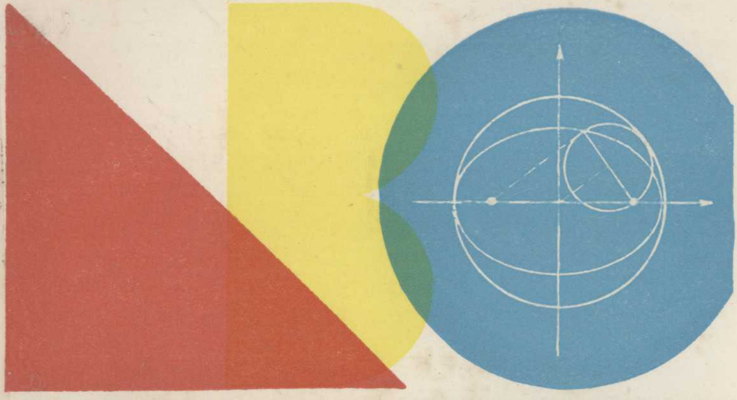

中学学科自测ABC

高中代数（二年级用）

第二版

华东师大二附中编

上海科学技术出版社

中学学科自测 ABC

高 中 代 数

·第二版·

(二年级用)

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社

(沪)新登字 108 号

中学学科自测 ABC

高 中 代 数

·第二版·(二年级用)

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海群众印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 140,000
1990 年 2 月第 1 版
1992 年 6 月第 2 版 1992 年 6 月第 9 次印刷
印数 166,501－199,500
ISBN 7-5323-2980-1/G·485
定价：2.20 元

第二版前言

根据国家教委制订的全日制各科教学大纲和现行中学初、高中语文、英语、数学、物理、化学、生物等课本内容，结合我校各学科教师多年的教学实践，编写成这套自学参考书，全套书共33册。

本书中A级试题为学习的基本要求，B级试题为学习的较高要求，C级试题为学习的更高要求，其中除已标出的有关级别外，课堂练习、单元自测题(除打"*"试题外)均为A级，单元自测题中打"*"的，则为B级，竞赛试题选为C级。

学生可根据本校实际情况和自己的需求，选择相应的练习或试卷进行自我测试。

本丛书第一版于1990年2月问世，两年来重印多次。在第二版中，根据当前全国各地的教学实际情况及广大读者的建议，对有关内容作了必要的修改，特别是对A、B、C分级测试题作了适当的调整。

本书由李植时、陈贵瑶、李逸琪老师编写。有疏漏之处，请读者批评指正。

华东师大二附中

1992年1月

目　录

第五章 不 等 式

知识要点与学习水平

单元	节次	知识要点	学习水平			
			识记	理解	简单应用	综合应用
一、不等式的性质	5.1 不等式	(1) 两实数大小比较法则	✓	✓		
	5.2 不等式的性质	(2) 不等式的性质定理	✓	✓	✓	
二、不等式的证明	5.3 不等式的证明	(3) 比较法		✓	✓	✓
		(4) 平均不等式	✓	✓	✓	✓
		(5) 综合法		✓	✓	✓
		(6) 分析法		✓	✓	✓
三、不等式的解法	5.4 不等式的解法	(7) 同解不等式		✓		
		(8) 一元一次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(9) 一元二次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(10) 分式不等式的解法		✓	✓	
		(11) 无理不等式的解法		✓	✓	
		(12) 指数不等式的解法		✓	✓	✓
		(13) 对数不等式的解法		✓	✓	✓
四、含有绝对值的不等式	5.5 含有绝对值的不等式	(14) 含有绝对值的不等式的性质		✓	✓	
		(15) 含有绝对值的不等式的解法与证明		✓	✓	

一、不等式的性质

课堂练习

一、选择题

1. a、$b\in R$,下列命题正确的是(　　).

A. 若 $|a|>b$,则 $a^2>b^2$;　B. 若 $a>|b|$,则 $a^2>b^2$;

C. 若 $a\neq|b|$,则 $a^2\neq b^2$;　D. 若 $|a|>b$,则 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$.

2. 已知 $a<b<0$,下列不等式能成立的是(　　).

A. $|a|<|b|$;　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

C. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$;　D. $(\sqrt{3})^a>(\sqrt{3})^b$.

3. 已知 $a,b,c,d\in R$,则下列命题中必成立的是(　　).

A. $a>b,c>b$,则 $a>c$;

B. $a>-b$,则 $c-a<c+b$;

C. $a^2>b^2$,则 $-a<-b$;

D. $a>b,c<d$,则 $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$.

4. 已知 $-1<x<0$,下列不等式必成立的是(　　).

A. $(0.2)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^x$;　B. $2^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x>0.2^x$,

C. $\left(\frac{1}{2}\right)^x>2^x>0.2^x$;　D. $0.2^x>2^x>\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

5. 已知 $0<a<b<1$,下列不等式必成立的是(　　).

