考研数学

24 堂课

主 编 杨超 方浩 姜晓千

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

前　　言

本书是长期在一线从事考研数学辅导的教师，为广大备战考研学生量身定做的基础复习用书。

每一届学生从备战考研的时间来说，一般分为两种：一种是启动时间比较早，在大三上学期就确定考研目标，并着手准备；一种是大三下学期才开始准备。每年的十一月份左右我们都会开设数学导学班(部分城市会开基础班)，于是就有一些问题让学生很困惑，比如：

(1)基础阶段是夯实数学基础的关键时期，可以借助本科课本来复习，但考研大纲的要求是什么？

(2)考生独立看书过程中，会遇到很多不易理解的概念、性质、定理，该怎么解决？

(3)数学离不开做题，但除了完成课本后的相关习题，还需要做哪些相应的习题？

……

在平时的教学过程中，我们一直在思考和探索：面对浩如烟海的习题、各种抽象的概念和定理，怎样在有限的时间里，让学生摆脱数学给人留下的枯燥和无聊的印象，给学生一种新的理念和思想？并让他们在这种理念下学会主动学习，感受高等数学的乐趣？掌握考试内容的精髓，做到由此及彼，举一反三？如能解决这些问题，学生不仅能学好数学，还可以提升自己的学习能力，这正是一个准研究生的基本素质。

为了实现这个目标，在多年的教学和总结的基础上，我们编写了这本《考研数学 24 堂课》。本书共 24 课，包含高等数学、线性代数、概率论与数理统计三个版块。每课分为五部分：

第一部分为知识结构网络图，清晰呈现知识脉络。

第二部分为基本内容讲解，即对考纲要求的考点进行梳理。

第三部分为重点、难点、易错点讲解，考生在学习过程中，容易由于对基本概念、定理理解得不深，逻辑推理不严密，没有理解公式的本质等原因，而出现一些典型错误，我们将其归纳和整理，以帮助学生澄清模糊概念，排除思维障碍。本部分的写作语言活泼生动，娓娓道来，例如，求极限的三种常见的方法——等价无穷小替换、洛必达法则和泰勒公式，我们分别用三种交通工具——大巴车、普通火车和高铁来形容，让学生很容易理解它们的优势与劣势。

第四部分为典型例题，详细讲解了每章内容中的典型例题的解题方法与技巧。如，第 3 课中的中值定理是高等数学的重点和难点，并且我们的例题还分基础阶段和强化阶段，学生可以

根据自己的学习情况选择在不同的阶段使用。

第五部分是真题赏析,我们选择了1987年以来的部分真题,之所以选择这么多年的真题,一是可以通过做题检查自己的学习效果,二是在做真题的过程中可以了解命题的规律。

由于编者自身水平和编写时间有限,书中不妥和疏漏之处在所难免,敬请读者批评指正。同时欢迎广大考研学子和作者交流:

新浪微博:http://weibo.com/chaoyu666(杨超 Math)

http://weibo.com/u/1848595875(晓千老师)

http://weibo.com/u/2262109970(方浩 Fellow)

作　者

2016年春于北京

目　　录

第一部分
高等数学

第1课　函数、极限与连续

知识网络结构图

- 函数、极限与连续
  - 形式
    - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
    - $\Downarrow$ 归结原则
    - 函数极限 $\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$
  - （$x\to\square$ 有 6 种形式，$x\to\infty$，$+\infty$，$-\infty$，$x\to x_0$，x_0^+，x_0^-）
  - 概念（$\varepsilon-N$，$\varepsilon-\delta$ 语言）
  - 性质
    - 唯一性
    - 局部有界性
    - 局部保号性
    - 四则运算
  - 存在准则
    - 单调有界数列有极限
    - 夹逼准则
  - $\downarrow$ 运用
  - 两个重要极限
    - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$
    - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$
  - 关系定理
    - 单侧极限与双侧极限
    - 函数极限与数列极限
    - 函数极限与无穷小
    - 无穷大与无穷小
  - 无穷小
    - 概念
    - 性质
    - 阶的比较
  - 连续
    - 定义
    - 间断点分类
      - 第Ⅰ类间断点
        - 可去
        - 跳跃
      - 第Ⅱ类间断点
        - 振荡
        - 无穷
    - 闭区间上连续函数的性质

基本内容讲解

1. 极限概念

不少考生觉得极限概念很抽象，难以理解，这是因为极限的概念本身描述的是一个动态过程，而人的认识能力倾向于静态；其次，极限是一个无穷运算，而人的习惯倾向于具体、有穷的计算.

