S H U X U E J I A N M O

面向21世纪普通高等教育规划教材

数学建模

周永正 詹棠森 方成鸿 邱望仁 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面向21世纪普通高等教育规划教材

数学建模

周永正　詹棠森
方成鸿　邱望仁　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本教材是在贯彻落实教育部《高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划》的要求精神的基础上，根据全国数学建模竞赛的最新要求，结合作者多年来从事"数学建模"课程教学与数学建模竞赛培训教学的实践体会编写而成的．本教材从体例上突出体现了数学建模理论、方法与案例并重的特点，主要内容包括线性规划模型、整数规划与动态规划模型、非线性规划模型、灰色系统模型、回归分析建模、时间序列分析方法、微分方程建模、差分方程建模、图论方法、模糊数学建模、层次分析法、函数插值建模等建模方法与理论，对每一种方法都提供了相应的建模案例分析，最后附有一些思考问题．

本教材可用作普通高等院校本、专科学生"数学建模"课程的教材，也可用作数学建模竞赛培训及研究生"数学建模"课程的教学参考书，还可供从事应用研究的工程技术人员参考．

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/周永正等编著．--上海：同济大学出版社，2010.8

面向21世纪普通高等教育规划教材

ISBN 978-7-5608-4349-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①周… Ⅲ.①数学模型—高等学校—教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第112516号

面向21世纪普通高等教育规划教材

数学建模

周永正　詹棠森　方成鸿　邱望仁　编著

责任编辑 曹　建　**助理编辑** 陈佳蔚　**责任校对** 徐春莲　**封面设计** 潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn

（地址：上海市四平路1239号　邮编：200092　电话：021-65985622）

经　销　全国各地新华书店

印　刷　同济大学印刷厂

开　本　787 mm×960 mm　1/16

印　张　24.5

印　数　1—3 100

字　数　490 000

版　次　2010年8月第1版　2010年8月第1次印刷

书　号　ISBN 978-7-5608-4349-0

定　价　46.00元

前 言

近几十年来，创新取代了传统的比较优势，已经无可替代地成为国家竞争战略的重要基础.因此，加强创新精神和创新能力的培养，是实现“科教兴国”基本国策的客观要求，创新教育已经成为高等教育的核心.十几年的教学实践雄辩地证明，数学建模的教学与竞赛活动在高等学校创新教育中具有重要的地位和作用.数学建模的教学本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和提高的过程.为了改变过去以教师为中心、以课堂讲授为主的传统教学模式，数学建模课程及培训教学的指导思想是：以实验室为基础、以学生为中心、以问题为主线、以培养能力为目标来组织教学工作.

为了更好地培养学生，让更多的学生掌握数学建模的知识和内容，尤其为普通高等学校“数学建模”课程及学生参加数学建模培训、竞赛提供一部教材或教学参考书，我们根据全国数学建模竞赛的最新要求，结合自己多年来从事“数学建模”课程教学与数学建模竞赛培训教学的实践体会编写了本教材.希望通过本教材可使学生了解利用数学理论和方法去分析和解决问题的全过程，提高他们分析问题和解决问题的能力；提高他们学习数学的兴趣和应用数学的意识与能力，使他们在以后的工作中能经常性地想到用数学思想与方法去解决问题，提高他们充分利用数学、计算机软件及当代高新科技成果的意识，能将数学、计算机有机地结合起来解决实际问题.

本教材具有很强的实用性.本书的作者中有三位教师多年来一直从事指导学生参加全国大学生数学建模竞赛的工作，多次获全国一、二等奖，他们不仅熟悉“数学模型”课程的教学及培训，而且熟悉全国数学建模竞赛，教学体会和竞赛体会都非常深刻，这些体会都较好地融入到教材内容中，非常实用，肯定会让学生受益良多.

本书全面而系统地介绍数学建模的基本理论与方法，主要内容为线性规划模型、整数规划与动态规划模型、非线性规划模型、灰色系统模型、回归分析建模、时间序列分析方法、微分方程建模、差分方程建模、图论方法、模糊数学建模、层次分析法、函数插值建模等，共分 12 章，每章编有结合实际问题的数学建模案例分析，大多数案例是我校教师与学生多年来从事教学工作的研究成果.

