_U M)\cap(\complement_U P)=\{x|x\leqslant0$ 或 $\frac{1}{2}<x<1\}$

(2)设 A、B、I 均为非空集合,且满足 $A\subseteq B\subseteq I$,则下列各式中错误的是 ( )

A. $(\complement_I A)\cup B=I$
B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$
C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$
D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

题型 4 以集合为载体的综合问题

例 4 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$,$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$,

(1)若 $A\cap B=B$,求 a 的取值范围;(2)若 $A\cup B=B$,求 a 的取值范围.

[思维点拨] 化简 $A=\{0,-4\}$,再利用 $A\cap B=B$,得 $B\subseteq A$,$A\cup B=B$,得 $A\subseteq B$ 来进行计算.

变式训练

4. $A=\{x|x^2-ax+a^2-19=0\}$,$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$,$C=\{x|x^2+2x-8=0\}$.
(1)若 $A\cap B=A\cup B$,求 a 的值;
(2)若 $\varnothing\subsetneqq A\cap B$,$A\cap C=\varnothing$,求 a 的值.

高考驿站

方法归纳

1. 两个集合的交、并、补运算分别与逻辑连结词且、或、非相对应,但不能相混淆,如 $\{x|x^2>4\}$ 不能化成 $\{x|x<-2\}$ 或 $\{x|x>2\}$,$x^2>4$ 也不能化成 $x<-2\cup x>2$.

2. 若 A、B 是 S 的两个子集,则全集 S 最多被 4 个集合 $A\cap B$、$A\cap(\complement_S B)$、$B\cap(\complement_S A)$、$\complement_S(A\cup B)$ 所划分,其中必有 $A\cap B\subseteq A$、$B\subseteq A\cup B\subseteq S$.

3. 韦恩图示法和数轴图示法是进行集合交、并、补运算的常用方法,其中运用数轴图示法要特别注意端点是实心还是空心.

4. 5 个关系式 $A\subseteq B$、$A\cap B=A$、$A\cup B=B$、$\complement_U A\supseteq\complement_U B$、$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$ 是两两等价的.

高考解题示范

1. (2009·陕西)若不等式 $x^2-x\leqslant0$ 的解集为 M,函数 $f(x)=\ln(1-|x|)$ 的定义域为 N,则 $M\cap N$ 为 ( )

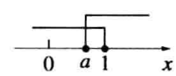
A. $[0,1)$　　B. $(0,1)$
C. $[0,1]$　　D $(-1,0]$

[解析] $M=\{x|0\leqslant x\leqslant1\}$,$N=\{x|-1<x<1\}$,
$\therefore M\cap N=\{x|0\leqslant x<1\}$. 故选 A.

[答案] A

2. (2009·上海)已知集合 $A=\{x|x\leqslant1\}$,$B=\{x|x\leqslant a\}$,且 $A\cup B=\mathbf{R}$,则实数 a 的取值范围是________.

[解析] $\because A\cup B=\mathbf{R}$,如右图所示.



当 $a\leqslant1$ 时满足题意. 即 a 的取值范围是 $(-\infty,1]$.

[答案] $(-\infty,1]$

温馨提示

一节课学习完了,所有的知识您都掌握了吗?为了方便您的学习,课时作业单独成册,快乐考生提醒您注意完成"**课时作业 2**"。

相信您的收获一定不小!

第一板块

选修 2—1　第一章　常用逻辑用语

§1.1　命题与量词、基本逻辑联结词

自学导航

要点梳理

1. 命题

用语言、符号或式子表达的，能________叫做命题. 其中______的语句叫做真命题，判断为假的语句叫做______.

2. 全称量词

(1)短语“____”在陈述中表示所述事物的____，在逻辑中通常叫做全称量词，并且用符号“____”表示.

(2)________的命题，叫做全称命题.

(3)全称命题“对 M 中所有 x，$p(x)$”可用符号简记为“______”.

3. 存在量词与存在性命题

(1)存在量词的定义

短语“有一个”或“有些”或“至少有一个”在陈述中表示所述事物的个体或部分，逻辑中通常叫做______，并且用符号“$\exists$”表示.

(2)________的命题，叫做存在性命题.

(3)存在性命题的符号表示

设 $q(x)$ 是某集合 M 的有些元素 x 具有的某种性质那么存在性命题就是形如“存在集合 M 中的元素 x，$q(x)$”的命题，用符号简记为 $\exists x\in M, q(x)$.

4. 基本逻辑联结词

常用的基本逻辑联结词有“____”、“____”、“____”.

