GAODENG SHUXUE JICHU

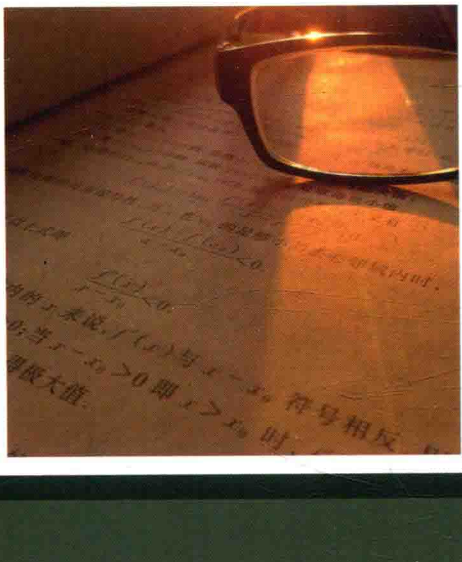
LILUN JIEXI JIQI YINGYONG YANJIU

高等数学基础

理论解析及其应用研究

主　编　齐小军　田　荣　张慧萍

副主编　杜　鹃　王　琴　李娜娜



中国水利水电出版社

www.waterpub.com.cn

高等数学基础
理论解析及其应用研究

主　编　齐小军　田　荣　张慧萍
副主编　杜　娟　王　琴　李娜娜

中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书对高等数学基础理论及其应用进行探讨，主要内容包括坐标空间与解析几何方法、函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分等。

本书结构严谨、概念准确、深入浅出、可读性强，适用于一般理工科、经济、管理等各专业学习者及数学爱好者使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学基础理论解析及其应用研究 / 齐小军，田荣，张慧萍主编. -- 北京 : 中国水利水电出版社，2016.2

ISBN 978-7-5170-4043-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①齐… ②田… ③张… Ⅲ. ①高等数学—研究 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第019517号

策划编辑：杨庆川　责任编辑：陈　洁　封面设计：崔　蕾

书　　名	高等数学基础理论解析及其应用研究
作　　者	主　编　齐小军　田　荣　张慧萍 副主编　杜　娟　王　琴　李娜娜
出版发行	中国水利水电出版社 （北京市海淀区玉渊潭南路　号D座 100038） 网址：www.waterpub.com.cn E-mail：mchannel@263.net（万水） sales@waterpub.com.cn 电话：(010)68367658（发行部）、82562819（万水）
经　　售	北京科水图书销售中心（零售） 电话：(010)88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排　　版	北京厚诚则铭印刷科技有限公司
印　　刷	三河市佳星印装有限公司
规　　格	184mm×260mm　16开本　26印张　665千字
版　　次	2016年2月第1版　2016年2月第1次印刷
印　　数	0001—2000册
定　　价	89.00元

凡购买我社图书，如有缺页、倒页、脱页的，本社发行部负责调换

前　言

数学是研究客观世界数量关系和空间形式的科学，伴随着人类文明不断发展而创新。欧拉曾这样描述数学：“数学是人类知识活动留下来最具威力的知识工具，是一些现象的根源。数学是不变的，是客观存在的，上帝必以数学法则建造宇宙。”

高等数学作为一门科学，有其固有的特点，那就是高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。高等数学是由微积分学，较深入的代数学、几何学，以及它们之间的交叉内容所形成的一门基础学科，相对于初等数学而言，高等数学的对象及方法较为复杂。

本书以微积分学和级数理论为主，其他方面的内容为辅，集严密的符号体系、独特的公式结构、形象的图像语言和精选的例题讲解于一体，并结合实际应用将高等数学知识广泛且深入地渗透到了社会科学领域，力求为广大读者所受用。

虽然本书从整体框架而言保持了高等数学的基本内容和结构，但是编者在内容编排和知识点的深度和广度上进行了思考和探索，并渗透了数学基本思想方法的实践与研究。编写本书的基本思路是：