每个极限都由四句话组成，见表 1—1—1.

表 1—1—1

记号	对 ∀ 的	总 ∃ 着	当自变量满足	恒成立	则称
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<\|x-x_0\|<\delta$	$\|f(x)-A\|<\xi$	当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x_0-x<\delta$	$\|f(x)-A\|<\xi$	$f(x)$在 x_0 的左极限为 A
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$	$\xi>0$	$\delta>0$	$0<x-x_0<\delta$	$\|f(x)-A\|<\xi$	$f(x)$在 x_0 的右极限为 A
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$\|x\|>X$	$\|f(x)-A\|<\xi$	当 $x\to\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x>X$	$\|f(x)-A\|<\xi$	当 $x\to+\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\xi>0$	$X>0$	$x<-X$	$\|f(x)-A\|<\xi$	当 $x\to-\infty$时，$f(x)$以 A 为极限
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$	$\xi>0$	自然数 N	$n>N$	$\|x_n-A\|<\xi$	当 $n\to\infty$时，x_n 以 A 为极限

2. 基本性质

(1)唯一性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)$存在，则极限唯一.

(2)局部有界性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，则存在 $\mathring{U}$，在 $\mathring{U}$ 内有界.

(3)不等式性质

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$.

①如果 $A>B$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f(x)>g(x)$；

②如果在 $\mathring{U}$ 中 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

(4)保号性

若$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A>0$，则 $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$($A<0$ 有类似结论)；或当 $x\in\mathring{U}$，$f(x)>0$，则 $A\geqslant 0$.

3. 存在准则

(1)单调有界准则

①若数列 x_n 单增且有上界(即 $x_{n+1}\geqslant x_n$，并对 ∀ n，都有 $x_n\leqslant M$)，则$\{x_n\}$收敛.

②若数列 x_n 单减且有下界(即 $x_{n+1}\leqslant x_n$,并对 $\forall n$,都有 $x_n\geqslant M$),则 x_n 收敛.

【注】以递推形式出现的数列极限问题经常用此定理证明.

(2)夹逼准则

$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\lim\limits_{x\to\square} h(x)=A$,又 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,则 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$.

(3)极限与单侧极限关系

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.

(4)数列与子数列极限的关系

数列 $\{x_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\{x_n\}$ 的任一子列 $\{x_{n_k}\}$ 收敛.

经常这样使用: $\lim\limits_{x\to\infty} x_n=a\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1}=a$.

(5)海涅定理(归结原则)

设 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在 $\Leftrightarrow$ 对任何以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ 存在.

【注】该定理常用来否定函数极限存在,若能找出 $x_n\to x_0$, $y_n\to x_0$, $f(x_n)=A$, $f(y_n)=B$,但 $A\neq B$.

例如,证明 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

【证明】取 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\pi^2\sin n\pi=0$,

取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2n+\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\pi^2\to\infty$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

4. 两个重要极限及推广

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,推广为: $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$.

② $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$,

推广为: $\lim\limits_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}$.

5. 极限的运算

(1)极限的四则运算

设 $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to\square} g(x)=B$,则

$\lim\limits_{x\to\square}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\square} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\square} g(x)=A\pm B$,

$$\lim_{x\to\square}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to\square}f(x)\cdot\lim_{x\to\square}g(x)=A\cdot B,$$

$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\square}f(x)}{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(2)复合运算(连续函数)

$\lim\limits_{x\to\square}f(g(x))=f(\lim\limits_{x\to\square}g(x))$,其中$f(x)$为连续函数.

(3)幂指函数的极限

如果$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A(A>0)$,$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$,且$A$,$B$均为有限常数,则

$$\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\left[\lim_{x\to\square}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)}=A^B.$$

【证明】 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to\square}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}[g(x)\ln f(x)]}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to\square}\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\square}g(x)\ln\left[\lim\limits_{x\to\square}f(x)\right]}=e^{B\ln A}=A^B.$$

【注】当A,B不是有限常数,或A不大于0,上述命题不成立.

切记,幂指函数求极限时,$x\to\square$是同一变化过程,不能分开来求极限.例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-(1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$.

很多同学容易犯这样的错误:因为$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=e^2$,故原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^2-e^2}{x^2}=0$,正确做法见后面例题.

6. 函数、极限、无穷小关系定理

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$$

$\alpha(x)$为$x\to\square$时的无穷小.

