状元

学习方案

ZHUANGYUAN XUEXIFANGAN

高中数学必修1

人教A版

主编 刘 强

学案=方法+考点

状元=有方法+知考点

★内含教材习题答案★

北京出版集团公司
北京教育出版社

状元学习方案

ZHUANGYUAN XUEXIFANGAN

高中数学必修 1

人教A版

主　　编：刘　强
本册主编：乔元刚　刘沛广　党金来
本册编者：李广玉　宋宗华　董守来
李自伟

北京出版集团公司
北京教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

状元学习方案:人教A版.高中数学.1:必修/刘强主编.—北京:北京教育出版社,2011.6

ISBN 978-7-5303-8517-3

Ⅰ.①状… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第113350号

状元学习方案

高中数学必修1(人教A版)

刘 强 主编

*

北京出版集团公司
北京教育出版社 出版
(北京北三环中路6号)
邮政编码:100120
网址:www.bph.com.cn
北京出版集团公司总发行
全国各地书店经销
三河市洵河印刷厂印刷

*

880×1230 16开本 8.25印张 165000字
2011年8月第1版 2011年8月第1次印刷

ISBN 978-7-5303-8517-3
定价:17.80元

质量监督电话:(010)62698883 58572750 58572393

学案=方法+考点
状元=有方法+知考点

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

状元学习方案　　高中数学必修①（人教A版）

栏目功能说明

状元学法

链接背景知识，轻松引出新知识，让你整体把握，有的放矢，对本节知识的学习做到心中有数。

状元笔记

采用“讲、例、练”三结合的方式，系统梳理和剖析本节知识，对误区进行警示，从教材出发又适当拓展延伸，让你事半功倍，轻松突破重点难点。

第一章　集合

本章整体解说

本章主要讲述集合的初步知识、集合概念及其理论，称为集合论，是近现代数学的一个重要基本理论.一方面，许多重要的数学分支都建立在集合理论的基础上；另一方面，集合论及其所反映的数学思想，在越来越广泛的领域中得到应用.

本章的主要内容是集合的概念、表示方法和集合之间的关系与运算.第一大节是集合与集合的表示方法，首先通过实例引人集合与集合的元素的概念，然后学习集合的两种表示方法.第二大节是集合之间的关系与运算，首先从观察集合与集合之间元素的关系开始，给出子集、真子集以及集合相等的概念，同时学习用 Venn 图表示集合，接着学习交集、并集，以及补集、全集的初步知识.

本章的重点是集合之间的关系与运算，难点是对集合概念的理解.本章是高中数学的起始章，学好本章知识，对于顺利学习高中数学意义重大.学习时，应注意以下三点：

(1)注意和初中数学知识衔接.这就需要认真整理初中知识，形成良好的知识基础.

(2)认真理解、反复推敲思考本章知识点的含义，各种表示方法、容易混淆的知识点，达到熟练掌握.

(3)通过本章的学习，要努力培养自己观察、比较、抽象、概括的能力，培养科学的、严谨的学习态度，为树立辩证唯物主义科学的世界观、人生观打下坚实的基础.

1.1　集合与集合的表示方法

1.1.1　集合的概念

状元学法　提纲挈领　一目了然

集合的概念
- 集合与元素 — 有且只有两种关系
  - 属于
  - 不属于
- 集合中元素的特征 — 共性
  - 确定性
  - 互异性
  - 无序性
- 集合的分类 — 按元素个数分
  - 有限集 — 特例 — 空集
  - 无限集

状元笔记　善于归纳　活学活用

▶知识点1◀　集合的概念（★）

一般地，把一些能够确定的不同的对象汇集在一起构成一个整体，这个整体称为一个集合.

集合是现代数学中不加定义的基本概念，学习这个概念时应注意以下几点：

(1)集合是一个“整体”；

(2)构成集合的对象必须是“确定”的且“不同”的.其中“确定”是指构成集合的对象具有非常明确的特征，这个特征不是模棱两可的；“不同”是指构成集合的各个对象互不相同.

以上两条是判定某些对象能否构成集合的标准.一般地，判定一组对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 能否构成集合，就是要看判定对象 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 是否具有一个确定的特征，如果有，能构成集合；如果没有，就构不成集合.这个确定的特征非常明确.

如“全世界所有的高个子”这一组对象就构不成集合，因为“高个子”这个标准不明确.而“全世界身高 1.75 米的所有人”这一组对象能构成集合，因为“身高 1.75 米”是一个非常确定的标准.

例1 下列各组对象能确定一个集合吗？

(1)所有很大的实数；(2)$\sqrt{2}$的近似值的全体；(3)1，2，2，4，5；(4)不超过 20 的非负数；(5)某校 2006 年在校的所有高个子同学.

【解析】本题是判断所给对象能否构成集合的问题，只需根据构成集合的条件，即首先要判断这组对象是否是一个整体，其次是这组对象中的成员是否是“确定”的且“不同”的.

易错警示：在判断某些对象能否构成集合时，对确定的特征理解不到位.

【答案】(1)“所有很大的数”，(5)“某校 2006 年在校的所有高个子同学”标准不明确，所以(1)(5)不是集合.

(2)“$\sqrt{2}$的近似值”没有明确精确到什么程度，因此很难判断一个数（如 2）是不是它的近似值，所以也不能构成集合.

(3)对象中的成员有重复现象，不能构成集合.

(4)“不超过 20 的非负数”，即“$0\leqslant x\leqslant 20$”，能构成集合.

故能构成集合的是(4)，不能构成集合的是(1)(2)(3)(5).

点拨：一些对象能否构成集合必须具有以下两个特点：一是整体性，二是确定性.其中“汇集在一起”一语，说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象，这就是集合的整体性.“确定的不同的对象”一语，说明集合中的元素是确定的，而且是互异的，一个对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一，这是集合的确定性.

跟踪训练

1. 由下列对象组成的集合：①不超过 π 的正整数；②高一新教材课本中的所有难题；③平方后等于自身的数；④中国的大城市；⑤高一年级中考成绩在 500 分以上的学生.

   其中能构成集合的是(　　)

   A. ①②④　　B. ③④⑤

   C. ①③⑤　　D. ①②③

▶知识点2◀　集合的元素（★）

(1)集合中的每个对象都叫做这个集合的元素，集合常用大写的英语字母 A、B、C…表示，集合中元素常用小写的英语

今天教育的内容百分之八十都应该是方法——方法比事实更重要。

——纳依曼（联合国教科文组织总干事）

状元学习方案

学案=方法+考点
状元=有方法+知考点

通过对状元的走访和研究发现，状元的学习和一般学生的学习有所不同。状元在学习和考试中能“正常”发挥甚至“超常”发挥，很少“失常”发挥，这与状元自身总结的一系列学习方案有着密切的关系。高效的学习和探究，源于对知识本质的领悟和对方法规律的掌握。

栏目功能说明

【解析】用另一种方法表示集合，关键是把握好集合的代表元素.

【答案】(1)代表元素是 x，x 满足的条件是 $x^2-x-6=0$，因此这个集合是方程 $x^2-x-6=0$ 的解集，所以这个集合还可表示为$\{-2,3\}$.

(2)代表元素是 y，这个集合是当 x 取任意实数时，$y=x^2-x-6$ 中 y 的取值范围. $\because y=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$，$\therefore y\geq-\frac{25}{4}$. 所以这个集合还可表示为$\left\{y\middle|y\geq-\frac{25}{4}\right\}$.

状元思维 提高素质　培养兴趣

▶探究1◀　分类讨论

当问题不易按同一标准解决时，要适时地选择好分类标准，进行恰当的讨论. 在分类讨论中，关键是分类的标准要明确，做到不重不漏.