(1)拓展应用范围；

(2)突出易用特色；

(3)压缩叙述篇幅。

本书在编写过程中，有以下特点：

第一，压缩叙述篇幅，突出易用特色。

第二，由浅入深，循序渐进。

第三，为高等数学的应用考虑，绝大多数定理给出尽可能一般的形式并有严密的证明。

第四，在遵循知识体系的基础上适当调整内容。

本书共 10 章，主要包括了坐标空间与解析几何方法、函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程、无穷级数、重积分及其应用、曲线积分与曲面积分。

在编写本书的过程中，许多同行专家与学者给予了大力的帮助，在此表示衷心的感谢；同时，编者在编写本书时也参考了大量的相关著作和文献资料，选用了所参考资料中的部分内容，在此向有关作者表示感谢。此外，出版社的工作人员为本书稿的整理打印做了许多工作，感谢你们为本书顺利问世所做的努力。

由于能力有限、经验不足、时间仓促，本书在内容的组织上难免存在错漏和不妥之处，竭诚希望各同行专家以及广大读者提出宝贵的意见和建议，以使本书不断完善。

编者

2015 年 10 月

目　录

第 1 章　坐标空间与解析几何方法

1.1　向量及其线性运算

1.1.1　向量的概念

像时间、温度、长度、面积、体积等这样的一类量，在确定了单位以后，可以用一个实数表示，这种只有大小的量称为数量．另外还有一类量，它们既有大小又有方向，例如位移、速度、加速度、力等，这一类量称为向量．向量常用黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 表示或用$\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\cdots$ 表示．

向量也可以用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$ 来表示，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向(图 1-1-1).

图 1-1-1

若两个向量大小相等、方向相同，则称这两个向量相等，例如，图 1-1-2 所示的平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. 由此规定，我们今后所说的向量均为自由向量，即可以自由平行移动的向量．

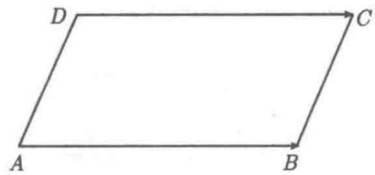


图 1-1-2

向量的大小叫做向量的模．向量$\overrightarrow{AB}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 与 $|\boldsymbol{\alpha}|$ 长度为 0 的向量称为零向量，记作 $\mathbf{0}$. 零向量的方向不确定．长度为 1 的向量称为单位向量．与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 同向的单位向量记为 $\boldsymbol{\alpha}^0$.

与 $\boldsymbol{\alpha}$ 的模相等，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$.

例 1.1.1　在平行四边形 $ABCD$ 所表示的向量中，如图 1-1-3 所示，写出其中的相等向量和相反向量．

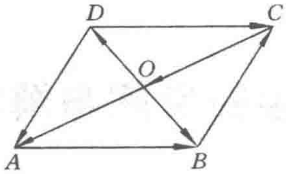


图 1-1-3

解:相等向量有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OA},$$

相反向量是

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA},\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OD}.$$

例 1.1.2 在四面体 $ABCD$ 中,M、N 分别是对棱 AC 和 BD 的中点,如图 1-1-4 所示。

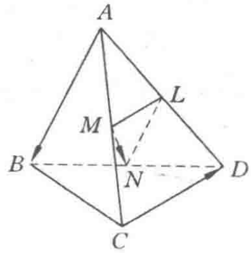


图 1-1-4

证明:AB、CD 和 MN 三个向量共面 .

证明:取 AD 的中点 L,根据 $AB \parallel LN$ 可知,$AB \parallel$ 平面 LMN.

又因为 $CD \parallel LM$,则可知 $CD \parallel$ 平面 LMN.

又因为 $MN \parallel$ 平面 LMN,所以 AB、CD 和 MN 三个向量共面 .

