高等数学(一)微积分

强化应试指导

张启林 尤伯欣 张清利/主编

经济管理类公共课

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

高等数学（一）微积分

强化应试指导

同心出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1,微积分/张启林主编

—北京:同心出版社,2002

全国高等教育自学考试指定教材辅导用书

ISBN 7-80593-682-X

Ⅰ.高… Ⅱ.周… Ⅲ.微积分—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第079685号

同心出版社出版、发行

(北京市朝阳区和平里西街21号)

邮编:100013　　电话:(010)84276223

天津市蓟县宏图印务有限公司印刷　新华书店经销

2002年11月第1版　2002年11月第1次印刷

850×1168毫米　24开本　印张:14.75

字数:336千字

定价:24.00元

说　明

本书是全国高等教育自学考试指定教材《高等数学(一)微积分》(经济管理类公共课)的配套辅导用书。

本书的宗旨　在短期内,考生通过阅读本书,归纳总结知识要点、考核重点,并通过强化训练提高自己的解题技巧、实战应试能力,从而在最短的时间内取得理想的成绩。

本书的编写依据:

一、全国高等教育自学考试指导委员会颁布的《高等数学(一)微积分自学考试大纲》;

二、全国高等教育自学考试指导委员会组编的指定教材《高等数学(一)微积分》(高汝熹主编,武汉大学出版社出版)。

全书按照教材及大纲的要求,以章为序进行编写,每章由“重点考核内容提要”、“典型例题分析”、“模拟训练题”、“模拟训练题答案”四部分组成,每部分内容特点如下:

一、重点考核内容提要　此部分内容是全书的基石。包含本章知识要点的归纳以及相关知识点例题的详尽分析,从而帮助考生深入理解和掌握基本概念、基本原理及大纲考点,使考生对于考核内容融会贯通、拓宽解题思路、提高分析问题的能力起到十分重要的作用,对抓住考试重点和获得解题窍门有积极的指导意义。

二、典型例题分析　此部分内容是全书的精髓。为了帮助考生更好地理解和把握考试要点,每章选编的大量典型例题都真正具有一定的典型性和代表性。每道题的详细分析能帮助考生迅速找到解决问题的关键,并积极探索每道题目的多

种解法,使考生对各个有关概念的相互关系有更深刻的理解;通过各种解法的比较,掌握如何用简捷的方法去解决问题,对提高解题能力十分有帮助,考生应仔细体会并学会这些思维方法。

三、模拟训练题　是为了让考生在短期内迅速掌握考纲要求的知识点而精心设计的。此部分试题其重点分布和难易程度与考纲要求一致,有利于考生自我考核、自我评估以及自我调整复习的重点。我们相信只要考生仔细做完这些试题,并认真消化、体会、总结,就一定能达到举一反三,触类旁通的境界,一定会在全国统一考试中取得满意的成绩。

四、模拟训练题答案　对"模拟训练题"中所有试题提供了完全的解答,不仅给出了答案,而且分析了答题思路。解题过程详细,以攻克难点,突出考点为主,并帮助考生掌握分析和解决问题的技巧和方法。

本书的编者,长期从事高等教育自学考试的教学工作,具有一套行之有效的教学经验,能准确把握考试方向,并多次编写高等数学自学考试专用辅导教材,受到广大考生的赞誉和推崇。我们相信本书的出版发行会对广大考生学习《高等数学(一)微积分》和顺利通过考试起到积极的推动作用。

本书第一、二章由张启林编写;第三、四、五章由尤伯欣编写;第六、七、八章由张清利编写。全书由张启林策划并统稿。

为了把本书编写得更好,欢迎广大读者对本书存在的不足之处给予批评指正,使本书日臻完善。

编　者

2002 年 10 月

目　　录

第一章　函数及其图像

考试大纲、考核要求：

1. 理解集合的概念，掌握集合的基本运算；

2. 理解绝对值、区间及邻域概念，会解绝对值不等式；

3. 了解映射的概念，深刻理解函数的概念，会求函数的定义域、值域，会判断两个函数是否相同；

4. 深刻理解函数的四个基本性质：单调性、有界性、奇偶性和周期性，掌握它们的分析表示、图形和特征；

5. 熟记基本初等函数的表达式、定义域、图像和基本性质；

6. 理解反函数的概念，会求直接函数的反函数及其定义域、值域等；

7. 理解复合函数的概念，能正确分析复合函数的复合过程，会求复合函数的定义域.