例9(新课标创新题)设 a、b、c 为非零实数，则 $x=\frac{|ab|}{ab}+\frac{bc}{|bc|}+\frac{|ca|}{ca}+\frac{abc}{|abc|}$的所有值组成的集合为(　　)

A. $\{4,-2\}$　B. $\{-2,0\}$　C. $\{-2,0,2\}$　D. $\{0,-2,4,2\}$

【解析】此题首先要读懂题意，要求由 x 的所有值组成的集合，关键是把表达式中的绝对值号去掉，根据得到的若干个不同的数值，确定出集合来.

【答案】当 a、b、c 全为正数时，$x=4$；
当 a、b、c 中有且只有一个负数时，$x=-2$；
当 a、b、c 中有两个是负数时，$x=0$；
当 a、b、c 全是负数时，$x=2$，故选 D.

▶探究2◀　创新应用

在高考中，经常会出现一些新情景的题目，这些题目往往难度不大，但要求我们细心、认真，深刻领会题目的意义.

例11(原创题)设符号“@”是数集 A 的一种运算. 如果对于任意的 x、$y\in A$，都有 $x@y\in A$，则称运算@对集合 A 是封闭的.

(1)设 $A=\{x|x=m+\sqrt{2}n,m,n\in \mathbf{Z}\}$，判断 A 对通常的实数的乘法运算是否封闭?

(2)设 $B=\{x|x=m+\sqrt{2}n,m,n\in \mathbf{Z}$，且 $n\neq0\}$，问 B 对通常的实数的乘法运算是否封闭? 试证明你的结论?

【解析】这是一道创新应用题，用网络符号@作为运算符号，这就使读者感到新颖. 而实际上从两个问题的问法来看，还是具体判断从所给的集合中任取两个元素，经过乘法运算后得到的数是否还在这个集合内.

【答案】(1)根据定义，可设 $x=m_1+\sqrt{2}n_1$，$y=m_2+\sqrt{2}n_2$，那么 $x\times y=(m_1+\sqrt{2}n_1)\times(m_2+\sqrt{2}n_2)=\sqrt{2}(m_1n_2+m_2n_1)+m_1m_2+2n_1n_2$，可以说明 A 对通常的实数的乘法运算是封闭的.

(2)不封闭. 例如 $x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$，而 $x\times y=(2+\sqrt{2})\times(2-\sqrt{2})=2\notin B$，($\because$此时 $n=0$)，$\therefore$集合 B 对通常的实数的乘法运算不封闭.

点拨：题(1)、(2)只有一个细小的差别，但结论完全不同，搞清楚数集的概念和注意特殊情况十分重要，应当仔细审题. 通过本例对同学们在学习过程中养成严谨、审慎的作风是大有益处的.

跟踪训练

17.(原创题)设“$*$”是集合 A 中元素的一种运算，如果对于任意的 x、$y\in A$，都有 $x*y\in A$，则称运算“$*$”对集合 A 是封闭的，若 $M=\{x|x=a+\sqrt{2}b,a,b\in \mathbf{Z}\}$，$\mathbf{Z}$ 为整数集，则对集合 M 不封闭的运算是(　　)

A. 减法　　B. 乘法
C. 除法　　D. 乘方

18.(原创题)设 A、B 为两个非空实数集合，定义 $A+B=\left\{\frac{a}{b}\middle|a\in A,b\in B\right\}$，若 $A=\{2,3,5\}$，$B=\{1,2,6\}$，则 $A+B$ 中元素的个数是(　　)

A. 8　B. 9　C. 10　D. 11

19. 定义集合运算 $P*Q=\{x|x=\sqrt{ab},a\in P,b\in Q\}$，设集合 $P=\{1,2,4\}$，$Q=\{4,6,8\}$，则集合 $P*Q$ 中共有(　　)个元素.

A. 5　B. 6　C. 7　D. 8

20. 已知集合 $M=\{x|x^2-4<0\}$，$N=\{x|x=2n+1,x\in M,n\in \mathbf{Z}\}$，则 N 中的元素个数为(　　)

A. 1个　　B. 2个
C. 3个　　D. 4个

状元实践 借鉴高考　未雨绸缪

集合在高考中是每年必考的内容，这一部分知识主要是以工具的形式出现，以列举法或特征性质描述法给出集合，单独命题考查列举法或特征性质描述法的时候不多，但有时在创新题目中有体现.

例12(高考题)定义集合运算：$A*B=\{z|z=xy,x\in A,y\in B\}$. 设 $A=\{1,2\}$，$B=\{0,2\}$，则集合 $A*B$ 的所有元素之和为(　　)

A. 0　B. 2　C. 3　D. 6

【解析】$\because z=xy,x\in A,y\in B$，
$\therefore z$ 的取值有：$1\times0=0$，$1\times2=2$，$2\times0=0$，$2\times2=4$，
故 $A*B=\{0,2,4\}$.
$\therefore$集合 $A*B$ 的所有元素之和为：$0+2+4=6$.

【答案】D

例13(2011·山东模拟)设 $A=\{1,2,\cdots,10\}$，若“方程 $x^2-bx-c=0$ 满足 b、$c\in A$，且方程至少有一根 $a\in A$”，就称该方程为“漂亮方程”，则“漂亮方程”的个数为(　　)

A. 8　B. 10　C. 12　D. 14

【解析】由于方程至少有一根 $a\in A$，且 b、$c\in A$，则方程的两根均为整数，由于两根之积为 $-c$，可得两根为一正一负，由于判别式恒大于零，则当有一根为 -1 时，$b-c=-1$，b、c 可取的数对：1,2；2,3；3,4；4,5；5,6；6,7；7,8；8,9；9,10 可得 9 个不同的方程. 当一根为 -2 时，$c=2b+4$. b、c 可取的数对：1,6；2,8；3,10 可得 3 个不同的方程，方程的根不可能为更小的整数了，如根为 -3，代入已知方程可得：$c=3b+9\notin A$，与已知矛盾，故选 C.

【答案】C

跟踪训练

21.(2009·北京)设 A 是整数集的一个非空子集，对于 $k\in A$，如果 $k-1\notin A$ 且 $k+1\notin A$，那么 k 是 A 的一个“孤立元”，给定 $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，由 S 的 3 个元素构成的所有集合中，不含“孤立元”的集合共有________个.

22.(高考题)设 a，$b\in \mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a$

状元思维

针对本节知识与科技发展、生活实际相联系的问题，或是学科内、学科间的综合问题，进行探究讨论，举例说明。

状元实践

再现本节知识在高考中曾经出现过的考查类型、角度和深度。只有知道过去曾经考过什么，做到心中有数，方能立于不败之地。

今天教育的内容百分之八十都应该是方法——方法比事实更重要。

——纳依曼(联合国教科文组织总干事)

北教控股
BEIJING EDUCATION HOLDING

目　录

第一章　集合与函数概念

1.1　集合 …… 1
1.1.1　集合的含义与表示 …… 1
状元学法 …… 1
状元笔记 …… 1
状元思维 …… 6
状元实践 …… 7
状元心得 …… 7
状元素养 …… 8
答案专区 …… 8
1.1.2　集合间的基本关系 …… 10
状元学法 …… 10
状元笔记 …… 10
状元思维 …… 12
状元实践 …… 13
状元心得 …… 13
状元素养 …… 14
答案专区 …… 14
1.1.3　集合的基本运算 …… 16
状元学法 …… 16
状元笔记 …… 16
状元思维 …… 19
状元实践 …… 20
状元心得 …… 21
状元素养 …… 21
答案专区 …… 21
1.2　函数及其表示 ……
1.2.1　函数的概念 …… 24
状元学法 …… 24
状元笔记 …… 24
状元思维 …… 26
状元实践 …… 28
状元心得 …… 29
状元素养 …… 29
答案专区 …… 29
1.2.2　函数的表示法 …… 31
状元学法 …… 31
状元笔记 …… 31
状元思维 …… 34
状元实践 …… 36
状元心得 …… 37
状元素养 …… 37
答案专区 …… 37
1.3　函数的基本性质 ……
1.3.1　单调性与最大(小)值 …… 40
状元学法 …… 40
状元笔记 …… 40
状元思维 …… 43
状元实践 …… 44
状元心得 …… 45
状元素养 …… 45
答案专区 …… 46
1.3.2　奇偶性 …… 48
状元学法 …… 48
状元笔记 …… 48
状元思维 …… 50
状元实践 …… 51
状元心得 …… 52
状元素养 …… 52
答案专区 …… 53
章末总结提高 …… 55
状元知识总结 …… 55
状元专题归纳 …… 55
答案专区 …… 56