1.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加减法

设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$,规定 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个向量,它是以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作平行四边形 $OACB$ 后,再由点 O 与其相对的顶点 C 连成的向量,即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OC}$,如图 1-1-5 所示 . 这种方法叫平行四边形法则 . 如果两向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OA}$ 与 $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OB}$ 在同一直线上,那么规定它们的和是这样一个向量:当$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 的方向相同时,和向量的方向与原来两向量的方向相同,其长度等于两向量长度的和;当$\overrightarrow{OA}$ 与$\overrightarrow{OB}$ 的方向相反时,和向量的方向与较长的向量的方向相同,而长度等于两向量长度的差 .

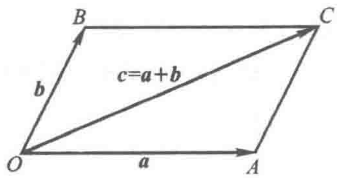


图 1-1-5

定义 1.1.1　在图 1-1-5 中，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，所以，让 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，则由 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 到 $\boldsymbol{b}$ 的终点 C 的向量 $\overrightarrow{OC}$ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的和向量，即 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，这种方法叫求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 和的三角形法则．

按定义，容易证明向量加法满足：

(1)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$（交换律）．

(2)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$（结合律）．

(3)$\boldsymbol{a}+0=\boldsymbol{a}$.

由于向量加法满足结合律，多个向量相加，不必加括弧指明相加的次序．求多个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 之和时，只要让前一向量的终点作为次一向量的起点，则 $\boldsymbol{a}_1$ 的起点与 $\boldsymbol{a}_n$ 的终点相连并指向后者的向量等于 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$. $n=3$ 的例子如图 1-1-6 所示．与向量 $\boldsymbol{b}$ 的长度相等而方向与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相反的向量称为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，记为 $-\boldsymbol{b}$. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和向量定义为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（图 1-1-7）．

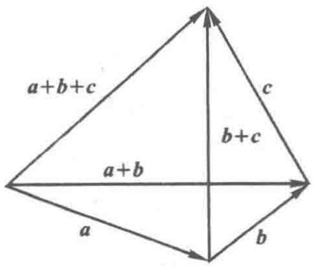


图 1-1-6

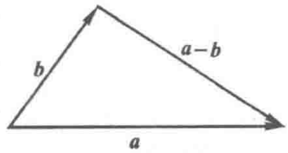


图 1-1-7

向量加法还满足：

(4)$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

例 1.1.3　在平行四边形 $ABCD$ 中，设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$ 为平行四边形对角线的交点，如图 1-1-8 所示，试用向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 表示 $\overrightarrow{MA}$，$\overrightarrow{MB}$，$\overrightarrow{MD}$ 和 $\overrightarrow{MC}$.

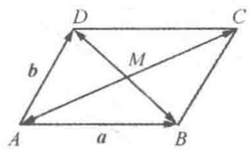


图 1-1-8

解：因为平行四边形的对角线相互平分，所以有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM},$$

即有

$$-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{MA}.$$

因此

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

由于

$$\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA},$$

那么有

$$\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

又因为

$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MD},$$

所以

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}),$$

因为

$$\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD},$$

所以得

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}).$$

2. 向量与数的乘法

为了表示几何向量的"伸缩",我们定义实数与向量的乘法(简称数乘运算).

实数 k 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量,记为 $k\boldsymbol{a}$. 它的长度 $|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}|$. 它的方向:当 $k>0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 同向;当 $k<0$ 时,与 $\boldsymbol{a}$ 反向,如图 1-1-9,当 $k=0$ 时,方向不定(此时 $k\boldsymbol{a}$ 是零向量).

若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,对任意实数 k,规定 $k\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

实数与向量的数乘满足:

(1)$k(l\boldsymbol{a}) = (kl)\boldsymbol{a} = kl\boldsymbol{a}$;

(2)$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$;

(3)$(k+l)\boldsymbol{a} = k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$.

显然,只要 $\boldsymbol{a}$ 不是零向量,$\boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ 就是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量,记作 $\boldsymbol{a}^{\circ}$,于是 $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

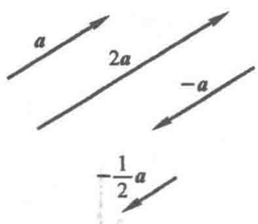


图 1-1-9

由数乘的定义可知,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是存在数 λ 使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 成比例.