5. 命题 $p\wedge q$，$p\vee q$，$\neg p$ 的真假判断.

p	q	$p\wedge q$	$p\vee q$	$\neg p$
真	真	__	__	__
真	假	__	__	__
假	真	__	__	__
假	假	__	__	__

6. 含有一个量词的命题的否定

命题	命题的否定
$\forall x\in M, p(x)$	______
$\exists x\in M, p(x)$	______

基础自测

1. 下列语句中是命题的个数为　(　　)
①空集是任何集合的真子集；
②$x^2-3x-4=0$；
③$3x-2>0$；
④把门关上；
⑤垂直于同一条直线的两条直线必平行吗？
⑥自然数是偶数.
A. 1 个　　B. 2 个
C. 3 个　　D. 4 个

2. 下列四个命题中，其中为真命题的是　(　　)
A. $\forall x\in \mathbf{R}, x^2+3<0$　　B. $\forall x\in \mathbf{N}, x^2\geqslant 1$
C. $\exists x\in \mathbf{Z}$，使 $x^5<1$　　D. $\exists x\in \mathbf{Q}$，使 $x^2=3$

3. 下列命题是存在性命题的是　(　　)
A. 偶函数的图象关于 y 轴对称
B. $\forall x\in \mathbf{R}, x^2+x+1<0$
C. 存在实数大于等于 3
D. 菱形的对角线垂直

4. 已知 p：$2+2=5$；q：$3>2$，则下列判断错误的是　(　　)
A. “$p\vee q$”为真，“$\neg q$”为假
B. “$p\wedge q$”为假，“$\neg p$”为真
C. “$p\wedge q$”为假，“$\neg p$”为假
D. “$p\wedge q$”为假，“$p\vee q$”为真

5. 命题“$\exists x\in \mathbf{R}, x^3+5x-2=0$”的否定是______.

典例剖析

题型 1　全称命题与存在性命题

例 1　判断下列命题是全称命题还是特称命题，并判断其真假：

(1)对数函数都是单调函数；
(2)至少有一个整数，它既能被 2 整除，又能被 5 整除；
(3)$\forall x\in\{x|x$ 是无理数$\}$，x^2 是无理数；
(4)$\exists x\in\{x|x\in \mathbf{Z}\}$，$\log_2 x>0$.

[思维点拨]　利用全称命题和特称命题的定义来判断.

变式训练

1. 下列命题哪些是全称命题，哪些是存在性命题，用相应的形式表示并判断真假.
(1)对任意 $x\in \mathbf{R}$，$x^2\geqslant 0$；
(2)$2n+1$ 是奇数；
(3)存在 $x=1$ 使 $x^2+x-2=0$；
(4)所有的奇数都不能被 3 整除；
(5)对任意实数，a，$a^0=1$；
(6)有些实数 x，使得 $|x+1|<0.1$.

题型2 判断含有逻辑联结词的命题的真假

例2 分别指出由下列命题构成的“$p\vee q$”、“$p\wedge q$”、“$\neg p$”形式的命题的真假.

(1)p:3是9的约数,q:3是18的约数.

(2)p:菱形的对角线相等,q:菱形的对角线互相垂直.

(3)p:方程$x^2+x-1=0$的两实根符号相同.

q:方程$x^2+x-1=0$的两实根绝对值相等.

(4)p:π是有理数,q:π是无理数.

[思维点拨] 由含逻辑联结词“或”“且”“非”的命题的形式及其真值表直接判断.

变式训练

2. 指出下列命题的形式及构成它的命题,并判断其真假.

(1)96是48与24的倍数;

(2)方程$x^2-2=0$没有有理根;

(3)集合$\{x|x>1$ 或 $x<-1\}$是不等式$x^2-1>0$或$\lg(x+9)>1$的解集.

题型3 全称命题与存在性命题的否定

例3 写出下列命题的否定,并判断命题的否定的真假,指出命题的否定是全称命题还是存在性命题:

(1)所有的有理数是实数;

(2)有的三角形是直角三角形;

(3)每个二次函数的图象都与y轴相交;

(4)$\forall x\in \mathbf{R}, x^2-2x>0$.

[思维点拨] 先否定量词:存在$\xleftrightarrow{\text{否定}}$任意.再否定判断词.

变式训练

3. 写出下列命题的否定并判断其真假:

(1)p:不论m取何实数,方程$x^2+mx-1=0$必有实数根;

(2)p:有的三角形的三条边相等;

(3)p:菱形的对角线互相垂直;

(4)p:$\exists x\in \mathbf{N}, x^2-2x+1\leqslant 0$.

题型4 求参数的取值范围

例4 已知$a>0$,设命题p:函数$y=a^x$在$\mathbf{R}$上单调递减,q:设函数$y=\begin{cases}2x-2a & (x\geqslant 2a)\\ 2a & (x<2a)\end{cases}$,函数$y>1$恒成立,若$p\wedge q$为假,$p\vee q$为真,求$a$的取值范围.

[思维点拨] 先将p、q为真时的a值求出来,然后根据“$p\wedge q$”为假,“$p\vee q$”为真,可知p和q中必是一真一假,则分两类求出a的范围.

变式训练

4. 已知命题p:方程$x^2+mx+1=0$有两个不相等的负实数根;命题q:方程$4x^2+4(m-2)x+1=0$无实数根.若“p或q”为真命题,“p且q”为假命题,求m的取值范围.

