国家级示范性高等院校精品规划教材

高等数学

GAO DENG SHU XUE

GUOJIAJI SHIFANXING GAODENGYUANXIAO JINGPIN GUIHUA JIAOCAI

主编/吴劲松　高　斌

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本教材是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》编写的.

考虑到高职教育的特点,本书遵循“以应用为目的,理论知识以必需、够用为度”的原则. 全书共分5章,包含了函数、极限与连续,导数与微分,导数的应用,不定积分,定积分及其应用等内容.

本书可供高职高专院校的师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/吴劲松,高斌主编. —天津:天津大学出版社,2011.8
国家级示范性高等院校精品规划教材
ISBN 978-7-5618-4052-8

Ⅰ.①高… Ⅱ.①吴…②高… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第149793号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022—27403647　邮购部:022—27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 河间市新诚印刷有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 9
字　　数 225千
版　　次 2011年8月第1版
印　　次 2011年8月第1次
定　　价 18.00元

前　　言

教材建设工作是整个高职高专教育工作的重要组成部分．随着高等职业教育改革的不断深入和发展，高等职业教育层次的多样性、行业性和地域性等特征越来越突出．为了适应新形势下高职高专教育发展的需要，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，基于高职教育层次的特点和实际情况而编写了本教材．本教材适用于三年制高职高专电力类和工程类专业的学生使用．教材内容包括了一元微积分和微分方程初步．本书建议用60学时左右完成．

在编写教材的过程中，我们详细调查了电力类、工程类专业学生对高数的概念、运算、应用等方面的要求，力争使“以应用为目的，理论知识以必需、够用为度”的原则在教材中有所体现．因此，本教材不追求理论体系的完整性，概念、定理尽量通俗化，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养，努力体现高职专科和电力专业的特色．

本教材共分5章，分别由吴劲松（第1章）、高斌（第2章）、徐卫卫（第3章）、杨福松（第4章）、杨文杰（第5章）编写．本书由杨福松统稿．

在本教材的编写过程中，专业教师对本教材的编写提出了许多很好的建议，天津大学出版社的编辑为本教材的出版付出了辛苦的劳动，在此表示衷心的感谢．

由于我们的水平有限，书中难免存在一些不足之处，敬请广大师生、读者批评指正．

编　者

2011年5月

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是近代数学的基本概念之一. 极限方法则是高等数学中研究问题的一种基本方法，极限的思想与理论是整个高等数学的基础. 连续是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章在复习函数有关知识的基础上，着重介绍极限的概念和函数的连续性.

1.1　函　数

一、函数的概念

在一个自然现象或工程技术问题中，往往同时有几个变量在变化着，它们并不是孤立地变化着，而是相互联系并遵循着一定的变化规律，例如圆的面积问题中，考虑圆的面积 A 与其半径 r 之间的相依关系. 大家知道，它们之间符合如下公式：

$$A=\pi r^2.$$

当半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 A 的相应数值.

又如自由落体运动问题中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s. 假定开始下落的时刻为 $t=0$，那么 s 与 t 之间的相依关系符合如下公式：

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

其中：g 是重力加速度. 假定物体着地的时刻为 $t=T$，那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任意取定一个数值时，由上式就可以确定 s 的相应数值.

虽然以上两个例子所涉及的变量的实际意义不同，但是它们都反映了两个变量之间的相互依赖的关系，这种相依关系由一种对应法则来确定，根据这种对应法则，当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应，两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1　设有一非空实数集 D，如果存在一个对应法则 f，使得对于每一个 $x\in D$，按照 f 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数，记作 $y=f(x)$.

其中 x 为自变量，y 为因变量，习惯上称 y 是 x 的函数，D 称为定义域. 当自变量 x 取定义域 D 内的某一定值 x_0 时，按对应法则 f 所得的对应值 y_0，称为函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 时的函数值，记作 $f(x_0)$，即 $y_0=f(x_0)$ 或 $y_0=y|_{x=x_0}$. 当自变量 x 取遍 D 中的数，所有对应的函数值 y 构成的集合称为函数的值域，记作 M，即

$$M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

函数 $y=f(x)$ 中，表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如“φ”、“ϕ”等，这时函数就记作 $y=\varphi(x)$，$y=\phi(x)$ 等.