向量的加法与数乘统称为向量的线性运算.

例 1.1.4 证明平行四边形的对角线互相平分.

证明:设 $ABCD$ 是一个平行四边形,如图 1-1-10 所示. 令 AC、BD 的中点分别是 E、F,则

$$2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD},$$

即

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \\ &= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) \\ &= \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2},\end{aligned}$$

于是点 E 与点 F 重合，即平行四边形的对角线互相平分．

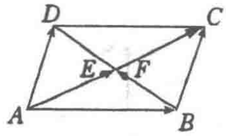


图 1-1-10

例 1.1.5　在三角形 ABC 中，D 为边 BC 的中点，如图 1-1-11 所示，证明

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

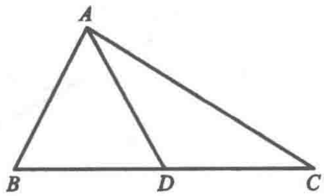


图 1-1-11

证明：根据三角形法则可得

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD},$$
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD},$$

又由于 D 为边 BC 的中点，所以 $\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{CD}$，将上述两式相加，可得

$$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC},$$

即有

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

例 1.1.6　在三角形 ABC 中，BE 为边 AC 上的中线，AD 为 BC 边上的中线，使用向量线性运算证明：

$$AM = \frac{2}{3}AD,$$

如图 1-1-12 所示．

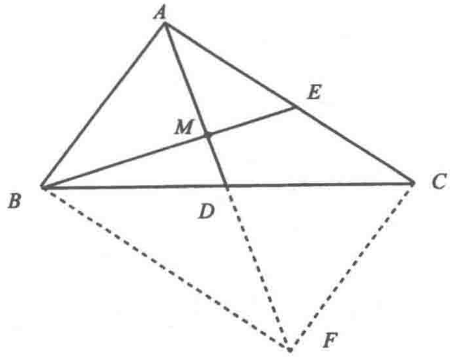


图 1-1-12

证明：由于向量$\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{AD}$在一条直线上，则设$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}$. 又因为$D$为$BC$边的中点，根据向量加法的平行四边形法则可得

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),$$

所以

$$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}x(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}).$$

同理，设$\overrightarrow{ME}=y\overrightarrow{BE}$. 因为$BE$为$AC$边上的中线，则有

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},$$

所以

$$\overrightarrow{ME}=y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right).$$

在三角形AME中，$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}=0$，即有

$$\frac{x}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+y\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=0,$$

根据向量与数的乘积性质、加法的交换律和结合律，则有

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(x+y-1)\overrightarrow{AC}=0,$$

$$\left(\frac{x}{2}-y\right)\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}(x+y-1)\overrightarrow{AC}=\gamma.$$

如果$\boldsymbol{\gamma}\neq\mathbf{0}$，那么$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$均平行于$\boldsymbol{\gamma}$，这与点$A$，$B$和$C$构成三角形相矛盾，所以$\boldsymbol{\gamma}=\mathbf{0}$. 又因为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{AC}$均为非零向量，所以有

$$\begin{cases}\dfrac{x}{2}-y=0\\[2mm]\dfrac{1}{2}(x+y-1)=0\end{cases},$$

解该方程可得

$$x=\frac{2}{3},$$

即有

$$AM = \frac{2}{3}AD.$$

例 1.1.7　设 P_1 和 P_2 为 u 轴上坐标为 u_1, u_2 的两点，又 $\boldsymbol{\xi}$ 为与 u 轴正向一致的单位向量，如图 1-1-13 所示．证明 $\overrightarrow{P_1P_2} = (u_2 - u_1)\boldsymbol{\xi}$.