高考驿站

方法归纳

1. 真值表是根据简单命题的真假,判断由这些简单命题构成的复合命题的真假,要掌握以下规律:

(1)“$p\wedge q$”形式的复合命题只有当命题“p”与命题“q”同时为真时才为真,否则为假;

(2)“$p\vee q$”形式的复合命题只有当命题“p”与命题“q”同时为假时才为假,否则为真;

(3)“$\neg p$”形式的复合命题的真假与命题“p”的真假相反.

2. 简单命题与复合命题的判断

判断一个命题是简单命题还是复合命题时,不能只从字面上看有没有“且”“或”“非”,如“等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高互相重合”,此命题字面上无“且”,但可改成“等腰三角形的顶角平分线既是底边上的中线又是底边上的高线”,所以它是复合命题.又例如“5的倍数的末位数字不是0就是5”,此命题字面上无“或”,但它也是复合命题.

3. 判断复合命题真假的基本程序如下:

(1)确定复合命题的构成形式(先找出逻辑联结词,后确定被联结的简单命题);

(2)判断各个简单命题的真假;

(3)结合真值表推断复合命题的真假.

高考解题示范

1. (2009·天津)命题“存在$x_0\in \mathbf{R}, 2^{x_0}\leqslant 0$”的否定是( )

A. 不存在$x_0\in \mathbf{R}, 2^{x_0}>0$

B. 存在$x_0\in \mathbf{R}, 2^{x_0}\geqslant 0$

C. 对任意的$x\in \mathbf{R}, 2^x\leqslant 0$

D. 对任意的$x\in \mathbf{R}, 2^x>0$

[解析] 命题“存在$x_0\in \mathbf{R}, 2^{x_0}\leqslant 0$”的否定是:“对任意的$x_0\in \mathbf{R}, 2^{x_0}>0$”.

[答案] D

2. (2009·浙江杭州七校联考)已知命题:p:$a^2\geqslant 0(a\in \mathbf{R})$,命题$q$:函数$f(x)=x^2-x$在区间$[0,+\infty)$上单调递增,则下列命题为真命题的是( )

A. $p\vee q$　　B. $p\wedge q$

C. $(\neg p)\wedge(\neg q)$　　D. $(\neg p)\vee q$

[解析] p真,q假,$\therefore p\vee q$为真,故选A.

[答案] A

温馨提示

一节课学习完了,所有的知识您都掌握了吗?为了方便您的学习,课时作业单独成册,快乐考生提醒您注意完成“**课时作业3**”。

相信您的收获一定不小!

§1.2 充分条件、必要条件与命题的四种形式

自学导航

要 点 梳 理

1. 如果 $p\Rightarrow q$，那么称 p 是 q 的________，同时称 q 是 p 的________.

2. 如果 $p\Rightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的__________，简称为 p 是 q 的________，记作______.

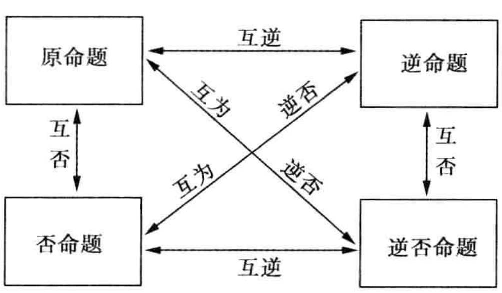
3. 如果 $p\Rightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$，那么称 p 是 q 的__________.

4. 如果 $p\nRightarrow q$，且 $q\Rightarrow p$，那么称 p 是 q 的__________；如果 $p\nRightarrow q$，且 $q\nRightarrow p$ 那么称 p 是 q 的__________.

5. 四种命题

命题	表述形式
原命题	若 p 则 q
逆命题	________
否命题	________
逆否命题	________

6. 四种命题间的关系



7. 四种命题的等价关系

①________的两个命题等价(同真或同假)，因此证明原命题也可以改证它的逆否命题.

②____或____的两个命题不等价.

基 础 自 测

1. 命题"若 $x^2<1$，则 $-1<x<1$"的逆否命题是　　(　　)

A. 若 $x^2\geqslant 1$，则 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$

B. 若 $-1<x<1$，则 $x^2<1$

C. 若 $x>1$ 或 $x<-1$，则 $x^2>1$

D 若 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -1$，则 $x^2\geqslant 1$

2. (**2009 年上海春招**)若集合 $A=\{1,m^2\}$，$B=\{2,4\}$，则"$m=2$"是"$A\cap B=\{4\}$"的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 给出两个命题：p：$|x|=x$ 的充要条件是 x 为正实数；q：存在反函数的函数一定是单调函数. 则下列复合命题是真命题的为　　(　　)

A. p 且 q　　B. p 或 q

C. $\neg p$ 且 q　　D. $\neg p$ 或 q

4. 如果甲是乙的必要不充分条件，乙是丙的充要条件，丙是丁的必要不充分条件，则丁是甲的　　(　　)

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

5. (**2009・广东湛江**)写出命题"如果 $\sqrt{x-2}+(y+1)^2=0$，则 $x=2$ 且 $y=-1$"的逆命题、否命题、逆否命题，并判断它们的真假.