由函数定义可知，定义域与对应法则一旦确定，则函数就唯一确定了. 因此，把函数的定义域和对应法则称为函数的两个要素. 如果两个函数的定义域、对应法则均相同，那么可

以认为这两个函数是同一函数．反之，如果两个要素中有一个不同，则这两个函数就不是同一函数．

例如$f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$与$\varphi(x)=1$，因为$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，即这两个函数的对应法则相同，而且定义域均为$\mathbf{R}$，所以它们是同一函数．

又如$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$与$\varphi(x)=x+1$，虽然$\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$，但由于这两个函数的定义域不同，所以这两个函数不是同一函数．

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的，如圆的面积问题中，定义域$D=(0,+\infty)$；自由落体运动问题中，定义域$D=[0,T]$．

在数学中，有时不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用解析式表达的函数，这时我们约定：函数的定义域就是自变量能够取到的使解析式有意义的一切实数值．例如函数$y=\sqrt{4-x^2}$的定义域就是闭区间$[-2,2]$，函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域就是开区间$(-1,1)$．

通常用不等式、区间或集合形式表示定义域．其中有一种不等式，以后常遇到，满足不等式

$$|x-x_0|<\delta\ (\delta>0)$$

的一切x，称为点x_0的δ邻域，记作$N(x_0,\delta)$，它的几何意义表示以x_0为中心，δ为半径的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即$x_0-\delta<x<x_0+\delta$（如图1－1(a)）．

对于不等式$0<|x-x_0|<\delta$称为点x_0的δ空心邻域，记作$\hat{N}(x_0,\delta)$（如图1－1(b)）．

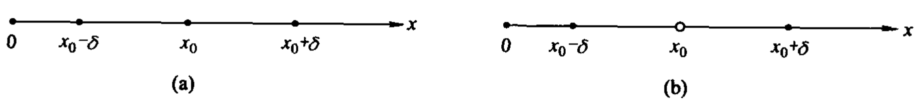

图1－1

如果自变量在定义域内任取一个数值时，对应的函数值有且只有一个，则称这种函数为单值函数，否则称之为多值函数，本书的函数若没有特殊说明，都是指单值函数．

例1　已知$f(x)=x^2-x$，求$f(0)$，$f(1)$，$f(-x)$．

解　$f(0)=0^2-0=0$，

$f(1)=1^2-1=0$，

$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$．

例2　求下列函数的定义域：

(1)$y=\dfrac{3}{1-x^2}$；　　(2)$y=\sqrt{6+x-x^2}+\ln(x+1)$．

解　(1)$1-x^2\neq0$，$x\neq\pm1$，所以定义域为$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(2)由

$$\begin{cases}6+x-x^2\geqslant0,\\ x+1>0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant3,\\ x>-1,\end{cases}$$

所以定义域为 $x \in (-1,3]$.

通常函数可以用三种不同的形式来表示：表格法、图形法和解析法(或称公式法). 三种形式各有其优点和不足，实际问题中往往把三种形式结合起来使用.

在定义域的不同范围内用不同的式子表示的一个函数，称为分段函数.

例如，函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$$

称为符号函数，它就是一个分段函数，其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-2 所示. 对于任何实数 x，有：$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|$.

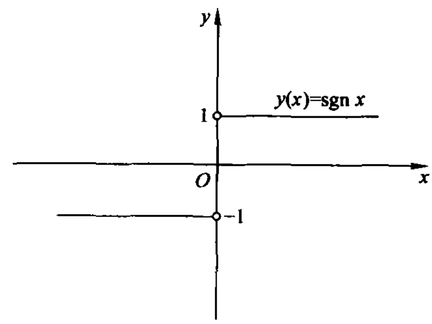

图 1-2

例 3　已知分段函数

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1+x, & x>1. \end{cases}$$

试求：(1) 函数的定义域、值域；

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(1)$, $f(3)$；

(3) 画出函数的图形.