一、重点考核内容提要

1. 集合

所谓集合，是指具有某种共同性质的元素的全体. 例如

① 所有被学校评为三好学生的全体为一集合；

② 方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 的根的全体为一集合；

③ 所有实数的全体为一集合；

④ 平面直角坐标系中，第一象限所有的点的全体为一集合.

在 ① 和 ② 中，每个集合只有有限个元素，这种集合叫有限集，③ 和 ④ 中的元素是无限个，这种集合叫无限集.

通常集合用大写字母 A、B、C 表示，小写字母表示集合中的元素. $a\in A$ 表示

元素a是集合A中的元素,$a \notin A$(或$A \not\ni A$)表示a不是集合A中的元素.

例如,变量x的取值范围构成的集合X叫做变化域,有$x \in X$.

若集合A中的每一个元素都是集合B的元素,则称集合B包含集合A,也称集合A是集合B的子集.记作$A \subseteq B$或$B \supseteq A$.若集合A的元素都是集合B的元素,而集合B中有的元素不属于A,则称A是B的真子集,记作$A \subset B$或$B \supset A$.

若集合A和集合B彼此包含,即$A \subseteq B$,$B \subseteq A$,则称集合A和集合B相等,记作$A = B$.

若一个集合不包含任何元素,则称此集合为空集,记作$\varnothing$.零元素组成的集合包含零,因此不是空集.

由所研究对象的全体构成的集合称为全集,记作Ω(应注意全集是相对而言的).

例1 设$A = \{2,4,8\}$,则集合A的所有子集是:$\varnothing$,$\{2\}$,$\{4\}$,$\{8\}$,$\{2,4\}$,$\{2,8\}$,$\{4,8\}$,$\{2,4,8\}$.应注意,在考虑A的所有子集时,不要漏掉空集$\varnothing$和它本身.

例2 设$A = \{0,2,3\}$,$B = \{x \mid x$为方程$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$的解$\}$,则$A = B$.

集合有如下的运算:

由属于集合A或属于集合B的一切元素组成的集合,称为集合A与B的并集,记作$A \cup B$.

一切同时属于A和属于B的元素组成的集合称为集合A和集合B的交集,记作$A \cap B$.

由属于集合A而不属于集合B的元素全体组成的集合,称作集合A和集合B的差集,记作$A - B$.集合$\Omega - A$称为集合A的补集,记作$\overline{A}$.

集合的运算有如下性质:

交换律 $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

对偶律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

例 3 设 $A = \{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 3\}$, $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$,则有 ( )

A. $A \subset B$ B. $A \supset B$ C. $A \cap B \supset B$ D. $A \cap B \subset B$

解 因 $A \cap B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 3\}$,所以 $A \cap B \subset B$. 故选择答案 D.

例 4 如果集合 $A = \{x \mid x(x^2 - 1) = 0\}$,下列集合中哪个集合与 A 相等 ( )

A. $\{x \mid x(x + 1) = 0\}$ B. $\{x \mid x^2(x^2 - 1) = 0\}$

C. $\{x \mid (x - 1)(x^2 - 1) = 0\}$ D. $\{x \mid e^x(x^2 - 1) = 0\}$

解 用定义检验两个集合是否相等,本题的集合 A 中元素是有限个,A 为 $\{0,1,-1\}$. 而答案中的 A 为 $\{0,-1\}$,B 为 $\{0,1,-1\}$,C 为 $\{-1,1\}$,D 为 $\{1,-1\}$. 故选择 B.