典例剖析

题型 1 四种命题及其关系

例 1 把下列命题写成"若 p 则 q"的形式，并写出它们的逆命题、否命题与逆否命题.

(1)当 $x=2$ 时，$x^2-3x+2=0$；

(2)对顶角相等.

[**思维点拨**] 应先把命题改为"若 p，则 q"的形式，把条件和结论互换，得逆命题；把条件和结论都加以否定位置不变就得到否命题；再把逆命题中的条件和结论都加以否定，就得到逆否命题.

变式训练

1. 写出下列命题的逆命题、否命题、逆否命题，并判断其真假.

(1)实数的平方是非负数；

(2)等底等高的两个三角形是全等三角形；

(3)弦的垂直平分线经过圆心，并平分弦所对的弧.

题型 2 充分条件与必要条件的判定

例 2 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件.(在"充分而不必要条件"、"必要而不充分条件"、"充要条件"、"既不充分又不必要条件"中选出一种作答).

(1)p：$(x-2)(x-3)=0$，q：$x-2=0$

(2)p：四边形的对角线相等，q：四边形是平行四边形

(3)p：$(x-1)^2+(y-2)^2=0$，q：$(x-1)(y-2)=0$

(4)在△ABC 中，p：$A>B$，q：$BC>AC$.

[**思维点拨**] 先分清条件与结论，再分析由前者能否推出后者，由后者能否推出前者，即可判断出是什么条件.

变式训练

2. 指出下列各组命题中，p 是 q 的什么条件(在"充分而不必要条件"、"必要而不充分条件"、"充要条件"、"既不充分又不必要条件"中选出一种作答).

(1)在△ABC 中，p：$A>B$，q：$\sin A>\sin B$.

(2)对于实数 x,y，p：$x+y\neq 8$，q：$x\neq 2$ 或 $y\neq 6$.

(3)在△ABC 中，p：$\sin A>\sin B$，q：$\tan A>\tan B$.

题型 3 充分条件与必要条件的应用

例 3 已知 p：$\left|1-\frac{x-1}{3}\right|\leqslant 2$，$q$：$x^2-2x+1-m^2\leqslant 0(m>0)$，若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要而不充分条件，求实数 m 的取值范围.

[**思维点拨**] 先求 $\neg p$、$\neg q$，根据 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的必要不充分条件，转化为 $\neg p$、$\neg q$ 所对应数集的关系并借助数轴求

解,或者利用逆否命题等价形式:q 是 p 的必要非充分来求解.

变式训练

3. 为激发学生学习的兴趣,老师上课时在黑板上写出三个集合:$A=\{x|\frac{\square x-1}{x}<0\}$,$B=\{x|x^2-3x-4\leqslant 0\}$,$C=\{x|\log_{\frac{1}{2}}x>1\}$;然后叫甲、乙、丙三位同学到讲台上,并将"□"中的数告诉了他们,要求他们各用一句话来描述,以便同学们能确定该数,以下是甲、乙、丙三位同学的描述:
甲:此数为小于6的正整数,
乙:A 是 B 成立的充分不必要条件,
丙:A 是 C 成立的必要不充分条件.
若老师评价三位同学都说得对,求"□"中的数.

例4 已知 $ab\neq 0$,
求证:$a+b=1$ 的充要条件是 $a^3+b^3+ab-a^2-b^2=0$.

[思维点拨] 此类问题需证明两个命题,即充分性与必要性,故应分清哪些是条件,哪些是结论,然后再分别证明.

变式训练

4. 求关于 x 的方程 $ax^2-(a^2+a+1)x+a+1=0$ 至少有一个正根的充要条件.

高考驿站

方法归纳

1. 处理充分、必要条件问题时,首先要分清条件与结论,然后才能进行推理和判断.

2. 判断命题的充要关系有三种方法.

①定义法:直接判断若 p 则 q,若 q 则 p 的真假.

②等价法:即利用 $A\Rightarrow B$ 与 $\neg B\Rightarrow\neg A$;$B\Rightarrow A$ 与 $\neg A\Rightarrow\neg B$;$A\Leftrightarrow B$ 与 $\neg B\Leftrightarrow\neg A$ 的等价关系,对于条件或结论是否定式的命题,一般运用等价法.

③利用集合间的包含关系判断:若 $A\subseteq B$,则 A 是 B 的充分条件或 B 是 A 的必要条件;若 $A=B$,则 A 是 B 的充要条件.

3. 确定条件为不充分或不必要的条件时,常用构造反例的方法来说明.

4. "否命题"与"命题的否定"是两个不同的概念,若 p 表示命题,"$\neg p$"叫做命题 p 的否定,如果原命题是"若 p,则 q",那么这个原命题的否定是"若 p,则非 q",即只否定结论,而原命题的否命题是"若 $\neg p$,则 $\neg q$",即既否定命题的条件,又否定结论.