解　(1) 函数的定义域为 $D=[0,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$；

(2) 因为 $\frac{1}{2} \in [0,1]$，所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$，

因为 $1 \in [0,1]$，所以 $f(1) = 2\sqrt{1} = 2$，

因为 $3 \in (1,+\infty)$，所以 $f(3) = 1+3 = 4$；

(3) 根据函数的定义，在 $[0,1]$ 上，函数的图形为曲线 $y=2\sqrt{x}$，在 $(1,+\infty)$ 上，函数的图形为直线 $y=1+x$，该函数的图形如图 1-3 所示.

例 4　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作 $[x]$.

例如：$\left[\frac{4}{9}\right]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\pi]=3$, $[-1]=-1$, $[-3.6]=-4$. 把 x 看成自变量，则函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，其图形为阶梯曲线，在 x 为整数值处发生跳跃，跃度为 1，此函数称为取整函数.

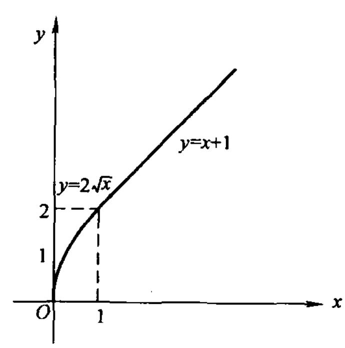

图 1-3

二、函数的性质

1. 单调性

设函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有定义，若对 (a,b) 内的任意两点 x_1, x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加；若当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内单调减少，区间 (a,b) 称为单调区间.

2. 奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为偶函数；若有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

在直角坐标系中，奇函数与偶函数的定义域必定关于原点对称，且偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

3. 有界性

若存在一个正数 M，使得对任意的 $x\in(a,b)$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 如果这样的 M 不存在，就称函数在 (a,b) 内无界；这就是说，对于任意的正数 M，总存在 $x_1\in(a,b)$，使得 $|f(x_1)|>M$，那么函数在 (a,b) 内无界.

如 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 都在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

4. 周期性

设函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义，若存在一个正实数 T，对于任意的 $x\in D$，恒有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数.

通常所说的周期函数的周期，是指它们的最小正周期. 如 $y=\sin x$ 的周期是 2π，$y=\tan x$ 的周期是 π，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

三、反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于每一个 $y\in M$，有唯一的一个 $x\in D$ 与之对应，并使 $y=f(x)$ 成立，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$.

显然，$x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 M，值域为 D. 由于习惯上自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，所以 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

例如 $y=\sqrt{x}$ 的反函数是 $y=x^2(x>0)$，其定义域就是 $y=\sqrt{x}$ 的值域 $[0,+\infty)$，值域是 $y=\sqrt{x}$ 的定义域 $[0,+\infty)$，如图 1-4(a) 所示.

在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 和其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-4(b) 所示.

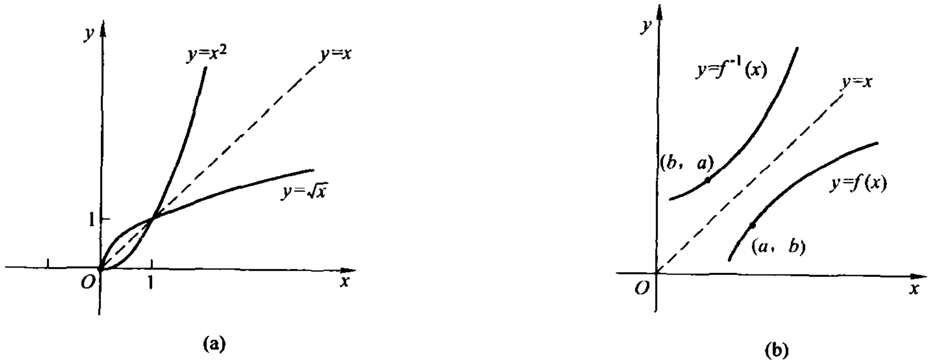

图 1-4

四、初等函数

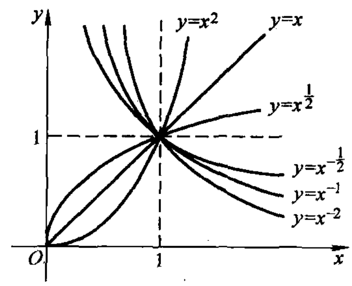

图 1－5

1. 基本初等函数

下列六种函数统称为基本初等函数.

