

變截面剛構分析

蔡方蔭 著

中國科學圖書儀器公司

出版

變 截 面 剛 構 分 析

蔡 方 蔭 著

中 國 科 學 圖 書 儀 器 公 司

出 版

內 容 介 紹

本書係著者根據廿餘年對於結構學之研究，參以近年實際工作之經驗編寫而成。除結合國內外專家有關變截面剛構分析方法作綜合性敘述外，更多著者創作之方法。

全書用七種不同方法表達撓曲常數，並可互相換算。關於各種楔形、加腋、階形梁柱以及桁架等之各項常數，均按角變法或 I_0/I 圖矩面積法列出公式，並說明其用法。

本書共分十二章及六個附錄，頗多一般中外文書籍中未曾述及之剛構分析方法。此外更於附錄中介紹蘇聯先進經驗中之階形梁常數表，及在風力與吊車荷載下之鉸接廠房排架分析法等，極切合實際應用。

本書各章除順序上有連貫性外，並各有相當獨立性，既便於工程師及研究生作進修之用，亦可供教學時作參攷之需。

變 截 面 剛 構 分 析

著 者 蔡 方 蔭

出版者 中國科學圖書儀器公司
印刷 上海延安中路 537 號 電話 64545

總經售 中國圖書發行公司

★ 有 版 權 ★

CE.54—0.15 16開244頁及插頁三張636千字每千冊用紙31.87令

新定價 ¥ 67,000 1954年5月初版 0001—2000

上海市書刊出版業營業許可證出零貳柒號

序

余自一九三一年返清華大學任教時起，對於含有變截面梁柱（以下統簡稱「變梁」）剛構之分析，即頗感興趣，而不時鑽研。偶有一得之愚，早已在國內外刊佈^[註1]。抗戰初期，在西南聯合大學任教，專力寫「普通結構學」，未暇旁務；中期在江西主持工學院院務，學殖多荒；末期則流離避難，寢饋不安，變梁之鑽研，久已束之高閣矣。勝利後，重拾舊業，興趣未減，偶得 I_0/I 圖矩面積法，將變梁撓曲常數之繁冗求法，簡化為曲線面積之計算，其方法亦已在國內外刊佈^[註2]。

一九五〇年冬，余來京參與中央重工業部重型廠房之設計，其所有排架，多係含有各式變梁（變截面柱受撓曲作用時，亦成為變梁）之剛構。其中普通變梁（例如二段之階形梁）之撓曲常數及抗剪勁度，雖有外文書刊圖表可查，但常感不甚精確，其特殊變梁（例如三段之階形梁）之撓曲常數，在著者當時所知之外文書中，既無圖表可查，亦無公式可用。為適應實際工作之需要，對於一般及特殊變梁之撓曲常數及抗剪勁度，必需先加以鑽研，始可達到排架的精密分析及合理的設計。

含有變梁剛構與祇含有等截面梁剛構分析法唯一不同之點，即在二者所採用之撓曲常數及抗剪勁度有所不同。剛構所含變梁之撓曲常數及變柱之抗剪勁度既求得之後，無論採用何種分析法，其步驟與祇含等截面梁之剛構者完全相同。祇含有等截面梁剛構之分析，外文書刊中所陳述之方法，不遑枚舉。近年國內所出版之書刊，如金濤、錢令希及其他諸先生之著述，均有詳賅之討論，本書原無敘述之必要。唯為便利讀者起見，本書於最後四章中，提供並推薦一般剛構分析之近似法、數解法及圖解法各一種，以備讀者於實際工作中採用。該四章中所述之剛構分析法，著者認為係比較便於實用，且其中一部分係一般中、英文專籍所未曾論及者，望讀者加以注意。

關於變梁撓曲常數及變柱抗剪勁度之討論，中外專籍，多語焉不詳，殊難滿足實際工作者之需要。本書之目的，在企圖適應此項需要，就著者學力所及，對於變梁之撓曲常數及變柱之抗剪勁度，作一最廣泛而最新穎之處理。本書除將前人對於變截面剛構分析之貢獻，作一融會貫通之解釋外，對於任何形式之變梁，提供一簡便而精確之通用解法。著者認為變截面剛構分析法之重心，在其中變梁撓曲常數及變柱抗剪勁度之計算，此項計算以角變法為其基本，而角變之計算，又以著者之 I_0/I 圖矩面積法最為簡便。因此本書對變梁撓曲常數及變柱抗剪勁度之處理，完全以角變為體，而以 I_0/I 圖矩面積法為用。二者互相