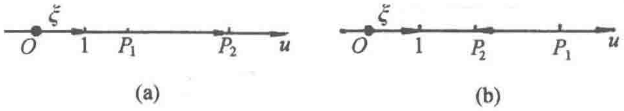


图 1-1-13

证明： 当 $u_2 - u_1 > 0$ 时，$\overrightarrow{P_2P_1}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向相同，如图 1-1-13(a) 所示．因为

$$|\overrightarrow{P_1P_2}| = (u_2 - u_1),$$

所以

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (u_2 - u_1)\boldsymbol{\xi}.$$

当 $u_2 - u_1 = 0$ 时，$\overrightarrow{P_2P_1} = 0$，又因为

$$(u_2 - u_1)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0},$$

所以

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (u_2 - u_1)\boldsymbol{\xi}.$$

当 $u_2 - u_1 < 0$ 时，$\overrightarrow{P_2P_1}$ 与 $\boldsymbol{\xi}$ 的方向相反，如图 1-1-13(b) 所示．$|\overrightarrow{P_1P_2}| = (u_1 - u_2)$. 按照数乘运算的定义可得

$$\overrightarrow{P_1P_2} = -(u_1 - u_2)\boldsymbol{\xi} = (u_2 - u_1)\boldsymbol{\xi}.$$

1.2　坐标系基础理论概述

1.2.1　空间直角坐标系

世间事物不停地运动，要描述一个物体的运动规律，必须选择某个物体或几个相对的物体作为参照物．坐标系是指描述事物运动而建立的一种参照物，是数学中探求事物运动规律的一种工具．平面或空间中运动物体所处的位置，就可分别由所对应的二个或三个数构成的有序数组所确定．最简单常用的是直角坐标系．

在平面解析几何里，我们用两条互相垂直的数轴建立了平面直角坐标系，使平面上的点与有序二维数组 (x, y) 之间建立了对应关系．类似地，我们可建立空间直角坐标系，使空间点与有序三维数组 (x, y, z) 之间建立对应关系．

定义 1.2.1　若

(1) Ox, Oy, Oz 为三条互相垂直的数轴．

(2) 三数轴原点重合，且一般三轴长度单位相同．

(3) x、y、z 轴相对位置符合右手系，如图 1-2-1 所示．

则称 $Oxyz$ 为空间直角坐标系．

三个坐标轴中每两个坐标轴可以确定一个平面，称为坐标面，即 xOy 面，yOz 面，zOx 面．三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限，空间共分为八个卦限，习惯用罗马字母 Ⅰ，Ⅱ，…，Ⅷ 来表示卦限的编号，如图 1-2-2 所示．

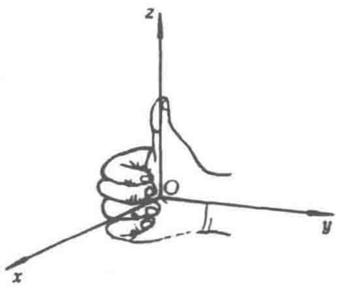


图 1-2-1

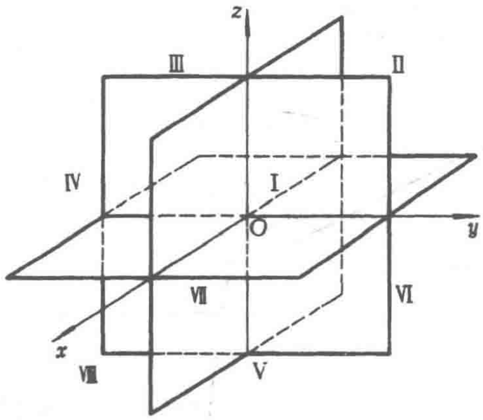


图 1-2-2

在每个卦限内，点的坐标符号是不变的，这八个卦限内点的坐标是取正还是取负有如下规律，如表 1-2-1 所示．

表 1-2-1

卦限 / 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

例如，点$(-3,2,3)$ 在第 Ⅱ 卦限，点$(-2,5,-7)$ 在第 Ⅵ 卦限．

设 M 为空间一已知点，过点 M 作分别垂直于 x，y，z 轴的三个平面（图 1-2-3），它们与 x，y，z 轴的交点依次为 P，Q，R，这三个点称为点 M 在坐标轴上的投影点，这三个点分别对应三个实