(1)常数函数 $y=C$(C 为常数),其图形为一条平行或重合于 x 轴的直线.

(2)幂函数 $y=x^{\alpha}$(α 为实数),其在第一象限内的图形如图 1－5 所示.

(3)指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq1$),定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $(0,+\infty)$,图形如图 1－6(a)所示.

(4)对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1$),定义域为 $(0,+\infty)$,值域为 $\mathbf{R}$,图形如图 1－6(b)所示.

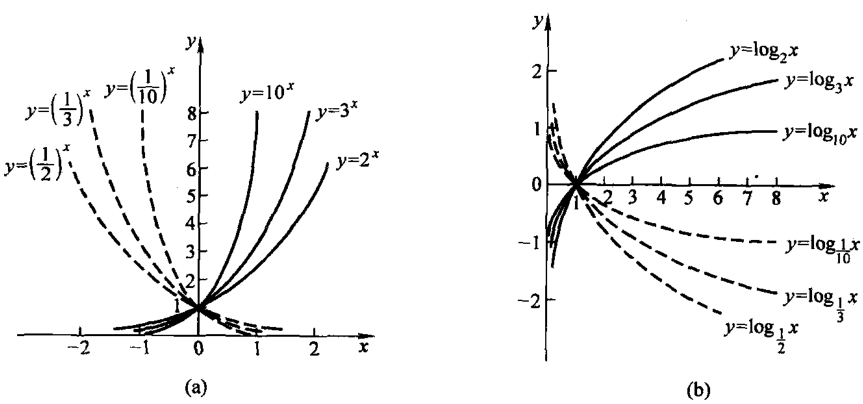

图 1－6

(5)三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$. 其中正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$,值域都为 $[-1,1]$;正切函数 $y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\in\mathbf{R},\text{且 }x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为 $\mathbf{R}$,这三个函数的图形如图 1－7 所示.

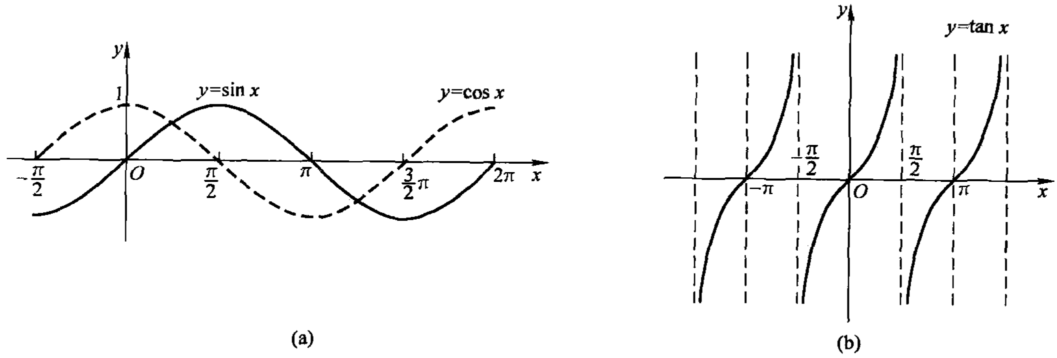

图 1－7

(6)反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$. 其中反正弦函数 $y=$

arcsin x 与反余弦函数 $y=\arccos x$ 的定义域都为$[-1,1]$，值域分别为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$和$[0,\pi]$；反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域 $\mathbf{R}$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，这三个函数的图形如图 1－8 所示．