对于数学教育而言，既要让学生掌握准确快捷的计算方法和严密的逻辑推理，也需要培养学生用数学工具分析解决实际问题的意识和能力.但学习数学模型不能只靠书本知识的学习，而是要通过自身的实践，动手建立模型，才是学习

模型和数学建模的好方法.本教材大多数章节后都有“建模案例分析”的内容,最后还附了一些思考问题,可作为实践课题的素材.

另外,数学建模教学和竞赛的开展,对数学教学体系、内容和方法改革起了积极的推动作用,得到众多教育界人士和教师的认可.将数学建模的思想和方法有机地融入到大学数学主干课程中去的研究与实践已经起步,教数学建模课和教数学主干课的教师互相结合与交流,在教学上得以相互借鉴与促进.使数学建模的教学更有深度和广度,更好地推动其他数学类课程和其他专业课程的教学改革研究与实践.

本书第 1,2,3,4,5,6,9 章由周永正编写;第 7,8 章由方成鸿编写,第 7.5 节及第 8.5 节由周永正编写;第 10 章由邱望仁编写;第 11,12 章由詹棠森编写;思考问题由周永正、詹棠森、方成鸿编写.全书由周永正统稿.

由于编者学识水平有限,书中不当和疏漏之处在所难免,敬请各位同行和读者不吝赐教,以便再版时修改.

编　者

2010 年 6 月

目　　录

绪　论

随着计算机技术的迅猛发展,特别是计算机在高速、智能、小型、价廉四个方面的迅速发展(运算速度与智能程度为衡量计算机性能的最重要的两个指标),推动了数学应用的空前、广泛的发展,数学的应用已经渗透到从自然科学到工程技术及工农业生产,从经济活动到社会生活的各个领域.或者说各行各业日益依赖于数学,甚至可以说当今社会日益数学化,并形成了许多边缘学科,如数学化学、数学生物学、数学地质学、数学心理学、数理语言学、数学社会学等.数学已经广泛地与实际问题相结合并能发挥如此大的潜能,生活中所遇到的实际问题,几乎无一例外地要用到数学,小至芝麻小事,大至宇宙空间.马克思曾经说过:"一门科学只有成功地运用数学时,才算达到完善的地步".可以认为,数学在各门学科中被应用的水平,标志着这门学科发展的水平.一般地说,当实际问题需要我们对所研究的现实对象提供分析、预报、决策、控制等方面的定量结果时,往往都离不开数学的应用,而建立数学模型则是这个过程的关键环节.

正因如此,我国每年在全国各高校开展一次全国大学生数学建模竞赛,以提高大学生解决实际问题的能力及培养大学生的创新意识,并将竞赛时间定于每年的 9 月下旬的三天中进行.

在现实生活中,我们常常会碰到很多实际问题,而这些实际问题往往需要我们去解决,前面我们说了这些实际问题的解决几乎无一例外地要用到数学,此时常常要根据该问题所特有的内在规律,做一些必要的简化和假设,最后运用数学方法,将它归为一个数学问题.从而,数学建模简单地说便是将一个实际问题转化为数学问题的任务.

0.1　什么是数学建模

什么是数学建模?按目前国内比较流行的看法,数学建模是指对于现实世界的某一特定系统或特定问题,为了某个特定的目的做出必要的简化与假设,应用适当的数学工具得到的一个数学结构.它或者可以解释特定的现实状态,或者能预测对象的未来状况,或者能提供处理对象的最优决策或控制.

通俗地说,数学建模(Mathematical Modelling)就是用数学知识和方法建立数学模型解决实际问题的过程.

建立数学模型解决实际问题的思维方法可用图 0-1 表示.