数 x,y,z. 于是空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x,y,z)；反之，已知一个有序数组 (x,y,z)，必可在 z,y,z 轴上确定三个点 P,Q,R，过 P,Q,R 分别作 x,y,z 轴的垂面，三个垂面相交必确定空间一点 M，于是一个数组对应一个空间点．这样，空间点 M 与有序数组 (x,y,z) 间，建立了一一对应的关系，有序数组 (x,y,z) 叫做点 M 的坐标，并依次称数 x,y,z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，记为 $M(x,y,z)$.

显然，$(0,0,0)$ 表示原点，$(x,y,0)$ 表示 xOy 坐标面上的点，$(x,0,0)$ 表示 x 轴上的点，…….

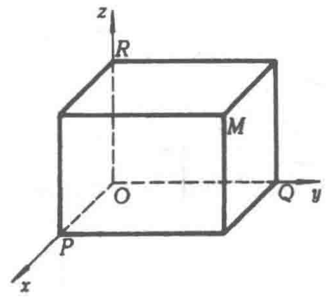


图 1-2-3

例 1.2.1　求点 (x_1,y_1,z_1) 关于(1) xOy 面；(2) z 轴；(3) 坐标原点；(4) 点 (a,b,c) 的对称点的坐标．

解：令所对称的坐标为 (x_2,y_2,z_2)，那么有

(1) $x_1=x_2,y_1=y_2,z_1+z_2=0$，则所求点的坐标为 $(x_1,y_1,-z_1)$.

(2) $x_1+x_2=0,y_1+y_2=0,z_1=z_2$，则所求点的坐标为 $(-x_1,-y_1,z_1)$.

(3) $x_1+x_2=0,y_1+y_2=0,z_1+z_2=0$，则所求点的坐标为 $(-x_1,-y_1,-z_1)$.

(4) $\dfrac{x_1+x_2}{2}=a,\dfrac{y_1+y_2}{2}=b,\dfrac{z_1+z_2}{2}=c$，则所求点的坐标为 $(1a-x_1,2b-y_1,2c-z_1)$.

1.2.2　向量的坐标表示

本节主要讨论向量在空间直角坐标系中如何用坐标表示．对空间上的点，可以用有序数组来表示，对讨论的自由向量是否也可以用有序数组来表示呢？如果可以，又怎样来表示呢？

1. 数轴上向量的坐标表示

设数轴 μ 由点 O 及单位向量 $\boldsymbol{e}$ 确定，M 为数轴上一点，坐标为 μ，如图 1-2-4 所示．点 M 对应数轴上的向量 $\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OM}\ /\!/\ \boldsymbol{e}$，由定理可知，必存在唯一实数 λ，使 $\overrightarrow{OM}=\lambda\boldsymbol{e}$.

图 1-2-4

注意到 $|\overrightarrow{OM}|=|\mu|,|\boldsymbol{e}|=1$，所以 $|\mu|=|\lambda|$.

当 M 点位于原点 O 的右边时，$\mu>0$，同时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向，$\lambda>0$，有 $\mu=\lambda$；当 M 点位于原点 O 的左边时，$\mu<0$，同时，$\overrightarrow{OM}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向，$\mu<0$，也有 $\mu=\lambda$；当 M 点与原点 O 重合时，有 $\mu=\lambda=0$.

这样恒有$\overrightarrow{OM}=\mu\boldsymbol{e}$. 这表明,数轴上以原点为起点的向量可由它的坐标与该数轴单位向量乘积表示.