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

2.1　指数函数 …… 57
2.1.1　指数与指数幂的运算 …… 57
状元学法 …… 57
状元笔记 …… 57
状元思维 …… 59

状元实践……60
状元心得……60
状元素养……60
答案专区……61
2.1.2 指数函数及其性质……63
状元学法……63
状元笔记……63
状元思维……65
状元实践……66
状元心得……67
状元素养……67
答案专区……68
2.2 对数函数……69
2.2.1 对数与对数运算……69
状元学法……69
状元笔记……69
状元思维……71
状元实践……72
状元心得……72
状元素养……72
答案专区……73
2.2.2 对数函数及其性质……74
状元学法……74
状元笔记……74
状元思维……77
状元实践……78
状元心得……79
状元素养……79
答案专区……80
2.3 幂函数……82
状元学法……82
状元笔记……82
状元思维……83
状元实践……85
状元心得……86
状元素养……86
答案专区……86
章末总结提高……88
状元知识总结……88
状元专题归纳……88
答案专区……90

第三章 函数的应用

3.1 函数与方程……91
3.1.1 方程的根与函数的零点……91
状元学法……91
状元笔记……91
状元思维……93
状元实践……94
状元心得……95
状元素养……95
答案专区……95
3.1.2 用二分法求方程的近似解……97
状元学法……97
状元笔记……97
状元思维……98
状元实践……98
状元心得……99
状元素养……99
答案专区……99
3.2 函数模型及其应用……101
状元学法……101
状元笔记……101
状元思维……103
状元实践……106
状元心得……107
状元素养……107
答案专区……107
章末总结提高……109
状元知识总结……109
状元专题归纳……109
答案专区……110
附录:教材课后习题答案……111

第一章 集合与函数概念

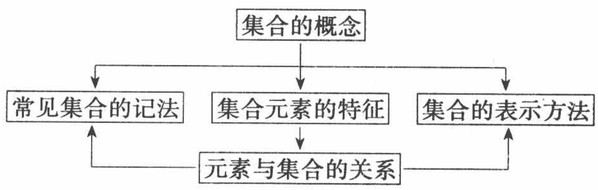
本章整体解说

本章共分三节：1.1 集合；1.2 函数及其表示；1.3 函数的基本性质；另外还有一个实习作业. 本章先从熟悉的集合（自然数的集合、有理数的集合等）出发，结合实例给出元素与集合的含义；通过类比实数间的大小关系、运算引入集合间的关系、运算，同时，结合相关内容介绍子集和全集等概念. 集合语言是现代数学的基本语言，在学习中，应学会使用最基本的集合语言表示有关数学对象，并能在自然语言、图形语言、几何语言之间进行转换，体会用集合表达数学内容的简洁性、准确性，提高运用集合语言交流的能力，还要注重训练逻辑思考的方法，如概括、类比等.

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示

状元学法 提纲挈领 一目了然



状元笔记 善于归纳 活学活用

知识点1 集合的概念及其元素的特征（★★★）

1. 概念：一般地，我们把研究对象统称为元素（element），把一些元素组成的总体叫集合（set），也简称集. 集合通常用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，元素通常用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示. 集合中的元素可以是人、物品、数学对象等，其种类没有限制. 高中阶段研究的集合主要是数集和点集.

2. 集合元素的特征：集合理论创始人康托尔称集合为一些确定的、不同的东西的全体，人们能意识到这些东西，并且能判断一个给定的东西是否属于这个总体，这恰好说明了集合的元素的两个特征：确定性和互异性.

①确定性：设 A 是一个给定的集合，x 是某一个具体对象，则 x 或者是 A 的元素，或者不是 A 的元素，两种情况有且只有一种成立，不会模棱两可. 例如“著名科学家”，“与 2 接近的数”等都不能组成集合. 无法用一个确定的标准表明某人是否是“著名科学家”，也没有标准确定“一个数是否与 2 接近”. 确定性成为判断集合概念成立的依据或标志.

②互异性：一个给定的集合中的元素是互不相同的，因此，同一集合中不应重复出现同一元素，如 $\{1,-2,1\}$ 就是一个错误的集合表示.

③无序性：集合中的元素没有固定的顺序，如集合 $\{1,2\}$ 与 $\{2,1\}$ 表示的是同一个集合.

④元素与集合之间是属于和不属于的关系，用“$\in$”，“$\notin$”表示，如 $1\in\{1,2\}$，$0\notin\{1,2\}$.

> **易错警示：**在集合中有字母时，要特别注意集合中元素的互异性.

3. 两个集合相等：只要构成两个集合 A,B 的元素是一样的，我们就称这两个集合相等，记为 $A=B$.

例 1 下列各组对象能确定一个集合吗？

（1）所有很大的实数；（2）$\sqrt{2}$ 的近似值的全体；（3）1，2，2，4，5；（4）不超过 20 的非负数；（5）某校 2006 年在校的所有高个子同学.

【解析】本题考查集合的概念，依据是集合的确定性，另外要注意元素的互异性.

【答案】“所有很大的数”，“某校 2006 年在校的所有高个子同学”标准不明确，所以（1）（5）不是集合. 诸如一些“优秀的”，“杰出的”等词均不构成集合.

（2）“$\sqrt{2}$ 的近似值”没有明确精确到什么程度，因此很难判断一个数（如 2）是不是它的近似值，所以也不能构成集合.

> **易错警示：**在判断某些对象能否构成集合时，对确定的特征理解不到位.

（3）对象中有重复现象，不能构成集合.

（4）“不超过 20 的非负数”，即“$0\leqslant x\leqslant 20$”，能构成集合.

故能构成集合的是（4），不能构成集合的是（1）（2）（3）（5）.

点拨：一些对象能否构成集合必须具备以下两个特点：一是整体性，二是确定性，其中“汇集在一起”一语，说明集合是指某些对象的整体而不是指其中的个别对象，这就是集合的整体性. 常用“所有的”、“总体”等词语体现. “确定的不同的对象”一语，说明集合中的元素是确定的，而且是互异的，一个对象要么是集合的元素，要么不是集合的元素，二者必居其一，这是集合的确定性.

跟踪训练

1. 下列各组对象：

①接近于 0 的数的全体；②比较小的正整数全体；③平面上到点 O 的距离等于 1 的点的全体；④正三角形的全体.

其中能构成集合的组数是（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

2. 下列各组对象中不能构成集合的是（　　）

A. 高一（1）班全体女生

B. 高一（2）班全体学生家长

C. 高一（3）班开设的所有课程

D. 高一（4）班身高较高的所有男同学

3. 下列各组对象：①不超过 π 的所有正整数；②高一新教材课本中的所有难题；③平方后等于自身的数；④中国的大城市；⑤某校 2009 年高一年级中考成绩在 500 分以上的学生.

其中能构成集合的是　(　　)

A. ①②④　B. ③④⑤　C. ①③⑤　D. ①②③

例2 设集合 $A=\{k^2+k,-2k\}$,求实数 k 的取值范围.