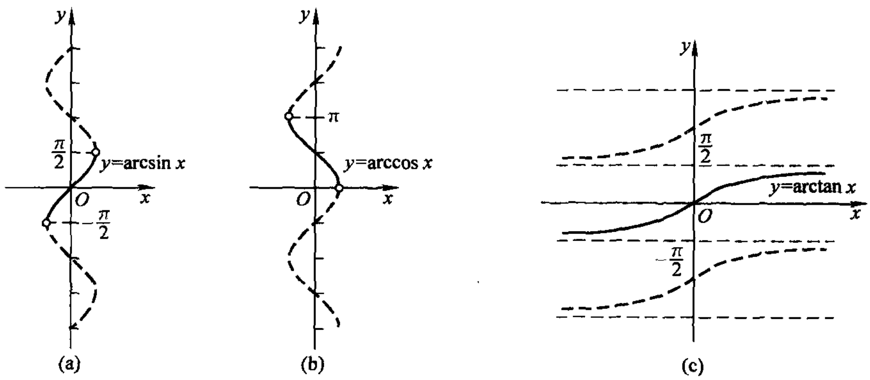

图 1－8

2. 复合函数

定义 1.3　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_φ，若 $M_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$，则将 $y=f[\varphi(x)]$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量，x 为自变量．

如函数 $y=\ln u, u=x^2+1$，因为 $u=x^2+1$ 的值域$[1,+\infty)$包含在 $y=\ln u$ 的定义域$(0,+\infty)$内，所以 $y=\ln(x^2+1)$是 $y=\ln u$ 与 $u=x^2+1$ 复合而成的复合函数．

注意：

(1)并不是任何两个函数都可以复合的，如 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能复合，因为 $u=2+x^2$ 的值域为$[2,+\infty)$，而 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$，所以对于任意的 x 所对应的 u，都使 $y=\arcsin u$ 无意义；

(2)复合函数还可推广到由 3 个及 3 个以上函数的有限次复合．

例 5　指出下列函数的复合过程：

(1)$y=\sqrt{2x-1}$；　　　　　　　　(2)$y=\ln\cot\frac{x}{3}$.

解　(1)$y=\sqrt{2x-1}$是由 $y=\sqrt{u}$与 $u=2x-1$ 复合而成的；

(2)$y=\ln\cot\frac{x}{3}$是由 $y=\ln u, u=\cot v, v=\frac{x}{3}$复合而成的．

例 6　已知$f(x)$的定义域为$[-1,1]$，求$f(\ln x)$的定义域．

解　由 $-1\leqslant\ln x\leqslant 1$ 得

$$\frac{1}{e}\leqslant x\leqslant e,$$

所以$f(\ln x)$的定义域为$\left[\frac{1}{e},e\right]$.

3. 初等函数

定义 1.4　由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的复合，且可用一个解析式

表示的函数,称为初等函数.

有些函数,在其定义域内,当自变量在不同范围内取值时,要用不同的解析式表示,这类函数称为分段函数,分段函数中有些是初等函数,有些是非初等函数.

例 7　已知

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$$

求 $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, 并作出函数图形.

解　$f(-2)=2^x|_{x=-2}=\frac{1}{4}$,

$f(0)=2^x|_{x=0}=1$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=(1-x)|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$,

$f(2)=1|_{x=2}=1.$

图形如图 1-9 所示.

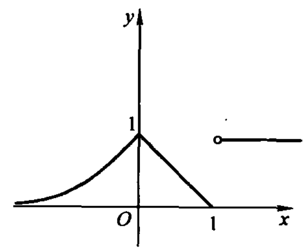

图 1-9

五、建立函数关系举例

运用函数解决实际问题,通常先要找到这个实际问题中的变量与变量之间的依赖关系,然后把变量间的这种依赖关系用数学解析式表达出来(即建立函数关系),最后进行分析、计算.

例 8　如图 1-10,从边长为 a 的正三角形铁皮上剪一个矩形,设矩形的一条边长为 x,周长为 P,面积为 A,试分别将 P 和 A 表示为 x 的函数.

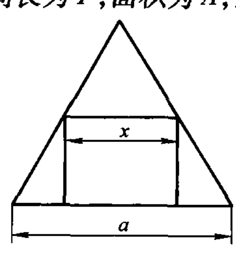

图 1-10

解　由图知矩形的另一条边长为

$$\frac{a-x}{2}\cdot\tan 60^\circ=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2},$$

该矩形周长

$$P=\sqrt{3}(a-x)+2x=(2-\sqrt{3})x+\sqrt{3}a, x\in(0,a),$$

矩形面积

$$A=\frac{\sqrt{3}(a-x)}{2}\cdot x=\frac{\sqrt{3}}{2}ax-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2, x\in(0,a).$$

例 9　电力部门规定,居民每月用电不超过 30 度时,每度电按 0.5 元收费,当用电超过 30 度但不超过 60 度时,超过的部分每度按 0.6 元收费,当用电超过 60 度时,超过部分按每度 0.8 元收费,试建立居民月用电费 G 与月用电量 W 之间的函数关系.