A. $\log_b a<1$;　B. $\log_a b<0$;

C. $\log_a b>1$;　D. $0<\log_a b<1$

6．已知 $m>n$，则下列不等式中成立的是（　　）．

A．$\sqrt{m}>\sqrt{n}$；　　B．$\frac{m}{n}>1$；

C．$\lg m>\lg n$；　　D．$\pi^m>\pi^n$．

7．$x\in R$，则下列不等式必不成立的是（　　）．

A．$x^3<x^2$；　　B．$3^x<2^x$；

C．$3-x<2-x$；　　D．$\log_2 x<\log_3 x$．

8．下列不成立的不等式是（　　）．

A．$a^2\geqslant 0$；　　B．$\cos 3.2<\cos 3.3$；

C．$\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}2\sqrt{2}$；

D．$\arcsin(\sin 1.6)>\arcsin(\sin 1.55)$．

9．设 x 为实数，下列各数中恒大于 x 的数是（　　）．

A．x^2+1；　B．$10x$；　C．$\sqrt[3]{x^2+x}$；　D．x^{20}．

10．已知 $p<0$，$-1<q<0$，则 p、pq、pq^2 间的大小关系是（　　）．

A．$p>pq>pq^2$；　　B．$pq^2>pq>p$；

C．$pq>p>pq^2$；　　D．$pq>pq^2>p$．

二、根据条件，判断 x、y 的符号

1．若 $x+y>0$，且 $xy>0$，则__________．

2．若 $x+y<0$，且 $xy>0$，则__________．

3．若 $x>y$，且 $xy>0$，则__________．

4．若 $x>y$，且 $xy<0$，则__________．

三、下列不等式正确吗？为什么？

1．$3a>2a$．　　2．$3+a>2+a$．

3．$3+a>3-a$．　　4．$\frac{3}{a}>\frac{2}{a}$．

四、下列命题是否正确？它的逆命题是否成立？

1．若 $a>b>0$，则 $a^2>b^2$．

2. 若 $a<b$，则 $a(m+2)^2<b(m+2)^2$.

3. 若 $ka>kb>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

4. 若 $a<b<0, c<d<0$，则 $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$.

五、比较大小

1. 若 $m>n$，试比较 m^4-m^3n 和 n^3m-n^4 的大小.

2. 若 $x>y, n\in N$，试判断 x^{2n+1} 与 y^{2n+1} 的大小.

3. 若 $a>1$，试比较 $a+\frac{a}{a+2}$ 与 $1+\frac{a-1}{a+2}$ 的大小.

六、用不等式基本性质证明

1. 若 $a<b<0$，求证：$a^2b<ab^2$.

2. 若 $a>b>0, d<c<0$，求证：$\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

二、不等式的证明

课堂练习(一)

一、选择题

1. 已知 $a+b>0, b<0$，那么 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系是(　　).

A. $a>b>-a>-b$;　　B. $a>-a>b>-b$;

C. $a>-b>b>-a$;　　D. $-a>-b>a>b$.

2. 已知 $ab\neq 0, a, b\in R$，则下列不等式成立的是(　　).

A. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>1$;　　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\leqslant -2$;

C. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$;　　D. $\left|\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right|\geqslant 2$.

3．若 $a、b、c\in R$，则 $a>b$ 是 $ac^2>bc^2$ 的（　　）．

A．充分但不必要条件；B．必要但不充分条件；

C．充要条件；　　　　D．既不充分也不必要条件．

4．不等式 $a+b>2\sqrt{ab}$ 成立的充分条件是（　　）．

A．$a,b\in R$；　　　　B．$a,b\in R^+$；

C．$a,b\in R$，且 $a\neq b$；　D．$a,b\in R^+$，且 $a\neq b$．

5．设 $x、y\in R$，且 $x+y=5$，则 3^x+3^y 的最小值为（　　）．

A．10；　　　　B．$6\sqrt{3}$；

C．$4\sqrt{6}$；　　　D．$18\sqrt{3}$．

6．已知函数：(1) $y_1=x+\dfrac{4}{x}\ (x\neq 0)$，

(2) $y_2=\cos x+\dfrac{4}{\cos x}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，

(3) $y_3=\dfrac{1}{3}\left(x+8x+\dfrac{8}{x^3}\right)\ (x>0)$，

(4) $y=(1+\operatorname{ctg} x)\left(\dfrac{1}{2}+2\operatorname{tg} x\right)\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

其中以 4 为最小值的函数个数是（　　）．

A．0；　B．1；　C．2；　D．3．

二、填空题

1．比较三数 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$、$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$、$\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$ 的大小，按从小到大的顺序排列是______．

2．已知 $1<x<a$，比较 $(\log_a x)^2$、$\log_a(\log_a x)$、$\log_a x^2$ 的大小，按从大到小的顺序排列是______．

3．如果 $0<a<b$，$a+b=1$，则三个数 b、$2ab$、a^2+b^2 从大

到小排列为______。

4．若$a>b>0$，则a、b、$\frac{a+b}{2}$、$\sqrt{ab}$、$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$从小到大排列的顺序为______。

5．函数$y=4x^2+1+9x^{-2}(x>0)$，当$x=$______时，此函数有最______值，等于______。

6．函数$y=2x+\frac{8}{x^2}+3$，当$x=$______时，此函数有最______值，等于______。

三、用比较法证明

1．若$a>b>c$，则$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$.

