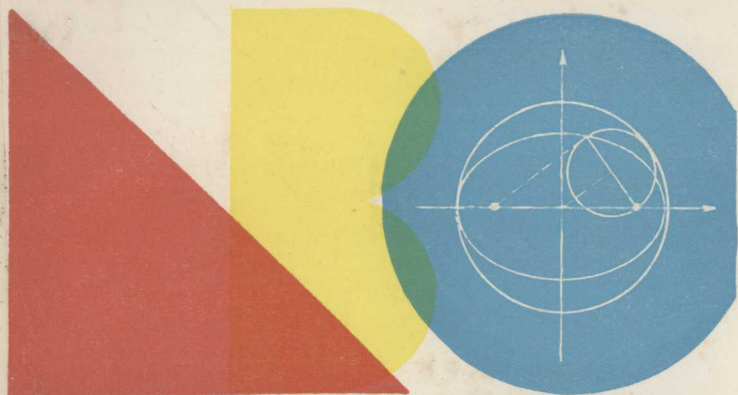




中学学科自测ABC

高中代数（二年级用）

第 二 版

华东师大二附中编

上海科学技术出版社

中学学科自测 ABC

号 851 中登报(91)

高中代数

·第二版·

(二年级用)

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社

(沪)新登字 108 号

中学学科自测 ABC

高中代数

· 第二版 · (二年级用)

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 140,000

1990 年 2 月第 1 版

1992 年 6 月第 2 版 1992 年 6 月第 9 次印刷

印数 166,501-199,500

ISBN 7-5323-2980-1/G·485

定价: 2.20 元

第二版前言

根据国家教委制订的全日制各科教学大纲和现行中学初、高中语文、英语、数学、物理、化学、生物等课本内容,结合我校各学科教师多年的教学实践,编写成这套自学参考书,全套书共 33 册。

本书中 A 级试题为学习的基本要求, B 级试题为学习的较高要求, C 级试题为学习的更高要求, 其中除已标出的有关级别外, 课堂练习、单元自测题(除打“*”试题外)均为 A 级, 单元自测题中打“*”的, 则为 B 级, 竞赛试题选为 C 级。

学生可根据本校实际情况和自己的需求, 选择相应的练习或试卷进行自我测试。

本丛书第一版于 1990 年 2 月问世, 两年来重印多次。在第二版中, 根据当前全国各地的教学实际情况及广大读者的建议, 对有关内容作了必要的修改, 特别是对 A、B、C 分级测试题作了适当的调整。

本书由李植时、陈贵瑶、李逸琪老师编写。有疏漏之处, 请读者批评指正。

华东师大二附中

1992 年 1 月

目 录

第五章 不等式	1
知识要点与学习水平	1
一、不等式的性质	2
课堂练习	2
二、不等式的证明	4
课堂练习(一)	4
课堂练习(二)	6
课堂练习(三)	9
课堂练习(四)	10
单元自测题	12
三、不等式的解法	15
课堂练习(一)	15
课堂练习(二)	18
课堂练习(三)	20
课堂练习(四)	22
单元自测题	23
四、含有绝对值的不等式	26
课堂练习	26
阶段自测试卷(一)	30
A卷(90分钟)	30
B卷(90分钟)	34
第六章 数列 极限 数学归纳法	38
知识要点与学习水平	38

一、数列	39
课堂练习(一)	39
课堂练习(二)	41
课堂练习(三)	41
课堂练习(四)	46
课堂练习(五)	51
课堂练习(六)	56
课堂练习(七)	60
单元自测题	61
二、极限	64
课堂练习(一)	64
课堂练习(二)	65
课堂练习(三)	67
单元自测题	69
三、数学归纳法	71
课堂练习(一)	71
课堂练习(二)	73
课堂练习(三)	73
课堂练习(四)	74
课堂练习(五)	74
课堂练习(六)	75
单元自测题	76
阶段自测试卷(二)	78
A 卷(90 分钟)	78
B 卷(90 分钟)	81
第七章 行列式和线性方程组	86
知识要点与学习水平	86
课堂练习(一)	87
课堂练习(二)	87