解　当 $0\leqslant W\leqslant 30$ 时, $G=0.5W$;

当 $30<W\leqslant 60$ 时, $G=0.5\times 30+0.6\times(W-30)=0.6W-3$;

当 $W>60$ 时, $G=0.5\times 30+0.6\times 30+0.8\times(W-60)=0.8W-15.$

所以

$$G=f(W)=\begin{cases}0.5W, & 0\leqslant W\leqslant 30,\\ 0.6W-3, & 30<W\leqslant 60,\\ 0.8W-15, & W>60.\end{cases}$$

习 题 1.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{2x-x^2}$；　　(2) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$；

(3) $y=\ln(1-x^2)$；　　(4) $y=\arcsin 2x$.

2. 已知

$$f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ 3x, & x<0,\end{cases}$$

求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$ 的值，并作出函数的图形．

3. 求下列函数的反函数：

(1) $y=3x+1$；　　(2) $y=1-\ln x$；　　(3) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^4\sin x$；　　(2) $y=\sin x-\cos x$；

(3) $y=x^2-3\cos x$；　　(4) $y=\dfrac{e^x-1}{e^{-x}+1}$.

5. 分析下列复合函数的结构，并指出它们的复合过程：

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $y=e^{\sin x}$；

(3) $y=\cos^2(x-1)$；　　(4) $y=\lg\sin(x+1)$.

6. 把一个直径为 50 cm 的圆木截成横截面为长方形的方木，若此长方形截面的一条边长 x cm，截面面积为 A cm^2，试将 A 表示成 x 的函数，并指出其定义域．

1.2 极限的概念

一、数列的极限

先看下面按一定次序排列的两列数：

(1) $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$

(2) $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots,\dfrac{n}{n+1},\cdots$

我们称它们为数列，分别记作 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$.

现在来考察 n 无限增大时，这两个数列的变化趋势．为清楚起见，把这两个数列的前 n 项 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别在数轴上表示出来(如图 1－11，图 1－12 所示).

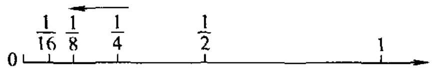

图 1－11

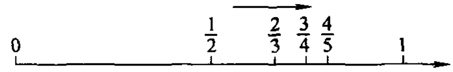

图 1－12

由图 1－11 可以看出，当 n 无限增大时，表示 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 的点逐渐密集在点 $x=0$ 的右侧，且 $x_n=\frac{1}{2^n}$ 无限接近于 0；由图 1－12 可以看出，当 n 无限增大时，表示 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 的点逐渐密集在点当 $x=1$ 的左侧，且 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限接近于 1.

上述两个数列具有相同的变化特征，即当 n 无限增大时，它们都无限接近于一个确定的常数．对于具有这样特征的数列，给出下列定义．

定义 1.5　如果当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 无限接近于一个确定的常数 A，则把常数 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限（也称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A），记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ 或 当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to A$.

因此，上述数列(1)有极限为 0，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$；数列(2)有极限为 1，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$.

例 1　观察下面数列的变化趋势，并写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{n}$；　　(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$；

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$；　　(4) $x_n=4$.

解　(1) $x_n=\frac{1}{n}$ 的项依次为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0;$$

(2) $x_n=\frac{n+1}{n}$ 的项依次为 $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 1，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1;$$

(3) $x_n=\frac{1}{(-3)^n}$ 的项依次为 $-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots$，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(-3)^n}=0;$$

(4) $x_n=4$ 为常数数列，无论 n 取怎样的正整数，x_n 始终为 4，所以

$$\lim_{n\to\infty}4=4.$$

一般地，一个常数数列的极限等于这个常数本身，即

$$\lim_{n\to\infty}C=C\ (C\text{ 为常数}).$$

需要指出的是，并不是所有数列都有极限，如数列 $x_n=2^n$，当 n 无限增大时，x_n 也无限增大，不能无限接近于一个确定常数，所以它没有极限．又如数列 $x_n=(-1)^n$，当 n 无限增大时，x_n 在 -1 和 1 这两个数上来回摆动，不能无限接近于一个确定常数，所以它也没有极限．

对于没有极限的数列，称该数列的极限不存在，亦称该数列发散．

二、函数的极限

对于函数的极限,根据自变量的不同变化过程分以下两种情况.