5. 在判断四种命题之间的关系时,首先要注意分清命题的条件与结论再比较每个命题的条件与结论之间的关系,要注意四种命题关系的相对性,一旦一个命题定为原命题,也就相应地有了它的"逆命题""否命题""逆否命题".

6. 当一个命题有大前提而要写出其他三种命题时,必须保留大前提,也就是大前提不动;对于由多个并列条件组成的命题,在写其他三种命题时,应把其中一个(或 n 个)作为大前提.

高考解题示范

1. (2009·安徽)下列选项中,p 是 q 的必要不充分条件的是 ( )

A. $p:a+c>b+d$,$q:a>b$ 且 $c>d$

B. $p:a>1,b>1$,$q:f(x)=a^x-b(a>0$,且 $a\neq 1)$的图像不过第二象限

C. $p:x=1$,$q:x^2=x$

D. $p:a>1$,$q:f(x)=log_ax(a>0$,且 $a\neq 1)$在$(0,+\infty)$上为增函数

[解析] $\because p:a+c>b+d$,$q:a>b$ 且 $c>d$,$\therefore p\nRightarrow q$,$q\Rightarrow p$.

对于选项B:$p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,p 是 q 的充分不必要条件.

对于选项C:$p\Rightarrow q$,$q\nRightarrow p$,p 是 q 的充分不必要条件.

对于选项D:$p\Leftrightarrow q$,p 是 q 的充要条件.

故选A.

[答案] A

2. (2008年东营月考)在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点.

(1)求证:"如果直线 l 过点 $T(3,0)$,那么 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$"是真命题;

(2)写出(1)中命题的逆命题,判断它是真命题还是假命题,并说明理由.

[证明] 令直线 l 与抛物线两个交点 A、B 的坐标分别是(x_1,y_1),(x_2,y_2);

由于直线 l 过点 $T(3,0)$,从而 $\overrightarrow{TA}\parallel\overrightarrow{TB}$,再有 $\overrightarrow{TA}=(x_1-3,y_1)$,$\overrightarrow{TB}=(x_2-3,y_2)$,

可得 $(x_1-3)y_2=(x_2-3)y_1$,即 $x_1y_2-x_2y_1-3y_2+3y_1=0$,

由于交点 A、B 也在抛物线上,得 $\begin{cases}y_1^2=2x_1,\\y_2^2=2x_2,\end{cases}$

代入上式 $\frac{y_1^2y_2}{2}-\frac{y_1y_2^2}{2}-3y_2+3y_1=(y_1-y_2)(\frac{y_1y_2}{2}+3)=0$,

显然交点 A、B 的纵坐标不可能相等,只有 $\frac{y_1y_2}{2}+3=0\Rightarrow y_1y_2=-6$.

同时 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(\frac{y_1y_2}{2})^2+y_1y_2=9-6=3$.

所以命题为真命题.

(2)解:逆命题为:"如果 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$,则直线 l 过点 $T(3,0)$."

由于交点 A、B 也在抛物线上,得 $\begin{cases}y_1^2=2x_1,\\y_2^2=2x_2,\end{cases}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(\frac{y_1y_2}{2})^2+y_1y_2=3$,

可得 $y_1y_2=2$ 或 $y_1y_2=-6$.

又 $\overrightarrow{TA}=(x_1-3,y_1)$,$\overrightarrow{TB}=(x_2-3,y_2)$,

若 $\overrightarrow{TA}\parallel\overrightarrow{TB}\Rightarrow(x_1-3)y_2=(x_2-3)y_1$,即 $x_1y_2-x_2y_1-3y_2+3y_1=0$;

而 $x_1y_2-x_2y_1-3y_2+3y_1=\frac{y_1^2y_2}{2}-\frac{y_1y_2^2}{2}-3y_2+3y_1=(y_1-y_2)(\frac{y_1y_2}{2}+3)$,

显然当 $y_1y_2=-6$ 时使得"直线 l 过点 $T(3,0)$";

而当 $y_1y_2=2$ 时"直线 l 不过点 $T(3,0)$".

所以该命题是假命题.

温馨提示

一节课学习完了,所有的知识您都掌握了吗?为了方便您的学习,课时作业单独成册,快乐考生提醒您注意完成"**课时作业4**"。

相信您的收获一定不小!

第二板块

必修1　第二章　函数

§2.1　函数的概念及表示方法

自学导航

要点梳理

1.函数的概念

(1)设集合 A 是一个________,对 A 内________,按照确定的法则 f,都有________的实数值 y 与它对应,则这种对应关系叫做集合 A 上的一个函数,记作________,其中 x 叫做自变量,自变量取值的范围(数集 A)叫做这个函数的______.

(2)如果自变量取值 a,则由法则 f 确定的值 y 称为函数在 a 处的______,记作________.所有函数值构成的集合________,叫做这个函数的值域.

2.构成函数的要素

(1)函数的值域被函数的定义域和对应法则完全确定,所以确定一个函数只需两个要素:______和______.