配合，相得益彰。

本書第一章之主要材料，係根據著者在清華大學任教時研究所得而加以修訂者。第二、第三及第四章之主要部分，係勝利後解放前所寫成。除第二及第三章之內容，曾前後在國內外刊佈外，第四章之內容，前此未曾發表。第五章至第九章中之材料均係最近所得。第五、第六及第八章中之各項公式，係過去兩年來，因實際工作時之需要而求得，並曾多次修訂，以求便於實用。第七章關於對稱式桁架之計算，亦係著者一得之愚。第九章主要係介紹並推廣德國工程學者伯乃希(Friedrich Bleich)氏之排架受側力及偏心力矩時柱剪力分配法。此法應用之範圍既廣泛，而步驟亦極簡明，遠勝於美國克勞斯(Hardy Cross)及顧臨特(L. E. Grinter)所建議之方法。如排架之柱係固定於基礎，而鉸接於橫梁，則此法成為排架受側力及偏心力矩時之正確分析法，與蘇聯工業建築設計院[註3]所刊佈之方法完全一致。

第十章所述無側移剛構之分析法，主要係推薦並研討我國林同棧氏於一九三四年所發表之力矩一次分配法。林氏法與歐洲所通行之定點法⁽¹⁾及近世所發明之約束法⁽²⁾等基本相同，其優點在將剛構分析中之與荷載無關及有關之二部份計算，完全分開，如是則荷載改變時，可省去其他方法所必需之許多重複計算。惟林氏根據上述原則改用力矩一次分配計算，既無須如定點法之全部或一部分採用不甚通行之圖解法，更不必如約束法之需用冗長而不易記憶之公式，其應用之便利，比較該二法遠勝一籌。著者認為林氏法為比較便於實用之剛構分析法之一，其理由即在此。

有側移剛構分析之繁難，倍蓰於無側移剛構。第十一章對於剛構之側移分析，採用疊加方法，並根據定點法之原理，利用側移桿兩端之修正傳遞係數，以計算其兩端因側移所發生之力矩，頗為新穎而且便利。

第十二章係著者抗戰前之舊作，曾在國內刊佈，並經金濤教授收入其所著之「超靜定結構解法」一書中。此文對於無側移剛構分析之圖解法，作一融會貫通之敘述，使讀者對此法可得一綜合之了解，而免翻閱若干外文書刊之勞。金教授稱「此文博大精深」，實屬過譽。此法與第十章之數解法，原理相同，彼此配合，讀者可相互參證，取數解與圖解二法之長而混合應用，因略加修訂，錄之以殿此書。

本書各章，除有順序之連貫性外，並各有相當獨立性；因此，各章內容不免有極少重複部份。讀者不必拘泥各章排列之先後次序，可以先抽閱其中若干章，似更便利。

附錄所載二種矩形截面加腋梁常數表中， I 為史氏(A. Strassner)所算得之角變係數表，公認係加腋梁常數表之原始材料；以後各表，多半由此表換算而得，其最著者即賴氏

(1) Die Methode der Festpunkte.

(2) method of restraint.

(Walter Ruppel) 所算適用於定點法之常數表,茲列為附錄 II。I 與 II 二表之排列及數學符號,均經改訂,俾便讀者之應用。附錄 III 係美國波蘭地水泥協會所算得(非由史氏之表換算而得),適用於力矩分配法之表,比較最為完備。此表經王世威同志與著者改善排列,並加增補,其篇幅既較原表減少,但其應用之範圍且較原表推廣。以上 I, II 及 III 三種矩形截面加腋梁常數表適用之範圍及常數之分際均各不同,結合本書第一章之撓曲常數換算表,所有各表可交互採用,彼此校核,並無重床疊架之病。

本書既脫稿後,偶得蘇聯斯·莫·杜賓拉(С.М. Тубина)主編之「單層廠房鋼結構」一書[註4],其中除列出二段及三段階形梁撓曲常數之公式外,並載有二段階形梁之撓曲常數表。英文書中有二段階形梁撓曲常數之曲線圖,雖應用時無須插入法,較為簡便,但其精確度則遠不及此書中之常數表。