课堂练习(三)	89
阶段自测试卷(三)	91
A卷(90分钟)	91
B卷(90分钟)	93
第八章 复数	96
知识要点与学习水平	96
一、复数的概念	97
课堂练习(一)	97
课堂练习(二)	99
二、复数的运算	101
课堂练习(一)	101
课堂练习(二)	104
单元自测题	107
三、复数的三角形式	111
课堂练习(一)	111
课堂练习(二)	114
课堂练习(三)	119
单元自测题	120
阶段自测试卷(四)	125
A卷(90分钟)	125
B卷(90分钟)	128
第九章 排列与组合 二项式定理	130
知识要点与学习水平	130
一、排列与组合	131
课堂练习(一)	131
课堂练习(二)	131
课堂练习(三)	132
课堂练习(四)	134

课堂练习(五)	136
单元自测题	139
二、二项式定理	141
课堂练习(一)	141
课堂练习(二)	143
单元自测题	144
阶段自测试卷(五)	148
A 卷(90 分钟)	148
B 卷(90 分钟)	151
竞赛试题选(C 卷)	155
参考答案	168

第五章 不 等 式

知识要点与学习水平

单 元	节 次	知 识 要 点	学 习 水 平			
			识记	理解	简单应用	综合应用
一、不等式的性质	5.1 不等式	(1) 两实数大小比较法则	✓	✓		
	5.2 不等式的性质	(2) 不等式的性质定理	✓	✓	✓	
二、不等式的证明	5.3 不等式的证明	(3) 比较法		✓	✓	✓
		(4) 平均不等式	✓	✓	✓	✓
		(5) 综合法		✓	✓	✓
		(6) 分析法		✓	✓	✓
三、不等式的解法	5.4 不等式的解法	(7) 同解不等式		✓		
		(8) 一元一次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(9) 一元二次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(10) 分式不等式的解法		✓	✓	
		(11) 无理不等式的解法		✓	✓	
		(12) 指数不等式的解法		✓	✓	✓
		(13) 对数不等式的解法		✓	✓	✓
四、含有绝对值的不等式	5.5 含有绝对值的不等式	(14) 含有绝对值的不等式的性质		✓	✓	
		(15) 含有绝对值的不等式的解法与证明		✓	✓	

一、不等式的性质

课堂练习

一、选择题

1. $a, b \in R$, 下列命题正确的是().

A. 若 $|a| > b$, 则 $a^2 > b^2$; B. 若 $a > |b|$, 则 $a^2 > b^2$;

C. 若 $a \neq |b|$, 则 $a^2 \neq b^2$; D. 若 $|a| > b$, 则 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$.

2. 已知 $a < b < 0$, 下列不等式能成立的是().

A. $|a| < |b|$;

B. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

C. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$;

D. $(\sqrt{3})^a > (\sqrt{3})^b$.

3. 已知 $a, b, c, d \in R$, 则下列命题中必成立的是().

A. $a > b, c > b$, 则 $a > c$;

B. $a > -b$, 则 $c - a < c + b$;

C. $a^2 > b^2$, 则 $-a < -b$;

D. $a > b, c < d$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

4. 已知 $-1 < x < 0$, 下列不等式必成立的是().

A. $(0.2)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^x$; B. $2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0.2^x$;

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^x > 0.2^x$; D. $0.2^x > 2^x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5. 已知 $0 < a < b < 1$, 下列不等式必成立的是().

A. $\log_b a < 1$;

B. $\log_a b < 0$;

C. $\log_a b > 1$;

D. $0 < \log_a b < 1$

6. 已知 $m > n$, 则下列不等式中成立的是().

A. $\sqrt{m} > \sqrt{n}$; B. $\frac{m}{n} > 1$;

C. $\lg m > \lg n$; D. $\pi^m > \pi^n$.

7. $x \in \mathbb{R}$, 则下列不等式必不成立的是().

A. $x^3 < x^2$; B. $3^x < 2^x$;

C. $3-x < 2-x$; D. $\log_2 x < \log_3 x$.

8. 下列不成立的不等式是().

A. $a^2 \geq 0$; B. $\cos 3.2 < \cos 3.3$;

C. $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$;

D. $\arcsin(\sin 1.6) > \arcsin(\sin 1.55)$.

9. 设 x 为实数, 下列各数中恒大于 x 的数是().

A. x^2+1 ; B. $10x$; C. $\sqrt[3]{x^2+x}$; D. x^{20} .

10. 已知 $p < 0$, $-1 < q < 0$, 则 p, pq, pq^2 间的大小关系是().