【解析】既然是集合,就应满足集合元素的互异性,那么其中的元素必不相等.

【答案】根据集合元素的互异性,有 $k^2+k\neq-2k$,解得 $k\neq0$ 且 $k\neq-3$,∴实数 k 的取值范围是 $\{k|k\neq0$ 且 $k\neq-3,k\in\mathbf{R}\}$.

点拨:集合中元素的互异性是一个隐含条件,解题时要多加注意,有意识的检验.

跟踪训练

4.(创新题)已知集合 $S=\{a,b,c\}$ 中的三个元素是△ABC 的三边长,则△ABC 一定不是　(　　)

A. 锐角三角形　B. 直角三角形

C. 钝角三角形　D. 等腰三角形

5.(讨论题)由实数 $x,-x,|x|,\sqrt{x^2},-\sqrt[3]{x^3}$ 所组成的集合中,元素的个数最多是　(　　)

A. 2　B. 3　C. 4　D. 5

6. 方程 $(x-1)^2=0$ 的解集中含有________个元素.

7.(讨论题)已知 $x^2\in\{0,1,x\}$,求实数 x 的值.

知识点2　元素与集合的关系(★★★)

(1)由于集合中的元素具有确定性,所以对于任意一个对象与一个集合的关系是确定的,即此对象要么是集合的元素,要么不是集合的元素.用"∈"或"∉"表示,二者必居其一.

①如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,记作 $a\in A$,如 $3\in\{1,2,3\}$.

②如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,记作 $a\notin A$,如 $4\notin\{1,2,3\}$.

(2)特定数集的表示

为了书写方便,我们规定常见的数集用特定的字母表示,下面是几种常见的数集表示方法要牢记.

①全体非负整数的集合通常简称非负整数集(或自然数集),记作 $\mathbf{N}$;

②非负整数集内去除0的集合,也称正整数集,记作 $\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$;

③全体整数的集合通常简称为整数集,记作 $\mathbf{Z}$;

④全体有理数的集合通常简称为有理数集,记作 $\mathbf{Q}$;

⑤全体实数的集合通常简称为实数集,记作 $\mathbf{R}$.

例3 用符号∈或∉填空:

(1)0________$\mathbf{N}^*$;$\sqrt{1}$________$\mathbf{Z}$;$(-1)^0$________$\mathbf{N}^*$.

(2)$2\sqrt{3}$________$\{x|x<\sqrt{11}\}$;$3\sqrt{2}$________$\{x|x>4\}$;$\sqrt{2}+\sqrt{5}$________$\{x|x\leqslant2+\sqrt{3}\}$.

(3)3________$\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$;5________$\{x|x=n^2+1,n\in\mathbf{N}^*\}$.

(4)$(-1,1)$________$\{y|y=x^2\}$;$(-1,1)$________$\{(x,y)|y=x^2\}$.

【解析】确定元素是否在集合中,要根据元素是否满足代表元素所适合的条件来确定.

【答案】(1)依次应填∉,∈,∈.

(2)∵$2\sqrt{3}=\sqrt{12}>\sqrt{11}$,$3\sqrt{2}=\sqrt{18}>\sqrt{16}=4$,

$(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2=7+2\sqrt{10}<7+2\sqrt{12}=(2+\sqrt{3})^2$,∴$\sqrt{2}+\sqrt{5}<2+\sqrt{3}$.

∴依次应填∉,∈,∈.

(3)∵$n\in\mathbf{N}^*$,∴$n^2+1\neq3$.∵$n=2$ 时,$n^2+1=5$.∴依次应填∉,∈.

(4)∵$\{y|y=x^2\}$ 中的元素是数,而$(-1,1)$代表一组有序实数对或代表一个点,

∴$(-1,1)\notin\{y|y=x^2\}$,∴依次应填∉,∈.

例4 已知 A 是形如 $a+b\sqrt{2}(a、b\in\mathbf{N}^*)$ 的数的全体组成的集合,判断 $\sqrt{2}$ 与集合 A 的关系.

【解析】依据集合的定义,判断一个元素是否在集合 A 中,只要判断一个元素能否写成 $a+b\sqrt{2}$ 的形式.

【答案】∵$\sqrt{2}=0+1\cdot\sqrt{2}$,$0\notin\mathbf{N}^*$,∴$\sqrt{2}\notin A$.

点拨:(1)在比较 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 与 $2+\sqrt{3}$ 的大小时,用到了平方法;

(2)判断某一对象是不是某一集合中的元素,就要看这个对象是否具有集合中元素所具有的属性.

跟踪训练

8.(原创题)用符号"∈"或"∉"填空.

(1)设 A 为所有亚洲国家组成的集合,则

中国________A,美国________A,印度________A,英国________A,日本________A,澳大利亚________A.

(2)镁________{第ⅡA族元素}.

9. 用符号"∈"或"∉"填空:

①π________$\mathbf{Q}$;②3.14________$\mathbf{Q}$;③$\frac{1}{\pi}$________$\mathbf{R}$.

10. 设 $a,b\in\mathbf{Z}$,形如 $a+\sqrt{5}b$ 的数构成集合 M,若 $x,y\in M$,则下列元素中不一定属于 M 的是　(　　)

A. $x+y$　B. $x-y$　C. xy　D. $\frac{x}{y}$

11. 若集合 M 中的元素 m 满足 $m=a+b\sqrt{2}$,其中 $a\in\mathbf{Q}$,$b\in\mathbf{Q}$,试判断 $x=\frac{1}{3-5\sqrt{2}}$,$y=2+\sqrt{2}\pi$ 与集合 M 的关系.

例5 已知集合 $A=\{x|x=m^2-n^2,m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}\}$,

求证:(1)$3\in A$;(2)偶数 $4k-2\ (k\in\mathbf{Z})$ 不属于 A.

【解析】3可以变形为两个整数的平方差的形式;偶数 $4k-2(k\in\mathbf{Z})$ 如果是集合 A 的元素则会产生矛盾,说明偶数 $4k-2\ (k\in\mathbf{Z})$ 不属于 A.

【答案】(1)$3=2^2-1^2$,∴$3\in A$.

(2)假设 $4k-2\in A$,则存在 $m、n\in\mathbf{Z}$,使 $4k-2=m^2-n^2$ 成立,即 $(m-n)(m+n)=4k-2$.

①当 m,n 同奇或同偶时,$m-n,m+n$ 均为偶数,

∴$(m-n)(m+n)$ 为4的倍数,与 $4k-2$ 不是4的倍数矛盾.

②当 m,n 分别为奇、偶数时,$m-n,m+n$ 均为奇数,

∴$(m-n)(m+n)$ 为奇数,与 $4k-2$ 是偶数矛盾.

综上可得 $4k-2\notin A$.

点拨:一个对象是不是集合的元素,关键要看此对象是否具备该集合元素的属性.在解析中,一般要对此对象或集合的代表元素变形.

跟踪训练

12. 下面有四个说法:(1)集合 $\mathbf{N}$ 中最小的数是1;(2)若 $-a$ 不属于 $\mathbf{N}$,则 a 属于 $\mathbf{N}$;(3)若 $a\in\mathbf{N}$,$b\in\mathbf{N}$,则 $a+b$ 的最小值为2;(4)$x^2+1=2x$ 的解集可表示为 $\{1,1\}$.其中说法正确的个数为　(　　)

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

13. 试说明实数 $m=\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}$ 与集合 $A=\{x|x=a+\sqrt{6}b,a\in\mathbf{Q},b\in\mathbf{Q}\}$ 的关系.