(2)检验两个变量之间是否具有函数关系,只要检验:

①______和______是否给出.

②根据给出的对应法则,自变量 x 在其定义域中的每一个值,是否都能确定____的函数值 y.

3.映射

(1)定义

设 A、B 是两个非空集合,如果按照某种对应法则 f,对 A 内________元素 x,在 B 中________元素 y 与 x 对应,则称 f 是集合 A 到集合 B 的映射,这时,称 y 是 x 在映射 f 的作用下的__,记作 $f(x)$,x 称作 y 的____,其中 A 叫做映射 f 的定义域,由所有象 $f(x)$ 构成的集合叫做映射 f 的值域.

(2)一一映射

如果映射 f 是集合 A 到集合 B 的映射,并且对于集合 B 中的任一元素,在集合 A 中都________原象,把这个映射叫做从集合 A 到集合 B 的一一映射.

4.函数的表示方法

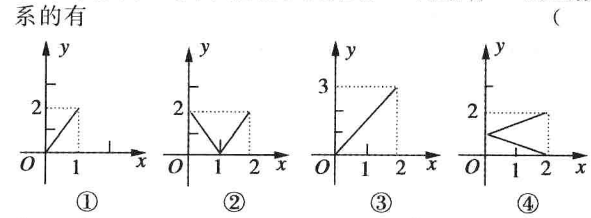
表示函数的常用方法有:______、______、______.

5.分段函数

在函数的定义域内,对于自变量 x 的不同取值区间,有着不同的对应法则,这样的函数通常叫做分段函数.

基础自测

1. 设 $M=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$,$N=\{y|0\leqslant y\leqslant 3\}$,给出下列四个图形(如图所示),其中能表示从集合 M 到集合 N 的函数关系的有　(　　)



A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 3个

2. 已知 $f(x)=\pi(x\in\mathbf{R})$,则 $f(\pi^2)$等于　(　　)

A. π^2　　B. π

C. $\sqrt{\pi}$　　D. 不确定

3. 函数 $y=f(x)$的图象与直线 $x=a$ 在同一坐标系下的交点个数为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 0　　D. 0或1均有可能

4. (2010年湖北黄冈)设集合 $M=\{a,b,c\}$,$N=\{0,1\}$,映射 $f:M\rightarrow N$ 满足 $f(a)+f(b)=f(c)$,则映射 $f:M\rightarrow N$ 的个数为________.

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\leqslant -1)\\ 2x & (-1<x<2)\\ \dfrac{x^2}{2} & (x\geqslant 2)\end{cases}$,则 $f[f(-\dfrac{7}{4})]=$________.

典例剖析

题型 1 函数与映射的概念

例1 (1)下列四组函数中,表示同一函数的一组是　(　　)

A. $f(x)=2^{\log_2(x+1)}$和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

B. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$和 $g(x)=\log_3 3^x$

C. $f(x)=(\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}})^2$ 和 $g(x)=e^{\ln(x+1)}$

D. $f(x)=(\sqrt{x})^2$ 和 $g(x)=a^{\log_a x}(a>0$ 且 $a\neq 1)$

[思维点拨]　判断两函数 $y=f(x)$和 $y=g(x)$是否为同一函数的依据是:定义域与对应法则是否相同.若有一方面不同,则它们不是同一函数.

(2)已知集合 $M=\{-1,1,2,4\}$,$N=\{0,1,2\}$,给出下列四个对应关系:① $y=x^2$,② $y=x+1$,③ $y=2^x$,④ $y=\log_2|x|$,其中能构成从 M 到 N 的映射的是　(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

变式训练

1. (1)下列各组函数中,表示同一函数的是　(　　)

A. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$,$g(x)=x+2$

B. $f(x)=\sqrt{x^2}$,$g(x)=(\sqrt{x})^2$

C. $f(x)=x^2-2x-1$,$g(t)=t^2-2t-1$

D. $f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}$,$g(x)=\sqrt{x^2-1}$

(2)已知 $A=\{1,2,3,k\}$,$B=\{4,7,a^4,a^2+3a\}$,$a\in N^*$,$k\in N^*$,$x\in A$,$y\in B$,$f:x\to y=3x+1$ 是从定义域 A 到值域 B 的一个函数,求 a、k、A、B.

题型 2 求函数的定义域

例 2 (1)求函数 $f(x)=\dfrac{\lg(x^2-2x)}{\sqrt{9-x^2}}$ 的定义域;

(2)已知函数 $f(2^x)$ 的定义域是$[-1,1]$,求 $f(\log_2 x)$ 的定义域.

[思维点拨] (1)有解析式的定义域:只需要使解析式有意义,列不等式组求解.

(2)抽象函数中 $f(2^x)$ 与 $f(\log_2 x)$ 中的 2^x 与 $\log_2 x$ 的含义相同,即 2^x 的值域即为 $\log_2 x$ 的值域.

变式训练

2. (1)求下列函数的定义域:

$y=\sqrt{x+1}+\dfrac{(x-1)^0}{\lg(2-x)}$;

(2)已知函数 $y=f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时,求函数 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.