例 5 如果集合 A 和 B 满足 $A \cup B = B$,那么 A 与 B 的关系必是 ( )

A. $A = B$ B. $A \subset B$ C. $A \subseteq B$ D. $A \supset B$

解 $A \cup B$ 表示两个集合之并,即集合 A 和集合 B 的元素的全体. 由题设知 $A \cup B = B$,表示 A 和 B 的元素的全体就是 B 集,因此 A 的元素一定是 B 的元素. 虽然 B 的元素可以不是 A 的元素,但也可能发生 A 和 B 是相同的集合,此时,A 就不是 B 的一个真子集了,因此应选择 $A \subseteq B$ 为答案. 故选择 C.

例 6 设 $A = \{x \mid -5 \leqslant x \leqslant 5\}$, $B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8\}$,则有 ( )

A. $A \subset B$ B. $A \supset B$

C. $A \cap B \supset B$ D. $A \cap B \subset B$

解 容易看出 A,B 均不成立. 而 $A \cap B = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$.

于是有 $A \cap B \subset B$. 故选择 D.

2. 函数

定义　设 X 是一给定的数集，f 是一确定的对应关系，如果对于 X 中的每一个元素 x，通过 f 都有 R 内的唯一确定的一个元素 y 与之对应，那么这个关系 f 就叫做从 X 到 R 的函数关系，简称函数，记为

$$f: X \to R \text{ 或 } f(x) = y$$

我们把按照函数 f 与 $x \in X$ 所对应的 $y \in R$ 叫做 f 在 x 处的函数值，记作 $y = f(x)$，并把 X 叫做函数 f 的定义域，用 D_f 表示．而 f 的全体函数值的集合

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

叫做函数 f 的值域，通常用 y 来表示，即

$$y = \{f(x) \mid x \in X\}$$

由于函数 f 和函数值 $f(x)$（即 y）没有区分的必要，因此也常把 y 叫做 x 的函数．即

$$y = f(x), x \in X$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量．

由以上我们不难看出，确定一个函数的关键是：函数的定义域和对应关系，这称为函数的两个要素．因此，决定两个函数是否为同一函数的关键是它们的定义域和对应关系是否完全相同，而与函数的变量用什么字母表示无关．

例 1　下列各对函数是否相同，并说明理由：

(1) $f(x) = \ln x^2, \varphi(x) = 2\ln x$

(2) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x, \varphi(x) = 1$

解　(1) 不相同．

理由：$f(x) = \ln x^2$，其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$．

$\varphi(x) = 2\ln x$，其定义域为 $(0, +\infty)$．

因为两函数的定义域不同

所以两函数不相同．

(2) 相同．

理由：$f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$，定义域 $(-\infty, +\infty)$．

$\varphi(x) = 1$，定义域 $(-\infty, +\infty)$．

两函数定义域相同.

且 $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

故两函数的对应关系也相同.所以两函数相同.

分析 判断两函数是否为同一函数,应首先看定义域是否相同,在定义域相同情况下,再看对应关系是否相同.而不能先把两函数整理成同一形式再比较.

例 2 求下列函数的定义域

(1) $y = \dfrac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+4}$ (2) $y = \lg\dfrac{x}{x-2}$

解 (1) $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0 \\ x+4 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \geqslant -4 \end{cases}$

定义域为 $[-4,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

(2) $\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \text{且} x-2>0 \\ x \neq 2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \text{且} x-2<0 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$\Rightarrow x > 2$ 或 $x < 0$

定义域为 $(-\infty,0) \cup (2,+\infty)$.

3. 函数的基本性质

(1) 单调性

定义 设函数 $y = f(x), x \in X$,任给 $x_1, x_2 \in (a,b)$ 且 $(a,b) \subset X$.若 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$,

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递增(递减)的;

又若 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$,

则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是不减(不增)的.