知识点3　集合的分类(★)

集合可根据它含有元素个数的多少分为两类：

(1)有限集：含有有限个元素的集合. 如“方程 $2x+1=0$ 的解组成的集合”,“由 1,3,5,7,9 组成的集合”,它们的元素个数是可数的,因此这两个集合是有限集. 用 card(A)表示 A 中元素的个数.

(2)无限集：含有无限个元素的集合. 如“到平面上两个定点的距离相等的所有点”,“所有的正方形”,组成上述集合的元素是不可数的,因此,它们都是无限集.

(3)特别地,我们把不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$,如“方程 $x^2+5=0$ 在实数范围内的解”,我们知道,方程 $x^2+5=0$ 在实数范围内无解,故其实数解集为空集.

由于 $\varnothing$ 中没有元素,card(A)$=0$,规定它属于有限集,空集虽不含任何元素,可它却有两个方面的作用：

①空集不包含任何元素,因此可以表示一些不存在的元素的集合,如方程 $x^2+1=0$ 的解在实数范围内不存在,但是应明确并非集合不存在.

易错警示：因对空集概念的理解不到位导致出错.

②空集可以联系两类没有公共属性的事物,如 $A=\{x|x$ 是三角形$\}$,$B=\{x|x$ 是四边形$\}$,那么既是三角形又是四边形的图形就不存在,可以记作 $\varnothing$.

③空集含有的元素个数为 0,但它与 0 是不相同的,有很大的区别.

④空集在反映集合与集合之间的关系上起到“桥梁”的作用,使一些难以表达的问题得到简明扼要的表达. 如点集 $A=\{(x,y)|x+y=16\}$,$B=\{(x,y)|y=-x^2\}$,则 A 与 B 的公共点简记为 $\varnothing$.

例6 下列各组对象能否形成集合？若能,请指出它们是有限集、无限集、还是空集.

(1)非负奇数；

(2)小于 18 的既是奇数又是质数的数；

(3)在平面直角坐标系中所有第三象限的点；

(4)在实数范围内方程 $(x^2-1)(x^2+2x+1)=0$ 的解集；

(5)在实数范围内方程组 $\begin{cases}x^2-x+1=0\\x+y=1\end{cases}$ 的解集.

【解析】 先确定各组对象能否构成集合,再看它的元素个数的多少,从而确定它是怎样的集合.

【答案】 (1)能,无限集；

(2)小于 18 的质数是 2,3,5,7,11,13,17. 只有 2 是偶数,其余都是奇数,所以能形成集合,有限集；

(3)第三象限的点的横坐标和纵坐标都小于 0,能形成集合,无限集；

(4)能,注意集合中元素的互异性,集合中的元素是 $-1,1$,有限集；

(5)由 $x^2-x+1=0$ 的判别式 $\Delta=-3<0$,方程无实根知方程组 $\begin{cases}x^2-x+1=0\\x+y=1\end{cases}$ 无解,能形成集合,是空集,有限集.

点拨：判断集合是有限集、无限集,还是空集,关键在于弄清集合的元素的构成,从而确定集合元素个数的多少.

跟踪训练

14. 给出四个集合：

①不超过 10 的正偶数的全体；②小于百万分之一的正有理数的全体；③方程 $x^2-4=0$ 的解集；④某实验田一年收获的玉米的全体. 其中无限集是　(　　)

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

15. 填空：集合 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 是________集；集合 $\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 是________集.(填“有限”或“无限”或“空”)

知识点4　列举法(★★)

把集合中的元素一一列举出来,写在大括号“{　　}”内表示这个集合的方法叫做列举法. 括号{}起到全体,所有的作用.

例如：方程 $x^2-1=0$ 的所有解组成的集合可以表示为 $\{-1,1\}$.

(1)如果一个集合是有限集,元素又不太多,可用列举法；

易错警示：未能从本质上理解列举法和特征性质描述法,导致判断失误.

(2)如果一个集合是有限集,元素个数较多,但元素呈现一定的规律,在不至于发生误解的情况下,也可列出几个元素作为代表,其他元素用省略号表示；如 $\{1,2,3,\cdots\}$ 表示正整数集,与 $\{1,2,\cdots,n\}$ 本质不同.

(3)对于无限集,一般不用列举法,如果构成该集合的元素有明显的规律,也可用列举法,但是必须把元素间的规律显示清楚后才能用省略号；

(4)用列举法表示集合时,元素间用逗号“,”分隔开,但是最后一个元素后面不再写分隔号；

(5)用列举法表示集合,元素不能重复；

(6)用列举法表示集合时,不必考虑元素的前后顺序.

例7 用列举法表示下列集合：

(1)绝对值小于 3 的所有自然数；

(2)方程 $x^2=x$ 的所有实数根组成的集合；

(3)由 1～20 中的所有质数组成的集合.

【解析】 用列举法表示集合,关键是求出集合中的元素,以上三个集合都是有限集,且集合中的元素较少,故可用列举法.

【答案】 (1)设绝对值小于 3 的自然数组成的集合为 A,那么 $A=\{0,1,2\}$.

(2)设方程 $x^2=x$ 的所有实数根组成的集合为 B,那么 $B=\{0,1\}$.

(3)设由 1～20 中的所有质数组成的集合为 C,那么 $C=\{2,3,5,7,11,13,17,19\}$.

点拨：用列举法表示集合,用{　　}将各个元素括起来,这里的大括号起到了全体,所有的作用,如 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

跟踪训练

16. 方程组 $\begin{cases}x+y=3\\x-y=-1\end{cases}$ 的解集可以用列举法表示为________.

例8 用列举法表示下列集合：

(1)在自然数集内,小于 200 的奇数构成的集合；

(2)不大于 400 的正偶数组成的集合；

(3)不大于 100 的自然数的全体构成的集合.

【解析】 以上三个有限集中,元素个数较多,但呈现一定的规律性,故可用列举法表示.

【答案】 (1)$\{1,3,5,7,\cdots,199\}$；

(2)$\{2,4,6,8,\cdots,400\}$；

(3)$\{0,1,2,3,\cdots,100\}$.

点拨：当有限集中元素个数较多而用列举法表示时，前面的元素一定要呈现出集合元素的变化规律，然后再用省略号，最后一个元素一定要写出，而且后面不再用分隔号.

跟踪训练

17. 用列举法表示下列集合：

(1)自然数中5个最小的完全平方数的全体；

(2)方程$(x+1)^2(x-2)=0$的所有根.

例9 用列举法表示下列集合：

(1)所有正奇数组成的集合；

(2)所有正偶数组成的集合；

(3)所有自然数组成的集合.

【解析】以上三个集合都是无限集，但集合中元素的规律性很强，故也可以用列举法表示.

【答案】(1)设所有正奇数组成的集合为A，则$A=\{1,3,5,7,\cdots,2n+1,\cdots\}$，其中$n\in\mathbf{N}$；

(2)设所有正偶数组成的集合为B，则$B=\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\}$，其中$n\in\mathbf{N}_+$；

(3)设所有自然数组成的集合为C，则$C=\{0,1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，其中$n\in\mathbf{N}$.

点拨：在用列举法表示集合时，必须用前面的元素把规律呈现清楚后，其他元素才能用省略号“…”表示，而且数学中的省略号一般是三个小圆点.

知识点5 描述法(★★★)

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号{}内.

用描述法表示集合时，在大括号内先写上集合中各元素的公共形式，即代表元素，然后划一竖线，在竖线后面写上代表元素的限制条件，即所有元素都满足的限制条件，即$\{x|P(x)\}$，其中x是代表元素，是集合中各元素的公共形式，而$P(x)$是x所满足的限制条件.

集合的语言形式有三种：文字语言，符号语言，图形语言.如，表示由直线$y=x$上所有的点组成的集合，可用下列三种方法：

方法1：文字语言形式：直线$y=x$上所有的点组成的集合；

方法2：符号语言形式：$\{(x,y)|y=x\}$；

方法3：图形语言形式：在平面直角坐标系内画出直线$y=x$(图略).