题型 3 求函数的解析式

例 3 (1)$f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,求 $f(x)$.

(2)已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$,$f(x+1)-f(x)=2x$,试求 $f(x)$ 的解析式.

(3)已知 $f(x)$ 满足 $2f(x)+f(\dfrac{1}{x})=3x$,求 $f(x)$.

[思维点拨] (1)对$\sqrt{x}+1$ 换元.

(2)利用二次函数的表达式.

(3)把 x 换成$\dfrac{1}{x}$.

变式训练

3. (1)已知 $f(x+\dfrac{1}{x})=x^3+\dfrac{1}{x^3}$,求 $f(x)$;

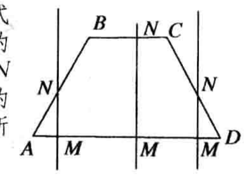
(2)已知 $f(\dfrac{2}{x}+1)=\lg x$,求 $f(x)$;

(3)已知 $f(x)$ 是一次函数,且满足 $3f(x+1)-2f(x-1)=2x+17$,求 $f(x)$.

题型 4 应用型问题

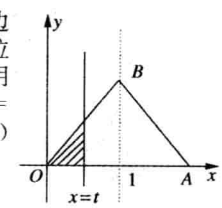
例 4 等腰梯形 $ABCD$ 的两底分别为 $AD=2a$,$BC=a$,$\angle BAD=45°$,作直线 $MN\perp AD$ 交 AD 于 M,交折线 $ABCD$ 于 N,记 $AM=x$,试将梯形 $ABCD$ 位于直线 MN 左侧的面积 y 表示为 x 的函数,并写出函数的定义域.

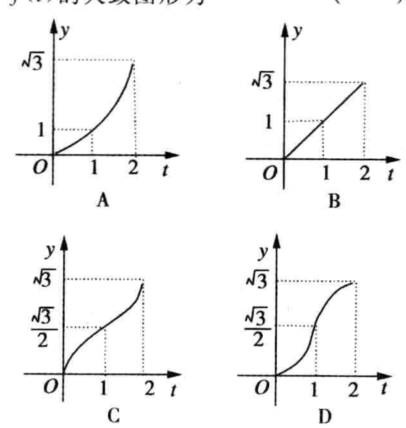
[思维点拨] 要求函数的表达式 $y=f(x)$,就需准确揭示 x、y 之间的变化关系,依题意,可知随着直线 MN 的移动,点 N 分别落在梯形 $ABCD$ 的 AB、BC 及 CD 边上,有三种情况,所以需要分类解答.



变式训练

4. 如图所示,$\triangle OAB$ 是边长为 2 的等边三角形,直线 $x=t$ 截这个三角形位于此直线左方的图形面积(见图中阴影部分)为 y.在下列图形中函数 $y=f(t)$ 的大致图形为 ( )





高考驿站

方法归纳

1. 函数的定义中最重要的是定义域和对应法则,值域是由定义域和对应法则确定的.在求 $f[f(x)]$类型的值时,应遵循先内后外的原则.

2. 判断两个函数是否为相同的函数,抓住两点:①定义域是否相同;②对应法则即解析式是否相同.注意:解析式可以化简.

3. 判断对应是否为映射,即看 A 中元素是否满足"每元有象"和"且象惟一";要注意:①A 中不同元素可有相同的象,即允许多对一,但不允许一对多;②B 中元素可无原象,即 B 中元素可有剩余.

4. 若已知 $f[g(x)]$的定义域为 $x\in(a,b)$,求 $f(x)$的定义域,其方法是:利用 $a<x<b$,求得 $g(x)$的范围,$g(x)$的范围即是 $f(x)$的定义域;若已知 $f(x)$的定义域为 $x\in(a,b)$,求 $f[g(x)]$的定义域,其方法为,由 $a<g(x)<b$ 求得 x 的范围,即为 $f[g(x)]$的定义域.

5. 求函数解析式的方法通常有:待定系数法、换元法、配凑法、相连法、赋值法等.

高考解题示范

1. (2009 山东)定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=$

$\begin{cases}\log_2(4-x), x\leqslant 0\\ f(x-1)-f(x-2), x>0\end{cases}$，则 $f(3)$ 的值为　（　　）

A. -1　　B. -2

C. 1　　D. 2

［解析］ $\because x>0$ 时，$f(x)=f(x-1)-f(x-2)$，

$\therefore f(3)=f(2)-f(1)=f(1)-f(0)-f(1)=-f(0)=-\log_2(4-0)=-2$. 故选 B.

［答案］ B

2. (2008 山东烟台)函数 $f(x)=\sqrt{(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6}$.

(1)若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,1]$，求实数 a 的值.

［解析］ (1)①若 $1-a^2=0$，即 $a=\pm1$，

(ⅰ)若 $a=1$ 时，$f(x)=\sqrt{6}$，定义域为 $\mathbf{R}$，符合题意；

(ⅱ)当 $a=-1$ 时，$f(x)=\sqrt{6x+6}$，定义域为 $[-1,1+\infty)$，不合题意.