递增函数或递减函数统称为单调函数.

(2) 奇偶性

定义 设函数 $y = f(x)$ 的定义域 X 为一个对称数集,即任给 $x \in X$,总有

$-x \in X$.

若函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = -f(x)$

则称 $f(x)$ 为奇函数;

若函数 $f(x)$ 满足 $f(-x) = f(x)$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 有界性

定义　设函数 $y = f(x)$ 在 X 上有定义,若存在 $M_0 > 0$,对于任意的 $x \in X$ 使得 $|f(x)| \leqslant M_0$,则称 $f(x)$ 在 X 上是有界的;否则称 $f(x)$ 在 X 上是无界的.

例如,$y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的,因为 $|\sin x| \leqslant 1$;$y = \frac{1}{x}$ 在 $(0,1]$ 上是无界的,但在 $[1, +\infty)$ 上是有界的.

(4) 周期性

定义　设函数 $y = f(x)$,$x \in R$. 若存在 $T > 0$,对于任意的 $x \in R$ 使得 $f(x + T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 是周期函数,T 为其周期.

由定义知,$kT(k \in N)$ 都是它的周期,可见一个周期函数有无穷多个周期.若在无穷多个周期中,存在最小的正数 T,则称 T 为 $f(x)$ 的最小周期,简称周期.

例如,$y = \sin x$,$y = \cos x$,都是周期函数,它们的周期都是 2π. $y = \sin 2x$,$y = \sin\frac{x}{2}$ 也是周期函数,它们的周期分别是 π 和 4π. 而 $y = \sin x^2$,$y = \sin 2x + \sin \pi x$ 就不是周期函数了.

例 1　判断下列函数中哪些是奇函数,哪些是偶函数,哪些是非奇非偶函数?

(1) $f(x) = x\sin x$　　(2) $f(x) = \sin x - \cos x$

(3) $f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x}$　　(4) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

解　(1) 因为 $f(-x) = -x\sin(-x) = x\sin x = f(x)$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 因为 $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x$

$f(-x) \neq f(x)$ 且 $f(-x) \neq -f(x)$

所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(3) 因为 $f(-x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

(4) $$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(-x+\sqrt{1+(-x)^2})\\&=\ln\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\\&=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1}\\&=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)\end{aligned}$$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

4. 反函数

定义　给定函数 $y=f(x)$　$(x\in X,y\in Y)$. 如果对于 Y 中的每一个值 $y=y_0$,都有 X 中的惟一的值 $x=x_0$,使得 $f(x_0)=y_0$,那么我们就说在 Y 上确定了 $y=f(x)$ 的反函数,记作 $x=f^{-1}(y)$, $y\in Y$.

习惯上我们用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,因而常把函数 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$ 的形式. 从而 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 这是因为这两个函数因变量与自变量互换的缘故.

5. 复合函数

定义　设 $y=f(u)$　$(u\in U)$, $u=g(x)$　$(x\in X,u\in U_1)$. 若 $U_1\cap U=\varnothing$, 则称 $y=f[g(x)]$　$(x\in X)$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数.

6. 初等函数

基本初等函数是指以下几类函数:

(1) 常数函数　$y=c$,(c 是常数);

(2) 幂函数　$y=x^\alpha$, α 可以是任意实数;

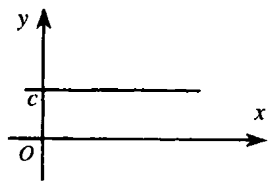
(3) 指数函数　$y=a^x$,$(a>0,a\neq1)$;

(4) 对数函数　$y = \log_a x, (a > 0, a \neq 1)$;

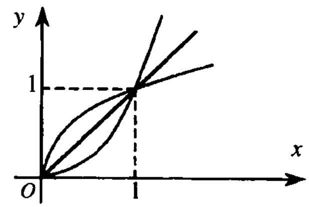
(5) 三角函数　$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$;

(6) 反三角函数　$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \text{arccot}\, x$.