易错警示：因对集合的代表元素理解不到位，导致错误.

用描述法表示集合时，要注意以下几点：

(1)写清楚此集合的代表元素，集合中元素的意义就取决于它的代表元素，如：

集合$A=\{y|y=x^2\}$的元素为函数$y=x^2$的函数值，A为该函数的值域；

集合$B=\{x|y=x^2\}$的元素为函数$y=x^2$的自变量的取值，B为该函数的定义域；

集合$C=\{(x,y)|y=x^2\}$的元素为方程$y=x^2$的解，也可看成是函数$y=x^2$图象上的点，C是解集或点集.

(2)$\{x|x\neq1\}$的写法应是$\{x\in\mathbf{R}|x\neq1\}$说明该集合中元素的性质.

(3)不能出现未被说明的字母.

(4)多层描述时，应当准确使用“且”、“或”.

(5)所有描述的内容都要写在集合符号内.

(6)用于描述的语句力求简明、准确.

例10 用描述法表示下列集合：

(1)方程$x^2-2=0$的所有实数根组成的集合；

(2)由大于10小于20的所有整数组成的集合.

【解析】用描述法表示集合，关键是弄清楚集合的代表元素和代表元素所满足的属性.

【答案】(1)方程$x^2-2=0$的实数根为x，并且满足条件$x^2-2=0$，因此$A=\{x\in\mathbf{R}|x^2-2=0\}$.

(2)大于10小于20的整数为x，它满足条件$x\in\mathbf{Z}$，且$10<x<20$，因此$B=\{x\in\mathbf{Z}|10<x<20\}$.

点拨：如果从上下文的关系来看，$x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$等是明确的，那么$x\in\mathbf{R}$，$x\in\mathbf{Z}$可以省略，如(1)中$x\in\mathbf{R}$可以省略，但(2)中$x\in\mathbf{Z}$不可省略；又如集合$C=\{x\in\mathbf{R}|x<10\}$，也可表示为$C=\{x|x<10\}$，但$\{x|x\neq10\}$的写法就不如$\{x\in\mathbf{R}|x\neq10\}$恰当，因为$x<10$就意味着$x\in\mathbf{R}$，但$x\neq10$没有$x\in\mathbf{R}$这个隐含条件，故不能省略$x\in\mathbf{R}$这个条件；再如集合$D=\{x\in\mathbf{Z}|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，也可表示为$D=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$.

跟踪训练

18. 用适当的方法表示下列集合：

(1)由所有非负偶数组成的集合；

(2)由所有小于20的既是奇数又是质数的正整数组成的集合；

(3)x^2-9的一次因式组成的集合；

(4)方程$(x-1)(x-2)(x-5)^2=0$的解组成的集合；

(5)直角坐标系内第三象限的点组成的集合；

(6)以O为圆心，1为半径的圆上的点组成的集合.

19. 用描述法表示下列集合：

(1)方程$6x^2-5x+1=0$的整数解集；

(2)方程$6x^2-5x+1=0$的实数解集；

(3)大于3的全体偶数构成的集合；

20. 用描述法表示下列集合：

(1)所有被5整除的数；

(2)图1.1.1－1中阴影部分的点(含边界)的坐标的集合.

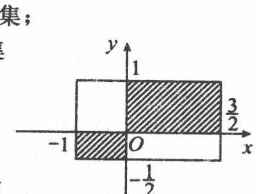


图1.1.1－1

21. 设P表示平面内的动点，属于下列集合中的点组成什么图形？

(1)$\{P|PA=PB\}$(A、B是两个定点)；

(2)$\{P|PO=3\text{ cm}\}$(O是定点).

知识点6 图示法(★)

表示集合的方法中，除了列举法和描述法外，还有一种方法，那就是图示法，是用图形语言来表示集合的.

例11 用描述法表示图1.1.1－2中阴影部分点的坐标的集合.

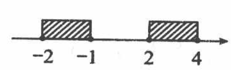


图1.1.1－2

【解析】本题主要考查图形语言与集合语言间的相互转化能力，首先要读懂图1.1.1－2中所表达的信息，然后用数学语言表达出来.

【答案】用描述法表示为$\{x|-2\leqslant x\leqslant-1$或$2\leqslant x\leqslant4\}$.

点拨:用图形表示集合,直观形象易于理解,特别是用线段表示集合时,对于一元一次不等式表示的集合尤为方便,但是应注意端点的虚实.

跟踪训练

22. 用描述法表示图 1.1.1—3 中阴影部分点的坐标(不含边界)的集合.

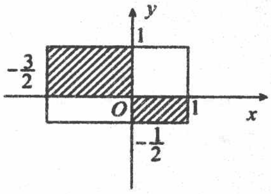


图 1.1.1—3

例 12 已知集合 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}=\{a^2,a+b,0\}$,求 $a^{2007}+b^{2008}$.

易错警示:集合元素特性中的互异性,在考查中往往是一个隐含条件,特别是集合中含有字母参数时,往往容易忽略致错.解题中要特别注意.

【答案】由 $\left\{a,\frac{b}{a},1\right\}$ 可得,$a\neq1$,且 $a\neq0$.

$\therefore \begin{cases}a^2=1,\\a=a+b,\\\frac{b}{a}=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a+b=1,\\a^2=a,\\\frac{b}{a}=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=0,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=1,\\b=0\end{cases}$(舍去).

$\therefore \begin{cases}a=-1\\b=0\end{cases}$,$a^{2007}+b^{2008}=(-1)^{2007}+0=-1$.

点拨:本题重点考查集合中元素的互异性,注意到 $a\neq1$,且 $a\neq0$,问题才变得易于解决.

跟踪训练

23. 数集 $\{2,a,a^2-a\}$ 中,实数 a 的取值范围是________.

易错警示:空集是特殊的集合,在考虑问题时要充分理解空集的实质,以免因理解不到位致错.

例 13 (原创题)下列集合是空集的是 ( )

A. 方程 $x^3=0$ 的实数根组成的集合

B. "中国 2007CBA 联赛中的外星球队所有队员"组成的集合

C. 所有自然数组成的集合

D. 某校高一(1)班的任课老师组成的集合

【解析】充分利用空集的特性——集合中不含任何元素.对 B,找不到适合该集合的元素,故它是空集,所以选 B.

【答案】B

点拨:本题主要考查对空集概念的理解.

跟踪训练

24. (多选题)下列关系错误的是 ( )

A. $0\in\{0\}$　　B. $0\in\varnothing$　　C. $\varnothing=\{\varnothing\}$

D. $\varnothing\in\{\varnothing\}$　　E. $0=\varnothing$

例 14 集合 $A=\{x^2,3x+2,5y^3-x\}$,$B=\{$周长等于 20 cm 的三角形$\}$,$C=\{x\in\mathbf{R}\mid x-3<2\}$,$D=\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$,其中用描述法表示集合的个数为 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【解析】描述法有两种形式,一种是文字描述,如"所有四边形组成的集合"记为 $\{x\mid x$ 是四边形$\}$,在不致混淆的情况下,可以省去"|"及其左边的部分,直接写成{四边形},而不能写成{所有四边形};因为大括号本身有全部的意思,故用文字描述集合时,应去掉含有"整体""全部"的词;另一种是数学描述,如"所有非负数组成的集合"记为 $\{x\mid x\geqslant0,x\in\mathbf{R}\}$. $\varnothing\in\{\varnothing\}$ 与 $\varnothing\subsetneqq\{\varnothing\}$ 均正确. A 是列举法,B、C、D 是描述法,故选 C.

易错警示:列举法和特征性质描述法是集合的两种常用表达形式,在应用时要深刻理解它们的实质,特别是描述法,要深刻理解特征性质,否则容易出错.