A. $p > pq > pq^2$; B. $pq^2 > pq > p$;

C. $pq > p > pq^2$; D. $pq > pq^2 > p$.

二、根据条件, 判断 x, y 的符号

1. 若 $x+y > 0$, 且 $xy > 0$, 则_____.

2. 若 $x+y < 0$, 且 $xy > 0$, 则_____.

3. 若 $x > y$, 且 $xy > 0$, 则_____.

4. 若 $x > y$, 且 $xy < 0$, 则_____.

三、下列不等式正确吗? 为什么?

1. $3a > 2a$. 2. $3+a > 2+a$.

3. $3+a > 3-a$. 4. $\frac{3}{a} > \frac{2}{a}$.

四、下列命题是否正确? 它的逆命题是否成立?

1. 若 $a > b > 0$, 则 $a^2 > b^2$.

2. 若 $a < b$, 则 $a(m+2)^2 < b(m+2)^2$.

3. 若 $ka > kb > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

4. 若 $a < b < 0, c < d < 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

五、比较大小

1. 若 $m > n$, 试比较 $m^4 - m^3n$ 和 $n^3m - n^4$ 的大小.

2. 若 $x > y, n \in N$, 试判断 x^{2n+1} 与 y^{2n+1} 的大小.

3. 若 $a > 1$, 试比较 $a + \frac{a}{a+2}$ 与 $1 + \frac{a-1}{a+2}$ 的大小.

六、用不等式基本性质证明

1. 若 $a < b < 0$, 求证: $a^2b < ab^2$.

2. 若 $a > b > 0, d < c < 0$, 求证: $\frac{\sqrt{a}}{c} < \frac{\sqrt{b}}{d}$.

二、不等式的证明

课堂练习(一)

一、选择题

1. 已知 $a+b > 0, b < 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是 ().

A. $a > b > -a > -b$; B. $a > -a > b > -b$;

C. $a > -b > b > -a$; D. $-a > -b > a > b$.

2. 已知 $ab \neq 0, a, b \in R$, 则下列不等式成立的是 ().

A. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 1$; B. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \leq -2$;

C. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$; D. $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| \geq 2$.

3. 若 $a, b, c \in R$, 则 $a > b$ 是 $ac^2 > bc^2$ 的().

- A. 充分但不必要条件; B. 必要但不充分条件;
C. 充要条件; D. 既不充分也不必要条件.

4. 不等式 $a+b > 2\sqrt{ab}$ 成立的充分条件是().

- A. $a, b \in R$; B. $a, b \in R^+$;
C. $a, b \in R$, 且 $a \neq b$; D. $a, b \in R^+$, 且 $a \neq b$.

5. 设 $x, y \in R$, 且 $x+y=5$, 则 3^x+3^y 的最小值为

- A. 10; B. $6\sqrt{3}$;
C. $4\sqrt{6}$; D. $18\sqrt{3}$.

6. 已知函数: (1) $y_1 = x + \frac{4}{x}$ ($x \neq 0$),

(2) $y_2 = \cos x + \frac{4}{\cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$),

(3) $y_3 = \frac{1}{3} \left(x + 8x + \frac{8}{x^3} \right)$ ($x > 0$),

(4) $y = (1 + \operatorname{ctg} x) \left(\frac{1}{2} + 2 \operatorname{tg} x \right)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)

其中以 4 为最小值的函数个数是().

- A. 0; B. 1; C. 2; D. 3.

二、填空题

1. 比较三数 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 、 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ 、 $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$ 的大小, 按从小到大的顺序排列是_____.

2. 已知 $1 < x < a$, 比较 $(\log_a x)^2$ 、 $\log_a(\log_a x)$ 、 $\log_a x^2$ 的大小, 按从大到小的顺序排列是_____.

3. 如果 $0 < a < b$, $a+b=1$, 则三个数 b 、 $2ab$ 、 a^2+b^2 从大

到小排列为_____.

4. 若 $a > b > 0$, 则 $a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ 从小到大排列的顺序为_____.

5. 函数 $y = 4x^2 + 1 + 9x^{-2} (x > 0)$, 当 $x =$ _____ 时, 此函数有最 _____ 值, 等于_____.

6. 函数 $y = 2x + \frac{8}{x^2} + 3$, 当 $x =$ _____ 时, 此函数有最 _____ 值, 等于_____.

三、用比较法证明

1. 若 $a > b > c$, 则 $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} \geq \frac{4}{a-c}$.

2. 已知 $a < b < c$, 求证: $a^2b + b^2c + c^2a < ab^2 + bc^2 + ca^2$.