蘇聯係以伸臂梁自由端之角變及位移為變梁之撓曲常數,與其他採用簡支梁或兩端固定梁為計算之基礎者截然不同。因此將蘇聯計算二段及三段階形梁撓曲常數之公式列入附錄 IV,俾可與本書第五章所列出之角變常數公式相比較。附錄 V 則列入蘇聯書中之二段階形梁常數表及英文書中之二段階形梁常數曲線圖。前者之應用範圍較廣,常數亦精確,後者則應用較為便利,惟數值不精確,祇可作為初步計算之用。

附錄 VI 之論文二篇係蘇聯先進分析法[註3]之解釋與推廣,曾在「工程建設」刊佈(第三十八、第四十六及第四十七三期),因可作本書第九及第十一兩章之補充材料,故附錄於此,以便利此法在我國之廣泛採用。附錄中各項常數圖表與各章中各項公式相結合,本書實係現下關於變截面剛構分析之最完備專籍,正切合我國大規模工業建設中廠房設計之需要。

本書所列之算學公式頗為繁多,著者雖屢次校核,力避訛誤,其公式亦歷經改善,務求簡明而切合實用。但其中誤算、誤抄以及誤印之處,自屬難免,尙望國內專家及本書讀者,不吝隨時指正,著者當不勝感幸。

本書之抄寫、繪圖以及校對等工作,多承祝慕高、王世威、常士驪、王世紀、馬增新、鄧傳祖諸同志於公餘之暇,代為分勞,而祝、王、常三同志費力尤多。本書付印前既承張有齡、王世威、黃輝宙三同志及上海同濟大學丁燮和教授代為分章校閱,復承陳超教授及上海中國科學公司編審處錢八傑同志將全書細校一遍多所修正。附錄 VI 之論文二篇承上海工程建設社惠允准予轉載。均此一併致謝。

蔡方蔭

一九五三年九月十七日於北京中央第二機械工業部

[註1] 見清華大學一九三三年出版之「理科報告」(甲種,英文本);前中國工程師學會一九三七年出版之「工程」期刊及美國土木工程協會一九三七年出版之年刊。

[註2] 見南昌僑中正大學土木工程學會一九四七及一九四八年出版之「正大土木」; 中國科學院一九五一年

版之[科學記錄](英文本);美國土木工程師協會一九四九年出版之[年刊]及西班牙馬德里結構工程學會一九四九年出版之活葉論文選譯 422—2 號。

【註 3】見蘇聯[單層工業房屋鋼筋混凝土柱],東北工業出版社一九五二年十月初版。

【註 4】[單層廠房鋼結構] (Стальные конструкции одноэтажных промышленных зданий),斯·莫·杜賓拉 (С.М. Тубина)主編,蘇聯重工業企業建設部技術處一九五二年出版。

校 閱 後 記

設計變截面之連續梁與剛構時，雖計算工作頗為繁重，但在實際應用時，可節省材料、增加淨空及美化外觀三點均遠非等截面者所能比擬。變截面梁之主要效能，在使負力矩增加，正力矩減小，因此跨徑中部材料可移至支點（或結點）附近，既減少恆載力矩，同時亦減低支點附近高剪力區之剪應力。

超靜定結構分析，自克勞斯力矩分配法發表後，結構學者均致力於分析方法之簡化。蔡方蔭先生對於超靜定結構學研究有素，近復以其多年心得，著成「變截面剛構分析」一書。除詳細介紹其創作 I_0/I 圖矩面積法外，更結合國內外專家之方法作一綜合敘述，並將其異同優劣，臚列說明，以資比較。

任何形式之桿件，形常數有三，其數值與荷載無關，亦即該桿件本身之性質；受荷載後另有載常數二。剛構本身則另有一套剛構常數（與荷載無關）以代表其性質；受有某一荷載時，利用此項剛構常數以計算桿端力矩，至為簡便。因此任何結構受有不同荷載時（如橋梁活載），若將剛構常數與桿端力矩分別計算，則剛構常數僅計算一次，桿端力矩於每一荷載計算一次，全部所需時間，較之合併考慮可節省甚多。