【注】该定理在计算有关极限题时作用很大,尤其是遇到有关抽象函数时,使用该定理,可以把抽象函数具体化.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}x_ny_n=0$,则下列说法正确的是( ).

A. 若x_n发散,则y_n必发散　　B. 若x_n无界,则y_n必有界

C. 若x_n有界,则y_n必为无穷小　　D. 若$\frac{1}{x_n}$为无穷小,则y_n必为无穷小

【解】因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,由上述定理可得$x_ny_n=0+\alpha(n)$,其中$\alpha(n)$为当$n\to\infty$时的无穷小量.故$y_n=\frac{1}{x_n}\alpha(n)$,即$y_n$为无穷小量,故选D.

7. 无穷小量、无穷大量及其阶(见表 1—1—2 和表 1—1—3)

表 1—1—2

无穷小量	$\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0$	关系	$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$
无穷大量	$\lim\limits_{x\to\square} g(x)=\infty$		$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{1}{g(x)}=0$

表 1—1—3

比值		定义	记号
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$=0$	$f(x)$是比 $g(x)$高阶无穷小	$f(x)=o[g(x)]$
	$=A\neq 0$	$f(x)$是 $g(x)$的同阶无穷小	
	$=1$	$f(x)$与 $g(x)$是等价无穷小	$f(x)\sim g(x)$
$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g^k(x)}=A\neq 0$		$f(x)$是 $g(x)$的 k 阶无穷小	$f(x)=o[g^k(x)]$

(1)无穷小量的性质

①有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量.

②有限个无穷小量的乘积仍是无穷小量.

③无穷小量与有界量的乘积仍是无穷小量.

(2)等价无穷小量的替换定理

设 $x\to x_0$ 时,$\alpha(x)$,$\beta(x)$,$\tilde{\alpha}(x)$,$\tilde{\beta}(x)$都是无穷小量,且 $\alpha(x)\sim\tilde{\alpha}(x)$,$\beta(x)\sim\tilde{\beta}(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\beta(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\tilde{\alpha}(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\tilde{\beta}(x)}f(x)$.

【注】等价无穷小量代换用在乘、除法(整个式子,而不是部分式子),加、减法中不能用等价无穷小去替换.

(3)熟记几个常见的等价无穷小公式

当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,$e^x-1\sim x$,$\ln(1+x)\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$,$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

【注】一定要把公式广义化,而且常见的变形要学会,例如,当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 0$,那么 $\ln(1+f(x))\sim f(x)$;当 $x\to 0$ 时,$f(x)\to 1$,$\ln f(x)=\ln(1+\boxed{f(x)-1})\sim\boxed{f(x)-1}$;一般来说,考题不会直接考.当 $x\to 0$ 时,$e^x-1\sim x$,经常以“$e^{f(x)}-e^{g(x)}$”形式出现,具体见后面例题讲解.

(4)无穷小阶的运算规律

设 m,n 为正整数,则

①$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^l)$,$l=\min\{m,n\}$,在极限的加减运算中,高阶无穷小被低阶无穷小所吸收,戏称"吸星大法".

②$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$,$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$.

③$m\geqslant n$,$o(x^m)/x^n=o(x^{m-n})$(注:两个 $o(\quad)$不可以相除).

④$k\cdot o(x^m)=o(kx^m)=o(x^m)$,$k\neq 0$,为常数.

重点、难点、易错点讲解

1. 几个判别函数有界和无界的结论

①连续函数在闭区间上一定有界.

②函数在开区间(a,b)内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在,则函数在区间$(a,b)$内有界.

③有界变量与无穷大量之和为无穷大量.

④两个正无穷大量之和与积均是无穷大量.

⑤函数$f(x)$在区间 I 上无界的充要条件是存在一个数列$\{x_n\}$,$x_n\in I$,使$\{f(x_n)\}$为无穷大数列.

考生自练:①$f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$在区间(　　)内有界.

A. $(-1,0)$　　B. $(0,1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(2,3)$

②当 $x\to 0$ 时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是(　　).

A. 无穷小　　B. 无穷大

C. 有界的,但不是无穷小　　D. 无界的,但不是无穷大

2. 求极限的常见错误

①求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}\right]$.

【解】原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n+n)^2}=0+0+\cdots+0=0$.

②求极限$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}$.

【解】$\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^2\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=0$.