2. 空间中向量的坐标表示

在空间直角坐标系中,任给向量$\boldsymbol{r}$起点是原点O,终点是$M(x,y,z)$,则$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$. 过$M$点作垂直于三个坐标面的垂面,得到一个长方体$OPNQ\text{-}RHMK$,如图1-2-5所示,有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}.$$

用$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分别表示$x$轴,$y$轴,$z$轴方向的单位向量(又称基向量). 因为

$$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i},\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j},\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k},$$

所以,

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

此式称为向量$\boldsymbol{r}$的坐标分解式,此时也称向量$\boldsymbol{r}$可由基向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$线性表示. $x\boldsymbol{i},y\boldsymbol{j},z\boldsymbol{k}$称为向量$\boldsymbol{r}$沿三个坐标轴方向的分向量. 由于向量$\boldsymbol{r}$中的三个有序数$x,y,z$,即为点$M$的三个分坐标,而空间中点$M$与其坐标$(x,y,z)$一一对应,所以空间向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$与三元有序实数组$(x,y,z)$一一对应. 因此在空间直角坐标系$Oxyz$中,我们做如下定义:有序数$x,y,z$称为向量$\boldsymbol{r}$的坐标,记作$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$或$\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$. 有时,本书向量的坐标用列矩阵表示,如$\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$. 向量$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$称为点$M$关于原点$O$的向径.

上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标,记号(x,y,z)既表示点M又表示向量$\overrightarrow{OM}$. 在运用中,应结合上下文来分清其含义.

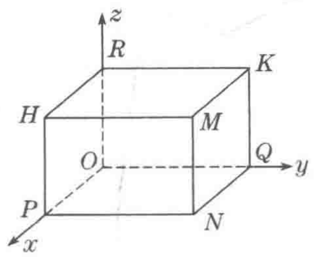


图 1-2-5

1.2.3 向量线性运算的坐标表示

利用向量的坐标,可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法的运算如下:

设空间两个向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$及实数$\lambda$,即

$$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z).$$

由向量加法的交换律与结合律,以及向量与数乘法的结合律与分配律,可得如下公式:

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

空间两个向量$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}$平行的充要条件是存在唯一实数$\lambda$使$\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,即$(a_x,a_y,a_z)=\lambda(b_x,b_y,b_z)$,也即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}=\lambda, \tag{1-2-1}$$

表明 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的对应坐标成比例．

这一向量平行的对称式条件，当分母有为零的元素时，应依如下规则来理解它的意义：

(1) 当 b_x, b_y, b_z 中仅有一个为零时，如 $b_z = 0$，则式(1-2-1)理解为

$$\begin{cases} a_z = 0 \\ a_x b_y - a_y b_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_z = 0 \\ \dfrac{a_x}{b_x} - \dfrac{a_y}{b_y} = 0 \end{cases};$$

(2) 当 b_x, b_y, b_z 中仅有两个为零时，如 $b_y = b_z = 0$，则式(1-2-1)理解为

$$\begin{cases} a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases}.$$

对空间上的两个点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$，如图 1-2-6 所示，则由

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1O} + \overrightarrow{OM_2} = -\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2},$$

易知向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示为

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

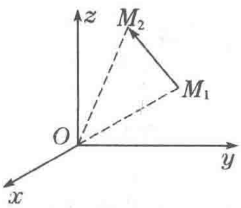


图 1-2-6

利用点的坐标可计算空间二点的距离．设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间两点，为求 M_1 到 M_2 的距离 d，以连线 M_1M_2 为对角线作一长方体(图 1-2-7)．于是

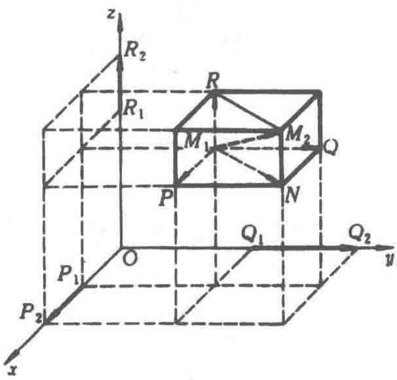


图 1-2-7

$$\begin{aligned} d^2 &= |M_1M_2|^2 \\ &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P|^2 + |M_1Q|^2 + |M_1R|^2 \\ &= |P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_2|^2 \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \end{aligned}$$