桿件之形常數與載常數，著者以角變法、撓矩面積法、定點法、角變係數法、力矩分配法、角變位移法及 I_0/I 圖矩面積法分別表達之。其中 I_0/I 圖矩面積法初視之頗覺週折複雜；但稍加研究並與任何其他方法比較，即覺其計算步驟簡單明瞭，時間節省而結果準確，且其應用範圍，並不限於截面慣矩按照一定規律而變化者。就應用而言有相似、等截面、平行軸、聯合與對稱五項理論，因此常數之計算大為簡化。常數求得之後，分析變截面剛構之方法與等截面者相同。

變截面梁或柱之常數，在實際工作中常採用圖表；但一種圖或表僅便於一種分析方法之應用，如用於另一種方法，須加以換算。附錄 I 史氏表適用於角變係數法，附錄 II 賴氏表適用於定點法，附錄 III 美國水泥協會表適用於力矩分配法。水泥協會之表，在現階段尚稱完善，數值係用積分法計算最為準確；著者刪去重複部份，另行排列增補少數數值，使總數減少，而應用範圍擴大。筆者曾以其參與設計之某連續變形梁橋之設計書核對，發現如利用著者增補之數值，則當 $r < 0.4$ 時，可採用插入法計算，且數值準確。由此可見著者之增補工作，極切合實用。

如兩端加腋變形之形式不同（如一端直線加腋，一端拋物線加腋），或梁跨上之一部份

受有勻佈荷載，則上述諸表均不能適用；著者於第三章中列一新表，並利用 I_0/I 圖矩面積法之公式以解決任何形式任何荷載。此項新表於一般情況下，著者亦已指出“其應用之範圍愈廣，則其普通簡單情形之應用，愈不及某一祇能適用於某種普通簡單情形者之便利”。對於特殊情形而論，雖不免手續週折，但較之全部另行計算，時間總可節省。

有側向變位之剛構分析，除求其桿件之形常數與載常數外，另須求其側移或抗剪勁度；書內將各式變柱及兩端各種接合情況分別計算其側移之值，詳為列表，於實際工作中可查表計算，並可依法導算，加以核對，藉增信心。有側移之分析方法，著者分別介紹側移疊加法與近似之柱剪力分配法，可相互參證。

林同棧氏力矩一次分配法之基本公式有三；如剛構接點甚多，較之克勞斯法之往復分配可予簡化。著者根據水泥協會之建議，以約束柔度係數代替林氏原法之約束勁度係數。羅素、伊文斯、息克遜諸氏之不分配直接計算法，其基本原則與林氏法完全相同，但公式冗長，應用不便，著者雖導得其主要公式，並未予以介紹。