③设 $x_n\geqslant 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

【证明】$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\sqrt{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=a=\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}$,

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

①,②,③的解法为经典的错误,错误的原因在于没有正确理解极限的四则运算法则.极限四则运算法则是针对有限项求和,而题①是无穷多项求和.②和③的错误在于使用法则的前提是$f(x)$,$g(x)$的极限存在.

3.在等价无穷小替换求极限时,要注意并不是任何两个无穷小量都可进行比较

例如,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}$时,常见错误为:

当$x\to 0$时,$\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\sim x^2\sin\dfrac{1}{x}$这个结论是不成立的.因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x^2\sin\dfrac{1}{x}}$没有意义.

在$x=0$点的任意小的去心邻域,当$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时,分母$x^2\sin\dfrac{1}{x}$能取到零值.正确解法应使用夹逼准则.因为$\left|\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)\right|\leqslant\left|x^2\sin\dfrac{1}{x}\right|\leqslant x^2$,

故$0<\left|\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2}{x}\right|=|x|\to 0$,从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0$.

4.求极限$\lim\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}$时,要注意在自变量$x$的变化过程中$f(x)$是否趋于零.若是,才有$\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$

求极限:①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$;　②$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$.

错误解法:①$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$;②$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}=3$.

①中的自变量x趋向于无穷,这时,$\dfrac{\sin x}{x}$中的x趋向于无穷而不是零,故不能使用公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

②中的自变量x趋向于π,这时,$\sin 3x$不等价于$3x$,$\tan x$也不等价于x,故不能使用

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{3x}\cdot\frac{3x}{\tan x}=1\times 3=3.$$

正确解法:

①根据无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小，知$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=0$.

②$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan x}\xlongequal{令 t=x-\pi}\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3(t+\pi)}{\tan(t+\pi)}=-\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{\tan t}=-3$.

5. 利用等价无穷小代换需要注意的问题

利用等价无穷小的性质，求下列极限：

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$； ②$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}$.

常见错误：

①当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，故$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0$.

②原极限$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}$.

错误分析：

①先证明一个命题：

若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq 1，则\ \alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'；$$

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=k\neq -1，则\ \alpha+\beta\sim\alpha'+\beta'.$$

即等价无穷小代换用在加减法时需满足的条件.

$$因为\lim\frac{\alpha'-\beta'}{\alpha-\beta}=\lim\frac{\frac{\alpha'}{\beta}-\frac{\beta'}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}=\lim\frac{\frac{\alpha'}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta'}{\beta}}{\frac{\alpha}{\beta}-1}=\frac{1\cdot k-1}{k-1}=1,$$

所以 $\alpha-\beta\sim\alpha'-\beta'$.

此题，记 $\alpha=\tan x$，$\beta=\sin x$，$\alpha'=\beta'=x$，

因为$\frac{\tan x}{\sin x}=1$，所以得不到 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x$ 等价的结论.

②当 $x\to 0$ 时，尽管无穷小 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 与无穷小 $\sqrt{1+x^2}-1$ 等价，但将式子 $\sqrt{1+x\sin x}-1$ 中的 $x\sin x$ 代换成与之等价的无穷小 x^2 却是没有定理保证的.

必须先证明结论：$\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\sqrt{1+x^2}-1$.

正确解法：

①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}$；

②$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{e^{x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x\sin x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\dfrac{1}{2}$.

6. 在同一极限下应避免分次求极限

例：求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$.

错误解法：因为$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，所以，原极限$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e}{x}=0$.

错误分析：此题中分子、分母中的 x 是同一个自变量，取极限时应属于同一极限过程，也就是说，二者是同步进行的，上述错误解法中是先求分子中的极限，然后再求分母的极限，这样就成为两个独立的过程，不是同步的.

正确解法：
$$\begin{aligned}原式&=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{e\left[e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1\right]}{x}\\&=e\lim_{x\to0}\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x}}{x}\\&=e\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{e}{2}.\end{aligned}$$

7. 洛必达法则

设①$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}\left(或\dfrac{\infty}{\infty}\right)$;

② $\exists\mathring{U}$，当 $x\in\mathring{U}$ 时，$f'(x)$，$g'(x)$都存在，且 $g'(x)\neq0$；

③$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty)$；

则$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A(或\infty)$.

考生在使用洛必达法则计算过程中，应论证是否满足洛必达法则的条件，尤其是③，在已知极限反求待定参数的题中，应该对洛必达法则$\boxed{\text{慎用}}$，仔细阅读下面两道题.