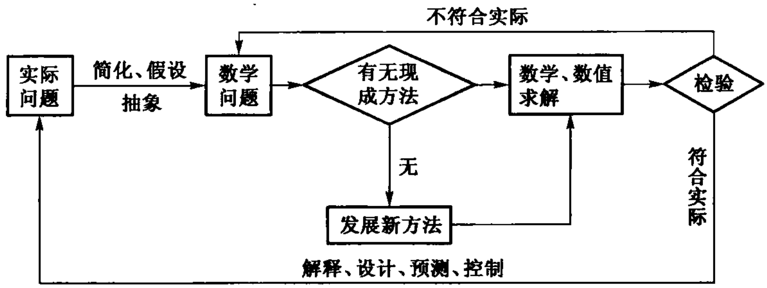

图 0－1

数学建模也就是通过对实际问题的分析、抽象和简化，明确实际问题中最重要的变量和参数，通过某些“规律”建立变量和参数间的数学模型. 再用精确的或近似的数学方法求解之，然后把得到的结果“翻译”成普通人能懂的语言，用现场实验数据或历史记录数据，或其他手段来验证结果是否符合实际，并用来解决实际问题. 这样的过程经多次执行和完善就是数学建模的全过程. 因此，可以说数学建模是用数学来解决实际问题的桥梁.

从科学、工程、经济、管理等角度看，数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具. 下面以流行病学中的一个例子(像流感、肝炎等传染病的传播规律)作一简单说明. 设发生传染病地区的总人口 N 不变，用 $x(t)$ 表示患病人数所占的百分比(因而总人口所占百分比为 1).

(1) 俗话说“一传十，十传百”就是一种简化. 设感染率为 h，则数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = hx, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad 其中\ x_0 < 1.$$

这时易见 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$，显而易见是不符合实际的.

(2) 实际情况应是未得病者会感染得病. 设感染率为 h，而得病者中由于治疗，一部分人会康复，设恢复率为 r，则得数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = h(1-x) - rx, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{h}{r+h} < 1$，至少定性地看来要合理得多. 但将这样的模型用于实际情形，就会发现仍有许多不符合的地方.

(3) 实际上应把人们分成已感染者 $i(t)$，未感染者 $s(t)$，已恢复者(包括已

死者)$r(t)$，而 $i+s+r=N$，于是可建立所谓的 SIR 模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=ksi-li, \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-ksi, \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=li \end{cases}$$

及相应的初始条件.这时人们会发现不容易求到显式解了，而其中的数学分析在一定阶段是十分重要的.

0.2　建立数学模型的方法和步骤

建立数学模型的方法可分为两大类，一类是机理分析法，一类是测试分析法.机理分析是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，建立的模型常有明确的物理或现实意义.测试分析将研究对象视为一个“黑箱”系统.内部机理无法直接寻求，可以测量系统的输入输出数据并以此为基础运用统计分析等方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型，这种方法称为系统辨识.将这两种方法结合起来应用也是常用的建模方法，即用机理分析建立模型的结构，用系统辨识确定模型的参数.

(1) 模型准备.首先要了解问题的实际背景，明确建模的目的，搜集建模必需的各种信息，如现象、数据等.尽量弄清楚对象的特征，做好建模的各项准备工作.

(2) 模型假设.根据对象的特征和建模的目的，对问题进行必要的、合理的简化，用精确的语言做出假设.一个实际问题不经过简化假设很难翻译成数学问题.即使可能，也很难求解.不同的简化假设会得到不同的模型.假设做得不合理或过分简单，会导致所建模型失败或部分失败，于是应该修改和补充假设；假设做得过分详细，试图把复杂对象的各方面因素都考虑进去，也可能使我们很难甚至无法继续下一步的工作.一般来说，做假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对数据或现象的观察与分析，也可以是二者的综合.做假设时既要应用与问题相关的物理、化学、生物、经济等有关方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力，要善于辨别问题的主次，抓住主要因素，尽量将问题线性化、均匀化.经验也常在做假设中起重要作用.