1. 当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限

当自变量 x 的绝对值无限增大时,记作 $x\to\infty$.

定义 1.6　设函数 $y=f(x)$ 在 $|x|>a$ 时有定义(a 为某个正实数),如果当自变量 x 的绝对值无限增大时,函数 $y=f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为当 $x\to\infty$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或当 $x\to\infty$ 时,$f(x)\to A$.

需要指出的是,$x\to\infty$ 表示 x 既取正值而无限增大(记作 $x\to+\infty$),同时又取负值而其绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$). 显然,函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的极限与在 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 时的极限存在以下关系。

定理 1.1　$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

例 2　讨论下列函数当 $x\to\infty$ 时的极限:

(1) $y=\dfrac{1}{x}$;　　(2) $y=2^x$;　　(3) $y=\arctan x$.

解　(1)由反比例函数的图形及性质可知,当 $|x|$ 无限增大时,$\dfrac{1}{x}$ 无限接近于 0,所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0;$$

(2)由指数函数的图形及性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}2^x=+\infty,\ \lim_{x\to-\infty}2^x=0,$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}2^x\ \text{不存在};$$

(3)由反正切函数的图形及性质可知

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\arctan x\ \text{不存在};$$

2. 当 $x\to x_0$ 时,函数 $y=f(x)$ 的极限

当自变量 x 无限接近于某一定值 x_0 时,记作 $x\to x_0$.

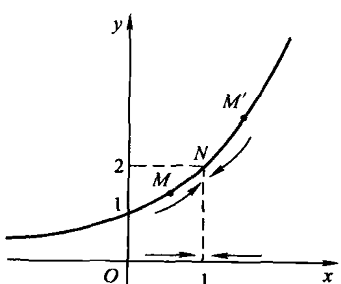

图 1－13

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域 $\hat{N}(x_0,\delta)$ 内有定义,如果当 x 无限趋近于 x_0 时,$f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 当 $x\to x_0$, $f(x)\to A$.

如函数 $y=2^x$,从图 1－13 可看出,当 x 从 1 的左、右两旁无限趋近于 1 时,曲线 $y=2^x$ 上的点 M 与 M' 都无限接近于点 $N(1,2)$,即函数 $y=2^x$ 的值无限接近于常数 2,所以

$$\lim_{x\to 1} 2^x = 2.$$

需要指出的是:

(1) 由于现在考察的是当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的变化趋势,所以定义中并不要求 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义;

(2) $x \to x_0$ 表示自变量 x 从 x_0 的左、右两旁同时无限趋近于 x_0.

例 3　考察当 $x \to -1$ 时,函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1}$ 的变化趋势,并求 $x \to -1$ 时的极限.

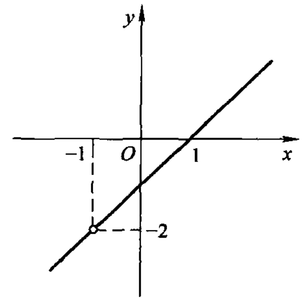

图 1－14

解　从函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1\ (x \neq -1)$ 的图形(图 1－14)可知,当 x 从左、右两旁同时无限趋近于 -1 时,函数 $y = \frac{x^2-1}{x+1} = x - 1\ (x \neq -1)$ 的值无限趋近于常数 -2,所以

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -2.$$

定义 1.8　**设函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ (或 $(x_0, x_0+\delta)$) 内有定义,若当自变量 x 从 x_0 的左(右)近旁无限接近于 x_0 时,记作 $x \to x_0^-$ ($x \to x_0^+$),函数 $y = f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A,则称常数 A 为 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左(右)极限,记作** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0-0) = A$ ($\lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0+0) = A$).

极限与左、右极限之间有以下结论.