【例 1】已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x-\sin 3x}{c\cdot x^k}=1$，则 $c=$________，$k=$________.

【解】 因为
$$\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{c\cdot x^k}\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3\cos 3x}{c\cdot k\cdot x^{k-1}}$$
$$\xlongequal{洛必达}\lim_{x\to0}\frac{-3\sin x+9\sin 3x}{c\cdot k\cdot(k-1)x^{k-2}}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{-3\cos x+27\cos 3x}{c\cdot k(k-1)(k-2)x^{k-3}}=1,$$

又$\lim\limits_{x\to 0}(-3\cos x+27\cos 3x)=24$，

故$\lim\limits_{x\to 0}c\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)x^{k-3}=24$.

所以 $k-3=0$，$c\cdot k\cdot(k-1)\cdot(k-2)=24\Rightarrow k=3$，$c=4$.

【例 2】已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 $a=$________，$b=$________.

【解】 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}\xlongequal{\text{洛必达}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-a-2bx}{2x}=2, \qquad ①$$

从①式推出 $a=1$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1-2bx}{2x}=\lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{2(1+x)}-b\right]=-\frac{1}{2}-b, \qquad ②$$

因$-\dfrac{1}{2}-b=2\Rightarrow b=-\dfrac{5}{2}$.

> **【注】**例 1 使用洛必达法则是不对的. 因为法则的条件是 $\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在，才有$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，而由题中$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，推不出$\lim\dfrac{f'''(x)}{g'''(x)}=1$. 而例 2 使用洛必达法则是正确的. 与例 1 的最大区别为例 2 中的①式的极限为$-\dfrac{1}{2}-b$，即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在，于是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$，请读者好好体会.

典型例题

1. 函数极限

在讲解求函数极限的方法之前，在这提出一组概念：假未定型与真未定型.

设$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\square}g(x)=B$，则：

$$①\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{A}{B}, & A\text{ 为常数},B\text{ 为常数}\neq 0,\\ 0, & A\text{ 为常数},B=\infty,\\ \infty, & A=\infty,B=0,\\ \dfrac{0}{0}, & A=0,B=0,\\ \dfrac{\infty}{\infty}, & A=\infty,B=\infty.\end{cases}$$

$$②\lim_{x\to\square}f(x)g(x)=\begin{cases}AB, & A\text{ 为常数},B\text{ 为常数},\\ \infty, & A\text{ 为常数}\neq 0,B=\infty,\\ 0\cdot\infty, & A=0,B=\infty.\end{cases}$$

$$③\lim_{x\to\square}(f(x)-g(x))=\begin{cases}A-B, & A\text{ 为常数},B\text{ 为常数},\\ \infty, & A,B\text{ 中有一个是常数,另一个是无穷大},\\ \infty, & A,B\text{ 为异号无穷大},\\ \infty-\infty, & A,B\text{ 为同号无穷大}.\end{cases}$$

$$④\lim_{x\to\square}f(x)^{g(x)}=\begin{cases}A^B, & A\text{ 为常数}>0,B\text{ 为常数},\\ 1^\infty, & A=1,B=\infty,\\ 0^0, & A=0,B=0,\\ \infty^0, & A=\infty,B=0,\\ 0, & A=0,B=+\infty,\\ +\infty, & A=0,B=-\infty.\end{cases}$$

未定型是不符合极限运算(四则运算、复合函数、幂指函数等)的条件,故不能直接代入公式计算,但却是学习的重点,而真未定型从上述中可以看出,指的就是“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”,“$0\cdot\infty$”,“$\infty-\infty$”,“∞”,“∞^0”,“0^0”这 7 种,假未定型虽然不满足极限运算的条件,但它们的结论是确定的.

例如,$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}$不是未定型,因为$x\to\infty$时,$e^{\frac{1}{x^2}}\to 1$,因此$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$,千万不要画蛇添足为$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x}=0$.

2. 极限计算的基础题——7 种未定型

方法 1:等价无穷小代换

方法 2:洛必达法则

使用洛必达法则的注意事项:

①“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限可以直接使用法则,但并非所有的“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限都可以用法则,如$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$等,其余 5 种要转变为“$\frac{0}{0}$”,“$\frac{\infty}{\infty}$”型才可使用.

②法则使用前后要使用“等价无穷小”和“去非零因子”去化简和整理.

③条件是结论成立的充分条件,而非必要条件,即$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$不存在,不能判定$\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f(x)}{g(x)}$不存在,要改用其他方法去计算.