【答案】C

点拨:本题要注意 B 是描述法,不要误认为是列举法,而错选 B.

跟踪训练

25. 已知集合 $A=\{x\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

$B=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$

试判断 0 与 A、B、C 的关系.

例 15 用列举法表示下列集合:

(1) $A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{9}{9-x}\in\mathbf{N}\right\}$;

(2) $B=\left\{\frac{9}{9-x}\in\mathbf{N}\,\middle|\,x\in\mathbf{N}\right\}$;

(3) $C=\{y\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(4) $D=\{(x,y)\mid y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$;

(5) $E=\left\{x\,\middle|\,\frac{p}{q}=x,p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*\right\}$

易错警示:用描述法表示集合时,要特别注意这个集合中的元素是什么,它应具备哪些特性,从而准确地理解集合的意义,否则容易出错.

【解析】首先,应充分注意五个集合的各自特点:

集合 A 中的元素是自然数 x,它必须满足条件 $\frac{9}{9-x}$ 也是自然数;

集合 B 中的元素是自然数 $\frac{9}{9-x}$,其中 x 也是自然数;

集合 C 中的元素是自然数 y,它必须满足的条件是二次函数 $y=-x^2+6(x\in\mathbf{N})$ 的函数值为自然数;

集合 D 中的元素是点,这些点必须满足的条件是它们在二次函数 $y=-x^2+6$ 的图象上,且横坐标,纵坐标都必须是自然数;

集合 E 中的元素是 x,它必须满足的条件是 $x=\frac{p}{q}$,其中 $p+q=5$,且 $p\in\mathbf{N}$,$q\in\mathbf{N}^*$.

【答案】(1)当 $x=0,6,8$ 这三个自然数时,$\frac{9}{9-x}=1,3,9$ 是自然数. $\therefore A=\{0,6,8\}$.

(2)由(1)知,$B=\{1,3,9\}$.

(3)由 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$ 知,$y\leqslant6$,

$\therefore x=0,1,2$ 时,$y=6,5,2$ 符合题意,

$\therefore C=\{2,5,6\}$.

(4)点 (x,y) 满足条件 $y=-x^2+6,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}$,则有

$\begin{cases}x=0,\\y=6;\end{cases}\begin{cases}x=1,\\y=5;\end{cases}\begin{cases}x=2,\\y=2;\end{cases}$

所以 $D=\{(0,6),(1,5)(2,2)\}$.

(5)依题意,$p+q=5,p\in\mathbf{N},q\in\mathbf{N}^*$,则

$\begin{cases}p=0,\\q=5;\end{cases}\begin{cases}p=1,\\q=4;\end{cases}\begin{cases}p=2,\\q=3;\end{cases}\begin{cases}p=3,\\q=2;\end{cases}\begin{cases}p=4,\\q=1;\end{cases}$

x 要满足条件 $x=\frac{p}{q}$. $\therefore E=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{2}{3},\frac{3}{2},4\right\}$.

点拨:本题中的集合 A 与 B、C 与 D 这两组集合,看起来似乎是一致的,但其实含义各异,故解决此类问题的关键是:正确理解构成集合元素的含义,尤其是集合的代表元素是什么,因而在解题时,应细心审题、注意区别.

跟踪训练

26.(探究题)下面三个集合:①$\{x|y=x^2+1\}$;②$\{y|y=x^2+1\}$;③$\{(x,y)|y=x^2+1\}$.

问:它们是不是相同的集合?

状元思维 提高素质 培养兴趣

探究1 分类讨论

当问题不易按同一标准解决时,要适时地选择好分类标准,进行恰当的讨论. 在分类讨论中,关键是分类的标准要明确,做到不重不漏.

例16 已知集合 $A=\{x|ax^2+2x+1=0,a\in\mathbf{R}\}$.

(1)若 A 中只有一个元素时,求 a 的值;

(2)若 A 中至多只有一个元素,求 a 的取值范围.

【解析】(1)集合 A 就是方程 $ax^2+2x+1=0$ 的解集. 那么解方程就需要对方程的类型进行分类,分为一元一次或一元二次两种,即 $a=0$ 或 $a\neq0$ 两种情况进行讨论.

(2)集合至多含有一个元素,就本题而言分恰有一个元素和集合没有元素两种情形.

【答案】(1)当 $a=0$ 时,方程变化为 $2x+1=0$,$\therefore x=-\frac{1}{2}$,

$\therefore A=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$,$\therefore a=0$;

当 $a\neq0$ 时,则必须 $\Delta=4-4a=0$,$\therefore a=1$.

综上知 $a=0$ 或 $a=1$ 时,A 只含一个元素.

(2)A 中至多一个元素分 A 中恰好一个元素和 A 中没有元素两种情况.

当 A 只含有一个元素时,由(1)知 $a=0$ 或 1.

当 A 不含元素时,$\Delta=4-4a<0$.

$\therefore a>1$.

综上知,$a=0$ 或 $a\geqslant1$ 时 A 中至多含有一个元素.

跟踪训练

27.已知集合$\{a,a+d,a+2d\}$,也可以表示为$\{a,aq,aq^2\}$,$a\neq0$,求 q 的值.

28.已知数集 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$,且 $1\in A$,求实数 a 的值.

探究2 列举法和描述法的灵活应用

集合有三种表示方法,即列举法、描述法、图示法. 它们各有优点,用什么方法来表示集合,要具体问题具体分析. 同一数学研究对象,往往可用不同的语言形态表达,在平时学习中要重视各种语言形式间的互译,这对将来提高解题能力大有益处.

例17 用列举法表示下列集合:

(1)$A=\{x||x|\leqslant2,x\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$B=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}2x+y=8\\x-y=1\end{cases}\right\}$;

(3)$M=\{x|(x-2)^2(x-3)=0\}$.

【解析】用列举法表示集合,元素不重复,不计次序但尽量按规律排列,以防遗漏,而且元素与元素之间要用逗号“,”隔开,当集合中元素个数较少或规律性较强时,用列举法表示集合较为方便,而且能使人一目了然.

【答案】(1)$\because|x|\leqslant2,x\in\mathbf{Z}$,$\therefore x=-2,-1,0,1,2$,从而 $A=\{-2,-1,0,1,2\}$;

(2)$B=\{(3,2)\}$; (3)$M=\{2,3\}$.

点拨:在表示集合时,要根据题意选择适当的表示方法,对于有限集且元素个数较少时,常用列举法. 因此判定所给集合是有限集还是无限集,是选择恰当的表示方法的关键.

跟踪训练

29.(原创题)用列举法写出$\{(x,y)|x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+,x+y=4\}$.

30.用列举法表示集合:$\left\{x\middle|x=\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b},a、b\text{为非零实数}\right\}$.

31.(1)已知集合 $M=\left\{x\in\mathbf{N}\middle|\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\right\}$,求 M;

(2)已知集合 $C=\left\{\frac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}\middle|x\in\mathbf{N}\right\}$,求 C.

例18 用描述法表示下列集合

(1)$\{2,4,6,8\}$;

(2)$\{2,3,4\}$;

(3)$\left\{\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{4}{6},\frac{5}{7}\right\}$.

【解析】用描述法表示集合,关键是搞清楚集合中元素的特征性质.

【答案】(1)$\{x|x=2n,1\leqslant n\leqslant4,n\in\mathbf{N}\}$;

(2)$\{x|2\leqslant x\leqslant4,x\in\mathbf{N}\}$或$\{x|(x-2)(x-3)(x-4)=0\}$;

(3)$\{x|x=\frac{n}{n+2},n\in\mathbf{N}_+$ 且 $n\leqslant5\}$.