書內附錄 IV, V(一)與 VI 介紹階形梁（變截面梁之一種）之蘇聯先進分析法與常數表；附錄 V(二)摘凌君論文中之常數圖，以供二段階形梁分析之用。

全書中關於變梁之常數以角變法之表達為體，而角變之計算，復以著者所創之 I_0/I 圖矩面積法為用，簡明便捷，最合實用。

本書可供設計工程師之應用與研究生之進修，亦可作為教學時之參考。

陳 超 一九五三年十二月

目 錄

第一章 變截面梁撓曲常數之各種表述法及其換算表1-31

1. 緒論 1
2. 變截面梁撓曲常數之各種表述法 3
3. 加腋梁及他種變截面梁之撓曲常數圖表22
4. 變截面梁各種撓曲常數之換算表30

第二章 用 I_0/I 圖矩面積法計算變截面梁之撓曲常數32-55

1. 緒論32
2. I_0/I 圖矩面積法之定義34
3. 形常數37
4. 儀常數39
5. 曲線面積計算45
6. 應用算例50

第三章 變截面梁 I_0/I 圖矩面積法之理論, 矩形截面加腋梁常數 新表及其應用56-85

1. 緒論56
2. I_0/I 圖矩面積法之理論58
3. 應用實例65
4. 矩形截面楔形梁(即加腋梁)常數新表79

第四章 楔形梁(或加腋梁) I_0/I 圖矩面積之積分式86-109

1. 緒論86
2. 矩形截面直線楔形梁86
3. 矩形截面拋物線楔形梁90
4. 矩形截面銳曲線楔形梁95
5. 綴合或工字截面楔形梁 101

第五章 階形梁之撓曲常數	110-124
1. 緒論	110
2. I_0/I 圖矩之全部面積	110
3. I_0/I 圖矩之部份面積	112
4. 角變形常數	113
5. 角變儀常數	115
第六章 楔形梁及加腋梁之撓曲常數	125-145
(甲)楔形梁之撓曲常數	125
1. 緒論	125
2. 直線楔形梁	125
3. 拋物線楔形梁	129
4. 銳曲線楔形梁	132
(乙)加腋梁之撓曲常數	137
第七章 桁架之撓曲常數	146-160
1. 緒論	146
2. 一般桁架之撓曲常數	147
3. 對稱式桁架之撓曲常數	149
4. 應用舉例	156
第八章 變截面柱之側移及抗剪勁度	161-197
1. 緒論	161
2. 一般變截面柱之側移——柱頂鉸接,柱底剛接	162
3. 一般變截面柱之側移——柱頂剛接,柱底鉸接	167
4. 一般變截面柱之側移——柱頂與柱底均剛接	172
5. 由側向反力計算柱之側移	177
6. 階形柱之側移	184
7. 等截面柱之側移	189
8. 楔形柱之側移	189
第九章 複式廠房排架在側力及力矩作用下之近似分析法—— 柱剪力分配	198-215
1. 緒論	198

2. 用聯立方程式分配柱之剪力	200
3. 剛接排架在側力及力矩作用下之近似分析法	205
4. 變截面柱排架之剪力分配	209
5. 結論	214

第十章 無側移剛構之分析——林同棧氏力矩一次分配法之推

荐及研討.....216-249

1. 緒論	216
2. <u>林氏力矩一次分配法之理論及基本公式</u>	219
3. <u>林氏法之應用及算例</u>	223
4. <u>林氏法之研討及與其他方法之關係</u>	233
5. 結論	147

第十一章 有側移剛構之分析.....250-275

1. 緒論	250
2. 側移分析之基本步驟	251
3. 側移之疊加	254
4. 側移力矩之公式	256
5. 斜桿側移之關係	261
6. 剛構因基礎沉陷及氣溫升降所發生之力矩	271

第十二章 無側移剛構分析之圖解通法.....276-309

1. 緒論	276
2. 基本彈性方程	277
3. 單跨梁之定點	278
4. 連續梁隣跨之定點	279
5. 連續梁定點之圖解法	281
6. 定點圖解之另一解釋	283
7. 剛構定點之圖解法	287
8. 祇一跨有荷載時之配點	294
9. 特點之理論	295
10. 連續梁配點之圖解法	297

11. 剛構撓矩總底線之作法	299
12. 結論	301

附 錄

I. 矩形截面加腋梁常數表(一)(角變係數法用, <u>史氏</u> 算得.)	311-319
II. 矩形截面加腋梁常數表(二)(定點法用, <u>賴白爾氏</u> 算得.)	320-334
III. 矩形截面加腋梁常數表(三)(力矩分配法用, <u>美國波地蘭水泥協會</u> 算得, <u>王世威</u> 與著者增訂.)	335-393
IV. <u>蘇聯</u> 之階形梁撓曲常數公式(<u>蘇聯重工業企業建設部技術處</u> 頒佈)	394-401
V. (一)二段階形梁之撓曲常數表(<u>蘇聯重工業企業建設部技術處</u> 頒佈)	402-430
(二)二段階形梁撓曲常數曲線圖[<u>凌君</u> (D. S. Ling)算得, 曾在 <u>美國土木工程師協會</u> 一九四七年會刊發表]	431-435
VI. (一)鉸接廠房排架在風及吊車荷載下之先進分析法—— <u>蘇聯</u> [單層工業房屋鋼筋混凝土柱]第四章之解釋與推廣(曾在[<u>工程建設</u>]第三十八期發表)	436-456
(二)剛接廠房排架在風及吊車荷載下之近似分析法—— <u>蘇聯</u> [單層工業房屋鋼筋混凝土柱]第四章之再推廣(曾在[<u>工程建設</u>]第四十六、七兩期發表)	457-476