(3) 建立模型.根据所做的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量(常量和变量)之间的等式(或不等式)关系或其他数学结构.需要了解一些相关学科的专门知识与较宽广的应用数学方面的知

识，以开拓思路．一般对这些数学知识不需门门精通，只要知道这些数学知识可以解决哪一类问题及大体上如何解决问题．根据不同对象的某些相似性，应用已知领域的数学模型，也是构造模型的一种方法．建模时尽量采用简单的数学工具，因为所建立的模型总是希望有更多的人了解和使用，并便于推广．

（4）模型求解．可以采用解方程、画图形、逻辑运算、演绎推理等各种数学方法求解析解，也可以运用计算机技术、数值计算等方法求近似解．

（5）模型分析．对模型解答进行数学上的分析，有时要根据问题的性质，分析变量间的依赖关系或稳定状况，有时要根据所得结果给出数学上的预报，有时则可能要给出数学上的最优决策或控制．常常需要做误差分析、模型对数据的稳定性或灵敏性分析等．

（6）模型检验．把数学上分析的结果翻译回到实际问题，并用实际的现象、数据与之比较，检验模型的合理性和适用性．模型检验的结果如果不符合或者部分不符合实际，问题常常出现在模型假设上，应该修改、补充假设，重新建模．有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意．

（7）模型应用．应用的方式一般取决于实际问题的性质和建模的目的．用我们建立的经过充分分析与检验的模型来解决实际问题．

（8）模型推广．对经过模型分析和检验的，符合实际的数学模型，可以将其应用于实际，解决实际问题，也可以从数学等角度推广所得模型，扩大模型的应用范围．

0.3　数学建模竞赛的历史发展简介

数学建模的历史可追溯到几千年前．早在 2 000 多年前，古希腊的埃拉托色尼利用不同地点日影的不同计算了地球的半径，伊巴谷从月蚀中地球的阴影得出地球和月球的距离，这些都是他们用初等几何的方法建立起来的数学模型．17 世纪伟大的科学家牛顿在研究力学的过程中发明了近代数学最重要的成果之一——微积分，并以微积分为工具推导出了著名的万有引力定律．无论是万有引力定律，还是麦克斯韦尔的电磁场理论都是通过使用数学模型取得巨大成功的范例．进入 20 世纪以来，数学的应用不仅在它传统领域——物理领域（如力学、电学及以物理学为基础的工程学科）继续取得许多重大进展，而且迅速进入了一些新领域——非物理领域（如经济、交通、化学、生态、生物、医学、社会等），因此产生了许多边缘学科．第二次世界大战后，随着电子计算机的出现和超高速电子计算机的迅猛发展，情况发生了很大变化，数学向一切科学领域渗透．数学建模在某种意义上正迅速发展为一个独立的分支．许多数学工作者、科学家和工程师直接或间接地从事数学建模的研究与教学．各种与之相关的国际会议、期刊、教