3. 已知 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 求证: $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4. 若 $c \geq 1$, 则 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$.

课堂练习(二)

一、填空题

1. 若 $ab=1, a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geq$ _____.

2. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $ab=1$, 则 $a+b \geq$ _____.

3. 若 $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$, 则 $ab \leq$ _____.

4. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+, a+b=1$, 则 $ab \leq$ _____.

5. 若 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, 则 $\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq$ _____.

6. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq$ _____.

7. 若 $a > 1, b > 1$, 则 $\log_a b + \log_b a \geq$ _____.

8. 若 $a, b, c \in R^+$, 则 $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq$ _____.

二、求证

1. $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2.$

2. $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}.$

三、设 a, b, c, d, m, n 为正数, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 试证:

$$\frac{a}{b} < \frac{ma+nc}{mb+nd} < \frac{c}{d}.$$

四、证明题

1. 已知 a, b, c 为不全相等的正数, 求证:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

2. 已知 a, b, c 为互不相等的正数, 求证:

$$\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} > \frac{9}{a+b+c}.$$

3. 已知 $a > b > 0$, 求证: $a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3.$

4. 已知 $a, b, c \in R^+$, 求证:

$$3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right) \geq 2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right).$$

5. 已知 $a, b \in R^+$, 求证: $a+b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}.$

6. 已知 $a, b \in R$, 求证:

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)+1 \geq \sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1}.$$

7. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 求证: $\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}.$

8. 已知 $a, b, c \in R$, 求证:

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca).$$

9. 若 $a, b \in R^+$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}$.

10. a, b 为不相等的正数, 求证:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3) > 8a^3b^3.$$

11. 已知 $a, b, c \in R$, 求证:

(1) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$.

(2) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

12. $a, b, c \in R^+$, 求证:

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq \sqrt{2}(a+b+c).$$

13. a, b 为正数, 求证: $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

14. a, b, c 为互不相等的正数, 求证:

$$\frac{b+c-a}{a} + \frac{c+a-b}{b} + \frac{a+b-c}{c} > 3.$$

15. 若 $x > y > z > 0$, 求证:

$$x-z + \frac{27}{(x+z)y-xz-y^2} \geq 9.$$

16. 已知 $0 < a < 1, 0 < b < 1, 0 < c < 1$, 求证:

$$(1-a)b, (1-b)c, (1-c)a \text{ 不能同时大于 } \frac{1}{4}.$$

五、求下列函数的最值

1. $y = 4x^2 + \frac{16}{(x^2+1)^2}$. 2. $y = \frac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$.

六、已知 $x > 0, y > 0, x^2y = 8$, 求 $2x+3y$ 的最小值.

七、在函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上, 求使 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 取最小值的

点.

八、设 $\alpha = \frac{n\pi}{2}, n \in N$, 求证:

$(\sin^2 \alpha + \sec^2 \alpha)^2 + (\cos^2 \alpha + \csc^2 \alpha)^2$ 最小值为 $\frac{25}{2}$.

九、已知直角三角形, 两条直角边之长分别为 a, b , 斜边长为 c , 斜边上的高为 h_c , 求证: $a+b < c+h_c$.

十、一个圆锥的底面半径与高都是 6 cm, 在圆锥内部有一个内接的倒置小圆锥(小圆锥的底面平行于大圆锥的底面, 小圆锥的顶点位于大圆锥的底面中心), 求小圆锥体积的最大值.

课堂练习(三)

一、证明题

1. 已知函数 $f(x) = \lg x$, 求证: 对于任意两个不等的正数 x_1, x_2 , 不等式 $f(x_1) + f(x_2) < 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立.

2. 已知 $a > 1, b > 1, c > 1$, 且 $ab = 10$, 求证:

$$\log_a c + \log_b c \geq 4 \lg c.$$

3. a, b, c 为正数, 则

$$\begin{aligned} \log_2(a+b) + \log_2(b+c) + \log_2(c+a) \\ \geq \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c + 3. \end{aligned}$$

4. 求证:

$$\frac{1}{\log_5 19} + \frac{2}{\log_3 19} + \frac{3}{\log_2 19} < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}.$$

二、证明题

1. 已知函数 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 且 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, 求证: $f(x_1) + f(x_2) > 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

2. 求证: $\log_{0.5} \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^b} \right) \leq a + b - 1$.