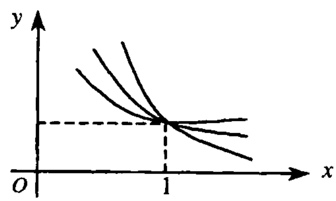
读者对于上述几个基本初等函数的基本性质及图像应熟练掌握.为学习和查阅的方便,图 1 – 1 列出了这些函数的图像.



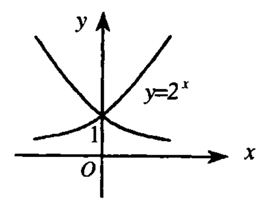
常数函数



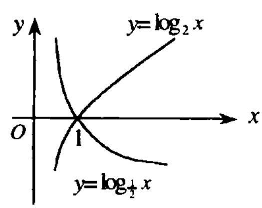
幂函数（正指数）



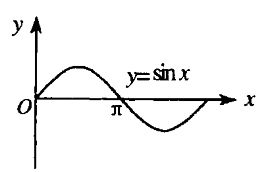
幂函数（负指数）



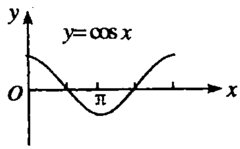
指数函数



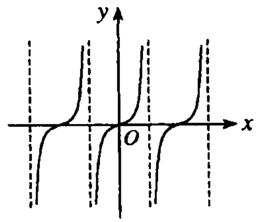
对数函数 $y=\log_a x$



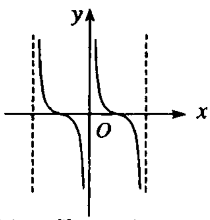
正弦函数 $y=\sin x$



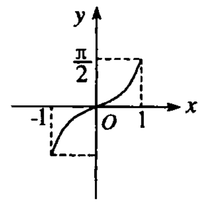
余弦函数 $y=\cos x$



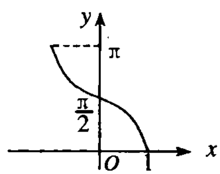
正切函数 $y=\tan x$



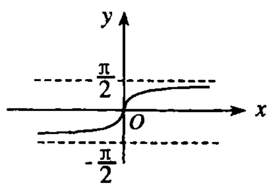
余切函数 $y=\cot x$



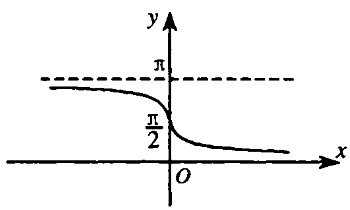
反正弦函数 $y=\arcsin x$



反余弦函数 $y=\arccos x$



反正切函数 $y=\arctan x$



反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

图 1－1

初等函数的定义：基本初等函数经过有限次加、减、乘、除、复合运算得到的函数，称为初等函数.

初等函数通常是由一个解析式来表示的.

例如 $y = \sin x^2, y = \sqrt{x^2+1}, y = \ln(x^2-1)$ 等都是初等函数.

又如，多项式函数 $P(x)$

$$P(x) \xlongequal{\text{def}} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

其中 a_k 称为多项式的系数，n 称为次数($a_n \neq 0$)

有理函数 $R(x)$

$$R(x) \xlongequal{\text{def}} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

其中 $P(x), Q(x)$ 为多项式函数，且 $Q(x)$ 不恒为零. 也都是初等函数.

7. 分段函数

由两个或两个以上的分析表达式表示的函数，称为分段函数.

例如绝对值函数

$$y = |x| \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

就是两个常见的分段函数.

例 1 设函数 $f(x) = \frac{x}{x-1}$，则当 $x \neq 1$ 且 $x \neq 0$ 时，$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) =$ （ ）

A. $\frac{x-1}{x}$ B. $\frac{x}{x-1}$

C. $1-x$ D. x