材及课程与学位教育应运而生. 1977 年在美国召开了第一届数学及计算机建模的国际会议，以后每隔两年召开一届，1979 年创办了第一种国际性的数学建模杂志(Mathematical Modelling — An International Journal)，1988 年改名为《数学和计算机建模——国际性期刊》. 由英国泰晤士理工学院主办的《应用数学建模》和苏联科学院创办的《苏联数值分析和数学建模》也是两种在国际上有影响的数学建模方面的杂志. 与此同时，从 1983 年开始，国际上每两年举行一次旨在推动大学和中学数学建模教学的"数学建模和应用的教学国际会议"，并出版了大量为大学应用数学建模教学提供丰富素材的杂志. 目前，国际上比较著名的一套用于大学生本科教学的数学模型教材是由美国数学会等四家机构联合编写的一套四卷本的应用数学丛书《Modules in Applied Mathematics》，该丛书曾两度得到美国科学基金的资助. 国际上很多大学都为本科生开设了数学建模课程. 英国牛津大学和美国明尼达大学的数学研究所都专门设立了数学建模的博士学位，我国最早开设数学建模课程并积极倡导进行数学模型教学与研究的是清华大学的萧树铁教授. 近年来，国内已出版发行多套数学建模教材. 很多学校开设了数学模型课，并先后多次举办数学模型教学与研究讨论班. 为促进数学建模的研究与教学的进一步发展，推动数学与其他学科和工程技术的结合，从 1985 年起，由美国数学与应用协会(COMAP)主办、美国工业与应用数学学会(SIAM)、美国运筹学会(ORSA)和几所大学支持每年举办一次国际性的美国大学生数学建模竞赛(MCM). 除美国外，加拿大、中国、荷兰、英国等国的学校也相继参赛. 1985 年第一届 MCM 只有美国的 90 个队参赛. 到 1995 年，共有 9 个国家，194 所院校，320 个队参赛. 我国大学自 1989 年参加这项竞赛以来，先后有 12 个省、直辖市，37 所院校参加了这项竞赛. 1995 年就有 12 个省、直辖市的 31 所院校的 84 个队参赛，占了全部参赛队的 1/4 强. 2007 年，共有 1 222 个队参加美国大学生数学建模竞赛并提交了论文，中国有 862 个队，约占 71%. MCM 竞赛设特等奖(不奖给外国学生)、一等奖和二等奖. 竞赛的目的在于考察学生的创造性思维能力，运用数学方法解决实际问题的能力及建模分析、计算机应用和论文写作的综合能力，培养大学生坚韧不拔、奋力拼搏、团结协作的精神. 该竞赛活动举办 24 年来，日益受到国内外数学界和工程技术界的高度重视，并深受大学生们的普遍欢迎. 我国 1992 年起开始举办一年一度的全国大学生数学建模通讯竞赛，简记为 CMCM(与 MCM 完全相同). 该项竞赛活动采用通讯比赛的形式. 竞赛题均从有实际意义的课题中提炼加工而成，没有预先设定的标准答案. 每一个参赛队由 3 名在校大学生组成，配备一名指导教师或多名教师组. 竞赛时每个参赛队从两道题中任选一题，在指定的 72 h(即 3 d)内完成. 在比赛过程中可以参阅各种图书资料、网上资料、使用计算机及各种软件，但不得与队外的任何其他人讨论. 提交的论文(即答卷)应包括问题的阐述、模型假设条件、问题分析、模型设

计、求解及讨论(包括误差、稳定性、优缺点等),一般要附有计算程序和计算结果.评阅论文主要考核建立模型的方法、解决问题的思路、论述的条理性、假设是否合理、是否有创造性、结论是否正确或符合实际.2008 年全国有 31 个省、直辖市、自治区,以及香港地区的 1 023 所院校、12 846 个队(其中甲组 10 384 队、乙组 2 462 队)、38 000 多名来自各个专业的大学生参加竞赛,是历年来参赛人数较多的一次.

1 线性规划模型

1.1 引　　言

在工农业生产、交通运输、经济贸易等工作中，必须提高经济效率，做到耗费较少的人力、财力、物力，创造出更多的经济效益，提高社会生产力.

提高经济效益可以采用如下措施：一是技术上的各种改进，如工业生产上改善工艺流程，使用新的设备和新型原材料等；二是生产组织和计划的改进，即合理安排人力、物力、财力资源，合理组织生产过程，在条件不变的情况下，统筹安排，使总的经济效益达到最高. 后者就是运筹学研究的主要内容. 线性规划是运筹学的重要分支，早在 20 世纪 30 年代末就有人从运输问题开始研究. 线性规划研究的问题主要有两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，尽可能做到用最少的人力、物力资源去完成这一任务；二是利用已有的人力、物力资源，如何合理使用它们，使得完成任务最多. 实际上，两个问题都是寻求整个问题的某个整体指标最优的方案.

线性规划的应用很广泛，如运输问题、生产的组织与计划问题、合理下料问题、配料问题、布局问题等. 数学模型是描述实际问题共性的抽象数学形式. 对数学模型的研究，有助于我们认识这类问题的性质和寻找它的一般解法.

例 1.1　设有两个砖厂 A_1，A_2，产量分别为 23 万块和 27 万块. 这些产量供应 B_1，B_2，B_3 三个工地，这三个工地的需要量分别为 17 万块、18 万块和 15 万块. 而自各产地到各工地的运价如表 1 - 1 所示.