定理 1.2　$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ **的充要条件是** $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$.

例 4　讨论下列函数当 $x \to 0$ 时的极限:

(1) $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ 1-x, & x < 0. \end{cases}$

解　(1) 因为

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,\ \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1,$$

所以根据定理 1.2, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在,见图 1－15(a);

(2) 因为

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1,$$

所以根据定理 1.2, $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$,如图 1－15(b).

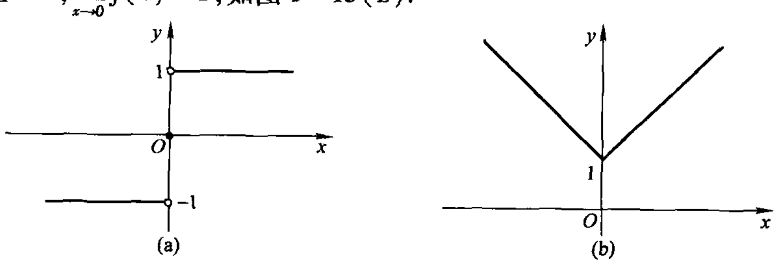

图 1－15

习　题　1.2

1. 观察下列数列的变化趋势，并判断极限是否存在，若存在，指出其极限值：

(1) $x_n = 1 + n$;　　　　(2) $x_n = 2 + \frac{1}{n}$;

(3) $x_n = \frac{1}{n^2}$;　　　　(4) $x_n = 1 + (-1)^n$.

2. 考察下列函数当 $x \to 2$ 时的变化趋势，并求出其当 $x \to 2$ 时的极限：

(1) $y = 2x + 1$;　　　　(2) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

3. 讨论下列函数当 $x \to 0$ 时的极限：

(1) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ e^x, & x > 0; \end{cases}$　　　　(2) $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

1.3　极限的运算

一、极限的四则运算

定理 1.3　设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，则

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} [C \cdot f(x)] = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = CA$（$C$ 为常数）;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$;

(4) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}\ (B \neq 0)$.

说明：

(1) 上述运算法则对于 $x \to \infty$ 时的情形也是成立的，而且法则(1)与(3)可以推广到有限个具有极限的函数的情形；

(2) 由于数列可以看作定义在正整数集上并依次取值的函数，所以数列极限可以看作是一种特殊的函数极限，因此对于数列极限也有类似的四则运算法则.

例 1　求 $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 2x + 3)$.

解
$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} (x^2 + 2x - 3) &= \lim_{x \to 1} x^2 + \lim_{x \to 1} 2x - \lim_{x \to 1} 3 \\ &= \lim_{x \to 1} x^2 + 2 \lim_{x \to 1} x - \lim_{x \to 1} 3 \\ &= 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0. \end{aligned}$$

例 2　求 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

解　$\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 1}$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-1)}$$

$$=\frac{2\lim\limits_{x\to 2}x^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}1}$$

$$=\frac{2\times 4-3\times 2+2}{2-1}=4.$$

例 3　求$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$.

解　因为当 $x\to 2$ 时，分母的极限为零，所以不能直接应用法则(4)．但因在 $x\to 2$ 的过程中，$x-2\neq 0$，所以

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

例 4　求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

解　因为当 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{1-x}$与$\frac{3}{1-x^3}$的极限都不存在，所以不能直接应用法则(1)计算，应先通分，进行适当的变形，然后用相应的法则来计算．

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(x+2)}{1+x+x^2}=-\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(1+x+x^2)}=-1.$$

例 5　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}$.

解　(1) 因为 $x\to\infty$ 时，分子分母的极限都不存在，所以不能直接应用法则(4)，可先用 x^2 同除分子、分母，然后再求极限，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x-5}{4x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\frac{3-0-0}{4+0+0}=\frac{3}{4};$$

(2) 不能直接应用法则(4)，先用 x^3 同除分子、分母，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-3}{3x^3-2x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{0+0-0}{3-0-0}=0.$$

例 6　设无穷等比数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公比 q 满足 $|q|<1$，求数列$\{a_n\}$的所有项之和 S.

解　设数列$\{a_n\}$的前 n 项的和为 S_n，由等比数列的前 n 项和公式可得

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$