第一章

變截面梁撓曲常數之各種

表述法及其換算表

1. 緒 論

爲節省材料起見，設計剛構中梁之截面時，在可能與合理之範圍內，常使梁之各截面盡量與沿梁長度各點之撓矩或剪力相配合，如此則沿梁之長度各點上之梁截面大小並不一致。此種梁稱爲「變截面梁」或「變慣矩梁」⁽¹⁾。爲簡便起見，本書中以下統簡稱爲「變梁」。設計有蓋板之鋼板梁時，常將其諸蓋板於不需要之處截去，使沿該板梁長度各點之慣矩分別與其所受撓矩相配合，此即變梁之最普通實例。此外於鋼筋混凝土剛構或連續構中，亦常將梁一端或二端之截面加大，而於相當距離內逐漸向梁跨中線縮小，以配合該端之較大撓矩或剪力。

變梁之截面可逐漸改變〔如圖 1-1(a)〕，或突然改變〔如圖 1-1(b)〕，亦可將逐漸改變與突然改變二法聯合採用〔如圖 1-1(c)〕。梁之截面係突然改變者，常稱爲「階形梁」⁽²⁾。梁之截面於全長中均屬逐漸改變而其改變方式無論其爲一直線〔如圖 1-1(a)〕或爲一曲線〔如圖 1-1(d)〕俱稱爲「楔形梁」⁽³⁾。梁之一端或二端係楔形，其另一端或中間一段保持

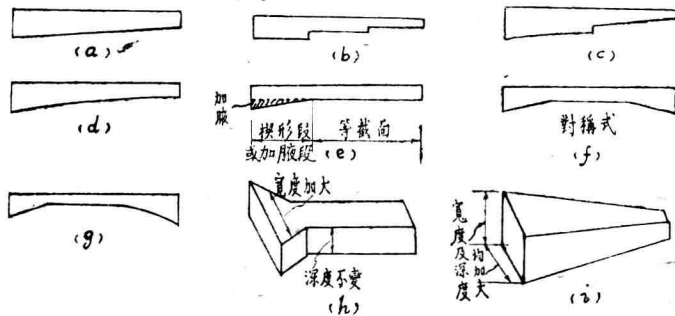


圖 1-1

(1) beam of varying sections or beam of varying moment of inertia.

(2) stepped or notched beam.

(3) tapered beam.

等截面者〔如圖 1-1(e)或(f)〕,常稱為「加腋梁」^{〔1〕}。加腋梁之兩端加腋形式及長度可以相等,成為對稱加腋梁〔如圖 1-1(f)〕;亦可不相等,成為不對稱式加腋梁〔如圖 1-1(g)〕。變梁之截面可為工字形(鋼梁多採用之),丁字形或矩形(鋼筋混凝土梁採用之)。此三種形式之截面加大時,常使其寬度不變而祇加大其深度。於丁形及矩形梁亦可使其深度不變,祇加大其寬度。〔如圖 1-1(h)〕,或將其寬度及深度均加大〔如圖 1-1(i)〕。惟寬度加大時,梁截面慣矩或其抗撓力矩之增加,遠較深度加大時之增加為小,故通常多不採用。

梁之採用階形者〔如圖 1-1(b)〕甚少。惟廠房中有較重吊車(起重量大約在 10 公噸以上)時,其支柱常係如圖 1-1(b)之階形,俾吊車大梁可支承於階上。此項階形柱在軸心力(如屋面荷載等)側力(如風力、吊車之水平推力等)及偏心力矩(由於吊車大梁之反力等)之作用下,發生相當大之撓矩。因此,此項階形柱遂兼有階形梁之作用,即通常所稱為「梁性柱」^{〔2〕}者。實際言之,於具有重大吊車之高大廠房中,階形柱之「梁」之撓矩作用「遠較其」柱之壓力作用「為大」。故名雖為階形柱而實係一階形梁。階形梁之主要實際應用即在此。

剛構或連續構之梁及柱有時係變截面者,如以二個階形柱與一屋頂桁架(桁架在撓曲作用時即係一變梁)所組成之廠房排架如圖 1-2(a),即係其最普通之例。廠房排架之梁與柱亦可採用楔形如圖 1-2(b)。最通行之剛構橋如圖 1-2(c)及含有加腋梁之樓房剛構如圖 1-2(d),均係剛構或連續構之含有變梁者之實例。