表 1 - 1

运价(元/万块) 工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问应如何调运，才能使总运费最省？

解　设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量(单位：万块)($i=1, 2$；$j=1, 2, 3$)，x_{11}表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1 砖的数量，等等，如表 1 - 2 所示.

表 1-2

工　地 砖　厂	B_1	B_2	B_3	发　量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	50

因为,由砖厂 A_1 运往三个工地砖的总数应为 A_1 的产量 23 万块,即

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=23.$$

同样,由砖厂 A_2 运往三个工地砖的总数应为 A_2 的产量 27 万块,即

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=27.$$

另一方面,两个砖厂供给 B_1 工地的砖的数量应等于 B_1 的需要量 17 万块,即

$$x_{11}+x_{21}=17.$$

同理可得

$$x_{12}+x_{22}=18,$$

$$x_{13}+x_{23}=15.$$

因此,调运方案就是满足下面约束条件的一组变量 x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} 的值:

约束条件:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27, \\ x_{11}+x_{21}=17, \\ x_{12}+x_{22}=18, \\ x_{13}+x_{23}=15, \\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=1,\ 2;\ j=1,\ 2,\ 3). \end{cases} \tag{1.1}$$

显然,可行的调运方案有很多个.

现在的问题是要在这很多个可行的方案中,找一个运费最少的方案,即

求一组变量 x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} 的值,使它满足约束条件式(1.1),并使目标函数

$$S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$$

的值最小(即总运费最少).

例 1.2 设有 n 个地方 $A_1, A_2, \cdots, A_n$,在一个计划期内,已知 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$生产某种原料 a_i t,需要成品 b_i t(假定用 c t 原料可制得 1 t 成品),在 A_i 设厂加工成品的加工费为 d_i 元/t,在 A_i 设厂生产成品数最多为 e_i t,最少为 f_i t(如果在 A_p 不能设厂,那么 $e_p=f_p=0$,如果在 A_q 设厂,生产成品数不限,那么 $e_q=$正常大小,$f_q=0$). c_{ij} 表示原料或成品从 A_i 运到 $A_j(i, j=1, 2, \cdots, n)$ 的单位运价,问应在何地设厂,生产多少成品,才能既满足需要,又使生产费用(包括原料和成品运费)最少?

解 设 x_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的原料数(单位:t)$(i, j=1, 2, \cdots, n)$,其中 $j=i$ 时表示 A_i 留用数;y_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的成品数(单位:t)$(i, j=1, 2, \cdots, n)$,其中 $j=i$ 时表示 A_i 留用数;z_i 表示 A_i 设厂的年产成品数(单位:t)$(i=1, 2, \cdots, n)$. 那么,这一问题的数学模型为

求一组变量 $x_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$, $y_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$, $z_i(i=1, 2, \cdots, n)$的值,使它满足以下约束条件:

$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i(i=1, 2, \cdots, n)$ (从 A_i 运往各地原料总数以及留用数应等于 A_i 的原料产量);

$\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ji} = cz_i(i=1, 2, \cdots, n)$ (从各地运往 A_i 的原料总数以及 A_i 的留用数应等于在 A_i 设厂所需原料数);

$\sum\limits_{j=1}^{n} y_{ij} = z_i(i=1, 2, \cdots, n)$ (由 A_i 运往各地的成品总数以及留用数应等于 A_i 的产品数);

$\sum\limits_{j=1}^{n} y_{ji} = b_i(i=1, 2, \cdots, n)$ (从各地运到 A_i 的成品数以及 A_i 的留用数应等于 A_i 所需成品数);

$f_i \leqslant z_i \leqslant e_i(i=1, 2, \cdots, n)$ (在 A_i 生产的成品数必须在 f_i 至 e_i 之间);

$x_{ij} \geqslant 0, y_{ij} \geqslant 0, z_i \geqslant 0$ (调运成品数,生产成品数都不能为负数),

并且使目标函数 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij}+y_{ij})+\sum\limits_{i=1}^{n} d_i z_i$ 的值最小(生产总费用最少).

1.2 线性规划的一般理论

1.2.1 线性规划问题的标准形式

由上节的讨论可见,所谓线性规划问题,是在一组线性约束条件下,求一个