2．已知$a<b<c$，求证：$a^2b+b^2c+c^2a<ab^2+bc^2+ca^2$.

3．已知$a,b\in R^+$，求证：$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

4．若$c\geqslant1$，则$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}<\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$.

课堂练习(二)

一、填空题

1．若$ab=1$，$a,b\in R$，则$a^2+b^2\geqslant$______。

2．若$a,b\in R^+$，且$ab=1$，则$a+b\geqslant$______。

3．若$a,b\in R$，$a^2+b^2=1$，则$ab\leqslant$______。

4．若$a,b\in R^+$，$a+b=1$，则$ab\leqslant$______。

5．若$a,b,c,d\in R^+$，则$\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\geqslant$______。

6．若$a,b,c\in R^+$，则$\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\geqslant$______。

7．若$a>1$，$b>1$，则$\log_a b+\log_b a\geqslant$______。

8．若 a、b、$c\in R^{+}$，则 $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geqslant$ ______．

二、求证

1．$\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}>2$．　　　2．$\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$．

三、设 a, b, c, d, m, n 为正数，且 $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$，试证：

$$\frac{a}{b}<\frac{ma+nc}{mb+nd}<\frac{c}{d}.$$

四、证明题

1．已知 a、b、c 为不全相等的正数，求证：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}.$$

2．已知 a、b、c 为互不相等的正数，求证：

$$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}>\frac{9}{a+b+c}.$$

3．已知 $a>b>0$，求证：$a+\frac{1}{(a-b)b}\geqslant 3$．

4．已知 a、b、$c\in R^{+}$，求证：

$$3\left(\frac{a+b+c}{3}-\sqrt[3]{abc}\right)\geqslant 2\left(\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\right).$$

5．已知 a、$b\in R^{+}$，求证：$a+b+\frac{1}{\sqrt{ab}}\geqslant 2\sqrt{2}$．

6．已知 a、$b\in R$，求证：

$$\frac{1}{2}(a^2+b^2)+1\geqslant\sqrt{a^2+1}\,\sqrt{b^2+1}.$$

7．已知 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$，求证：$\sqrt{x+y}\geqslant\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2}}$．

8．已知 a、b、$c\in R$，求证：

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2\geqslant3(ab+bc+ca).$$

9. 若 $a、b\in R^+$，则 $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2b}\geqslant\dfrac{2}{a+b}$.

10. $a、b$ 为不相等的正数，求证:

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3)>8a^3b^3.$$

11. 已知 $a、b、c\in R$，求证:

(1) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc(a+b+c)$.

(2) $a^2+b^2+c^2+3\geqslant2(a+b+c)$.

12. $a、b、c\in R^+$，求证:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c).$$

13. $a、b$ 为正数，求证: $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

14. $a、b、c$ 为互不相等的正数，求证:

$$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3.$$

15. 若 $x>y>z>0$，求证:

$$x-z+\frac{27}{(x+z)y-xz-y^2}\geqslant9.$$

16. 已知 $0<a<1$, $0<b<1$, $0<c<1$, 求证:

$(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$ 不能同时大于 $\dfrac{1}{4}$.

五、求下列函数的最值

1. $y=4x^2+\dfrac{16}{(x^2+1)^2}$.　　2. $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x+1}$.

六、已知 $x>0, y>0, x^2y=8$，求 $2x+3y$ 的最小值.

七、在函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象上，求使 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 取最小值的点。

八、设 $\alpha\neq\dfrac{n\pi}{2}$, $n\in N$, 求证:

$(\sin^2\alpha+\sec^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha+\csc^2\alpha)^2$ 最小值为 $\frac{25}{2}$.

九、已知直角三角形，两条直角边之长分别为 a、b，斜边长为 c，斜边上的高为 h_c，求证：$a+b<c+h_c$.

十、一个圆锥的底面半径与高都是 6 cm，在圆锥内部有一个内接的倒置小圆锥（小圆锥的底面平行于大圆锥的底面，小圆锥的顶点位于大圆锥的底面中心），求小圆锥体积的最大值.

课堂练习（三）

一、证明题

1．已知函数 $f(x)=\lg x$，求证：对于任意两个不等的正数 x_1、x_2，不等式 $f(x_1)+f(x_2)<2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ 成立.

2．已知 $a>1$, $b>1$, $c>1$，且 $ab=10$，求证：
$\log_a c+\log_b c\geqslant 4\lg c$.

3．a、b、c 为正数，则

$$\log_2(a+b)+\log_2(b+c)+\log_2(c+a)\geqslant\log_2 a+\log_2 b+\log_2 c+3.$$

4．求证：

$$\frac{1}{\log_5 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{3}{\log_2 19}<\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}.$$

二、证明题

1．已知函数 $f(x)=a^x(a>0,\ a\neq1)$，且 x_1、$x_2\in R$，$x_1\neq x_2$，求证：$f(x_1)+f(x_2)>2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

2．求证：$\log_{0.5}\left(\frac{1}{4^a}+\frac{1}{4^b}\right)\leqslant a+b-1$.