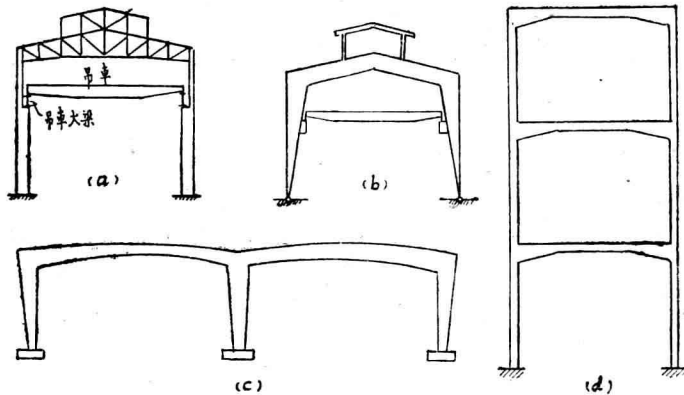


圖 1-2

著者前此(1935)即曾指出[1-130頁]〔註1〕:“無論以任何方法分析一含有變梁之連續結構,為計算簡便計,必須先將各個變截面梁及柱視作一簡支梁或固定梁而求得五個獨立的撓曲常數^{〔3〕}。此五個獨立的撓曲常數可以各種不同方式表述之,以適合任何特殊分析或計算方法”〔註2〕。此五個獨立撓曲常數中之三個,祇與變梁之形式有關而與其所承受之

〔註1〕 方括弧中之數字 1 係指參考文獻之第一種,其後之 130 係指頁數。

〔註2〕 此數語並非直譯而係將原文略加修訂,其主要意義與原文無大出入。

(1) haunched beam.

(2) beam-column.

(3) flexural constant.

荷載情形無關，故稱為「形常數」或「梁常數」⁽¹⁾。其餘二個則與變梁之形式及其所承受之荷載情形均有關，故稱為「載常數」⁽²⁾。若干連續結構之分析方法(例如力矩分配法)，需要四個形常數，但其中祇有三個為獨立的，即其中任何三個已知之後，其第四個可由其推算而得。若變梁對於跨中線成對稱式，則其形常數由三個減為二個。若變梁與其所承受之荷載對於跨中線為對稱式，則其載常數由二個減為一個。

採用任一方法分析某一含有變截面梁柱之連續結構時，於求得適用於該分析法之各變截面梁柱之撓曲常數後，其餘步驟與分析等截面連續結構者完全相同。分析連續結構時，其中各等截面梁柱之撓曲常數多係已知而不須計算。但其中各變截面梁柱之撓曲常數，必須各依其形式及荷載情形，先行計算，二者唯一不同之點在此。以下當依次說明變梁撓曲常數之七種不同表述法及其所適用之各種分析方法。

2. 變截面梁撓曲常數之各種表述法

據著者所知變梁撓曲常數之表述法，現下計有七種^[註1]，茲分別說明如下：

(一)角變法：將變梁 ab 視作一簡支梁，以一力矩 $M_a = 1$ 加於 a 端，得該梁 a 與 b 二端之角變⁽³⁾ α_a 與 β ，如圖 1-3(a)。再以一力矩 $M_b = 1$ 加於 b 端得該梁 b 與 a 二端之角變為 α_b 與 β 如圖 1-3(b)。圖(a)中 b 端之角變與圖(b)中 a 端之角變均為 β ，係根據著名之麥氏(Maxwell)變位互等⁽⁴⁾定理。此三個角變 α_a 、 α_b 及 β 即為該變梁之三個獨立形常數。再以荷載加於該變梁之上，得該梁兩端之角變為 α_a° 與 α_b° ，即該變梁之兩個獨立載常數。若變梁係對稱式，則 $\alpha_a = \alpha_b = \alpha$ ，形常數減成二個，若變梁及荷載均係對稱式，則 $\alpha_a^\circ = \alpha_b^\circ = \alpha^\circ$ ，載常數減成一個。