②若 $1-a^2\neq0$，则 $g(x)=(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6$ 为二次函数. 由题意知 $g(x)\geqslant0$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立.

$\therefore\begin{cases}1-a^2>0,\\ \Delta\leqslant0,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}-1<a<1,\\ (a-1)(11a+5)\leqslant0,\end{cases}$

$\therefore -\frac{5}{11}\leqslant a<1$. 由①②可得 $-\frac{5}{11}\leqslant a\leqslant1$.

(2)由题意知，不等式 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6\geqslant0$ 的解集为 $[-2,1]$，显然 $1-a^2\neq0$ 且 $-2,1$ 是方程 $(1-a^2)x^2+3(1-a)x+6=0$ 的两个根.

$\therefore\begin{cases}1-a^2<0,\\ -2+1=\frac{3(1-a)}{a^2-1},\\ -2=\frac{6}{1-a^2},\end{cases}\therefore\begin{cases}a<-1 \text{ 或 } a>1,\\ a=2,\\ a=\pm2.\end{cases}\quad\therefore a=2.$

温馨提示

一节课学习完了，所有的知识您都掌握了吗？为了方便您的学习，课时作业单独成册，快乐考生提醒您注意完成“**课时作业 5**”。

相信您的收获一定不小！

§2.2 函数的定义域、值域

自学导航

要点梳理

1. 函数定义域的定义：使函数 $y=f(x)$ 有意义的__________叫做函数 $y=f(x)$ 的定义域.

2. 常见基本初等函数的定义域：

(1)分式函数：分母不等于零；

(2)偶次根式函数：被开方数大于等于零；

(3)多项式型函数：定义域为实数集；

(4)指数型函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，定义域为______；

(5)对数型函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$，定义域为______；

(6) $y=\sin x, y=\cos x$ 的定义域为_____；

(7) $y=\tan x$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z\}$.

(8)函数 $f(x)=x^0$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq0\}$

3. 函数的值域

在函数 $y=f(x)$ 中，与自变量 x 的值对应的 y 的值叫______，________叫函数的值域.

4. 基本初等函数的值域

① $y=kx+b(k\neq0)$ 的值域是_____.

② $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的值域是：当 $a>0$ 时，值域为____________；当 $a<0$ 时，值域为____________.

③ $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 的值域是__________.

④ $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域是______.

⑤ $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$ 的值域是_____.

⑥ $y=\sin x, y=\cos x$ 的值域是_______.

⑦ $y=\tan x$ 的值域是_____.

5. 求函数值域的常用方法

(1)配方法：若函数类型为二次函数，则采用此法求其值域，其关键在于正确配成完全平方式.

(2)换元法：常用代数或三角代换，把所给函数代换成值域容易确定的另一函数，从而求得原函数的值域. 形如 $y=ax+b\pm\sqrt{cx-d}(a,b,c,d$ 均为常数且 $a\neq0)$ 的函数常用此法求解.

(3)判别式法：若函数为分式结构，且分母中含有未知数 x^2，则常用此法. 通常去掉分母转化为关于 x 的一元二次方程，再由判别式 $\triangle\geqslant0$ 去求得 y 的范围，即原函数的值域，但应讨论分母为零时，相应的变化.

(4)不等式法：借助于重要不等式 $a+b\geqslant2\sqrt{ab}(a,b>0)$ 求函数的值域. 用不等式法求值域时，要注意均值不等式的使用条件“一正、二定、三相等”.

(5)反函数法：若原函数的值域直接不好求解，可以考虑去求反函数的定义域. 根据互为反函数的两个函数定义域与值域互换的特点，确定原函数的值域，如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq0)$ 型函数的值域，可采用反函数法，也可用分离常数法求解.

(6)单调性法：首先确定函数的定义域，然后再根据其单调性求函数值域，常用到函数 $y=x+\frac{p}{x}(p>0)$ 的单调性：增区间为 $(-\infty,-\sqrt{p}]$ 和 $[\sqrt{p},+\infty)$，减区间为 $[-\sqrt{p},0)$ 和 $(0,\sqrt{p}]$.

(7)数形结合法：分析函数解析式表示的几何意义，根据其图象特点确定函数的值域.

基础自测

1. 函数 $y=\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x}$ 的定义域为　（　　）

A. $\{x\mid x\geqslant0\}$　　B. $\{x\mid x\geqslant1\}$

C. $\{x\mid x\geqslant1\}\cup\{0\}$　　D. $\{x\mid 0\leqslant x\leqslant1\}$

2. (2009 年苏州调研)函数 $y=x^2-2x$ 的定义域是 $\{0,1,2\}$，则该函数的值域为　（　　）

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant0\}$　　D. $\{y\mid 0\leqslant y\leqslant2\}$

3. 已知函数 $f(x)=\sqrt{x^2-2x-8}$ 的定义域为 A，$g(x)=$