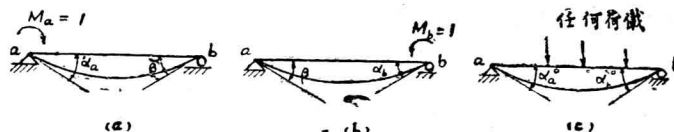


圖 1-3

於對稱式之變梁，無論其形式如何，若全跨均有勻佈荷載 w ，其載常數 α° 可由其形常數 β 推算。二者之關係如下：

用虛功⁽⁵⁾法或撓矩面積法可得：

$$\alpha^\circ = \frac{1}{EL} \int_0^L \frac{Mx}{I} dx = \frac{w}{2EL} \int_0^L \frac{x^2(L-x)}{I} dx \quad (1)$$

[註1] 此外尚有蘇聯書中所採用以伸臂梁為基礎之一種表述法，見附錄 IV，但未及列入表(1-1)中。

(1) shape or beam constant.

(2) load constant.

(3) angle change.

(4) reciprocal deflections.

(5) virtual work

$$\beta = \frac{1}{EL^2} \int_0^L \frac{x(L-x)}{I} dx \quad (2)$$

$$\text{令 } x = y + \frac{L}{2} \quad \text{則 } L - x = \frac{L}{2} - y$$

代入(1)式得：

$$\alpha^\circ = \frac{w}{2EL} \int_0^L \frac{x^2(L-x)}{I} dx = \frac{w}{2EL} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{I} \left(\frac{L^2}{4} - y^2 \right) \left(\frac{L}{2} + y \right) dy \quad (3)$$

$$\text{因對稱關係,} \quad \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{1}{I} \left(\frac{L^2}{4} - y^2 \right) y dy = 0 \quad (4)$$

$$\text{由是則得:} \quad \alpha^\circ = \frac{w}{2EL} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{L}{2I} \left(\frac{L^2}{4} - y^2 \right) dy = \frac{w}{4E} \int_0^L \frac{x(L-x)}{I} dx \quad (5)$$

以式(2)代入式(5)則得：

$$\alpha^\circ = \frac{wL^2}{4} \beta \quad (6)$$

注意上列方程(6)之關係不能適用於他種對稱式荷載情形。

此項以角變表述變梁撓曲常數之法，大約係德國工程學者所首創^[註1]。著者認為此法係各種方法中之最基本而又最巧妙便利者，其理由如下：(一)角變具有簡明而又切實之意義，(二)角變直接表示連續結構之主要變形而此項變形乃多數分析方法之根據，(三)角變係根據最簡單之簡支梁情形，(四)角變之計算最為簡明。即使分析法所需要者為他種撓曲常數，但仍以先求得角變而後換算為最便捷^[註2]，(五)於某種分析法中採用角變為撓曲常數可得異常簡單之公式，例如著者前此[3-27 頁][4-45 頁]曾用此項以角變表述之撓曲常數求得用於變梁之三力矩方程如下：

$$\beta_1 M_A + (\alpha_{b1} + \alpha_{a2}) M_B + \beta_2 M_C = -\alpha_{b1}^\circ - \alpha_{a2}^\circ \quad (7)$$

上式中之下誌符號 1 及 2 係指梁跨 1 及 2。A, B 及 C 係指相鄰之三支點。角變位移法用於含有變梁之連續結構時，亦可採用此項角變為撓曲常數，以後當詳論之。以上祇論此項角變之數值，遇有需要時，其正負號可以適當方法定之。

(二)撓矩面積法：上述角變之計算，以德國工程學者慕爾 (O. Mohr) [5-19 頁] 所創之撓矩面積法 [亦常稱為「彈性荷載」法]，最為通行，最為簡便。如圖 1-4 所示，仍將變梁視作一簡支梁，設 A_{ia} 為 a 端有一力矩 $M_a = 1$ 時 $\frac{M}{I}$ 圖之面積 (M 為梁跨上任一點之撓矩， I 為同一點梁截面之慣矩)， uL 為其形心與 a 端之距離。 A_{ib} 為 b 端有一力矩 $M_b = 1$ 時 $\frac{M}{I}$

[註 1] 著者最初見此法於史氏 (A. Strassner) 之書 [2-5 頁] 但是否係其所創未曾考證。

[註 2] 詳見後述之第七種表述法。