点拨:作为集合的两种基本表示法——列举法与描述法,一定要通过练习,实现两者的转化,帮助学生理解特征性质描述法代表元素的意义,能用特征性质描述法表示集合.

跟踪训练

32.对于 0,2,4,6,…,2 002,2 004 组成的集合,给出下列四种表示形式:

①$\{x|x=2n$, 且 $0\leqslant n\leqslant1\ 002\}$;②$\{x\in\mathbf{N}|x=2n$,且 $0\leqslant n\leqslant1\ 003\}$;③$\{x\in\mathbf{Z}|x=2n$,且 $0<n<1\ 003\}$;④$\{x|\frac{x}{2}=n$,且 $n=0,1,2,\cdots,1\ 002\}$.

在以上四种表达形式中,正确的是 ( )

A.① B.② C.③ D.④

探究3 集合与方程、不等式的联系

集合是数学的基础知识,形式各异,主要与方程、不等式、函数等知识相联系. 解决集合问题,应对集合的含义深刻理解,这就往往用到反映集合元素特性的方程、不等式、函数等的有关知识. 把集合的表达式转化为相关的数学知识,是解题的关键,因为集合离不开元素,所以分析元素是解决问题的核心.

例19 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}|ax^2-3x+2=0,a\in\mathbf{R}\}$,

若 A 中的元素至多一个,求 a 的取值范围;

> **易错警示**:本题中的条件“$a=0$”易被忽视.

【解析】讨论方程 $ax^2-3x+2=0$ 的实数根情况,从中确定 a 的取值范围,依题意方程有一个实数根或有两个相等的实

数根或无实数根.

【答案】分以下两种情况:

1. $a=0$ 时,原方程为 $-3x+2=0$,$x=\frac{2}{3}$,符合题意.

2. $a\neq0$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 为一元二次方程.

$\Delta=9-8a\leqslant0$,即 $a\geqslant\frac{9}{8}$,

∴当 $a\geqslant\frac{9}{8}$ 时,方程 $ax^2-3x+2=0$ 无实数根或有两个相等的实数根,这都符合题意.

综合 1、2,知 $a=0$,或 $a\geqslant\frac{9}{8}$.

点拨:"$a=0$"这种情况容易被忽视,对于"方程 $ax^2-3x+2=0$"有两种情况:一是"$a=0$",即它是一元一次方程;二是"$a\neq0$",即它是一元二次方程,也只有在这种情况下才能用判别式 Δ 来解决问题,当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的根.此时集合 A 中也只有一个元素.

跟踪训练

33. 若集合 $A=\{x|x^2+(a-1)x+b=0\}$ 中仅有一个元素 a,求 $a+b$ 的值.

探究 4　创新应用

在高考中,经常会出现一些新情景的题目,这些题目往往难度不大,但要求我们细心、认真,深刻地领会题目的意义.

例 20 (1)定义集合运算:$A\odot B=\{z|z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$,设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为　(　　)

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

(2)定义 $A-B=\{x|x\in A,x\notin B\}$,若 $M=\{1,2,3,4,5\}$,$N=\{2,3,6\}$,试用列举法表示集合 $N-M$.

【解析】这是一道创新题,将集合 A 与 B 给了一个新的定义,对⊙这个符号要准确的理解.$A-B$ 的运算与普通的实数集上的减法运算有本质的不同.

【答案】(1)$A\odot B=\{0,6,12\}$

$0+6+12=18$,故选 D.

(2)据定义,$N-M=\{6\}$.

跟踪训练

34. 设"$*$"是集合 A 中元素的一种运算,如果对于任意的 $x,y\in A$,都有 $x*y\in A$,则称运算"$*$"对集合 A 是封闭的,若 $M=\{x|x=a+\sqrt{2}b,a,b\in\mathbf{Z}\}$,$\mathbf{Z}$ 为整数集,则对集合 M 不封闭的运算是　(　　)

A. 减法　　B. 乘法　　C. 除法　　D. 乘方

35. 设 A、B 为两个非空实数集合,定义 $A+B=\left\{\frac{a}{b}\middle|a\in A,b\in B\right\}$,若 $A=\{2,3,5\}$,$B=\{1,2,6\}$,则 $A+B$ 中元素的个数是　(　　)

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

36. 定义集合运算 $P*Q=\{x|x=\sqrt{ab},a\in P,b\in Q\}$,设集合 $P=\{1,2,4\}$,$Q=\{4,6,8\}$,则集合 $P*Q$ 中共有元素的个数是　(　　)

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

37. 数集 M 满足条件:若 $a\in M$,则 $\frac{1+a}{1-a}\in M(a\neq\pm1$ 且 $a\neq0)$,已知 $3\in M$,试把由此确定的集合 M 的元素全部求出来.

状元实践　借鉴高考　未雨绸缪

集合作为高中数学的一种基本语言及工具,在高考中属于必考内容,多以选择题、填空题的形式出现.在本节中主要考查对集合含义的了解,体会集合与元素的"属于"关系,能选择自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题.命题趋势仍然是结合方程、不等式、函数等知识,但要注意"新定义"在本部分的应用.

例 21 (2010·福建文)对于平面上的点集 Ω,如果连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω,则称 Ω 为平面上的凸集,给出平面上 4 个点集的图形如下(阴影区域及其边界).其中为凸集的是________(写出所有凸集相应图形的序号).

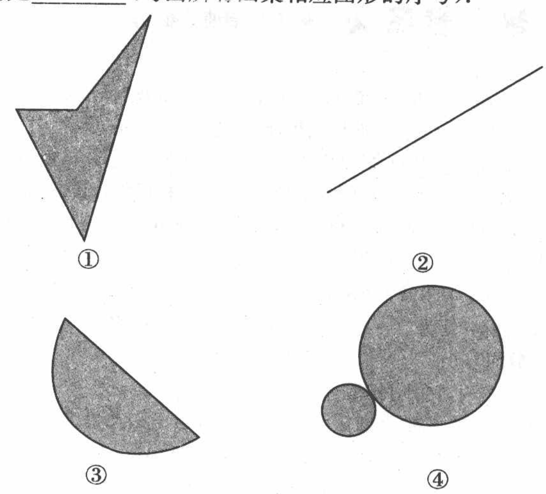


图 1.1.1—4

【解析】利用平面上的凸集的新定义知:连接 Ω 中任意两点的线段必定包含于 Ω,那么对于①中多边形的最上面的两个角上相应的两点的连线就不包含于 Ω,而对于④中分别在两个圆中各取一点的连线就不包含于 Ω,对于②和③满足平面上的凸集的新定义.

【答案】②③

跟踪训练

38. (2009·北京理)已知数集 $A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}(1\leqslant a_1<a_2<\cdots\leqslant a_n,n\geqslant2)$ 具有性质:对任意的 $i,j(1\leqslant i\leqslant j\leqslant n)$,$a_ia_j$ 与 $\frac{a_j}{a_i}$ 两数中至少有一个属于 A.分别判断数集 $\{1,3,4\}$ 与 $\{1,2,3,6\}$ 是否具有性质 P,并说明理由.

状元心得　图解归纳　了然于胸

规律方法总结	易错误区总结
掌握的打"√"	犯过的打"!"
1. 元素的确定性可以判断一个对象是否是一个集合的元素,互异性可判断一个集合的表示是否正确.(　)	1. "个子高的人"能形成集合.(　)
2. 用描述法表示集合 A,它的表述形式为 $A=\{x\in I\|P(x)\}$,其中 x 是 A 的元素,$x\in I$ 且 x 满足特征性质 $P(x)$.(　)	2. $0\notin\mathbf{N}$.(　)
3. 在一定条件下,能选取比较适当的方法表示集合.(　)	3. "所有的正三角形"形成的集合为{所有的正三角形}.(　)
4. 会理解集合的含义.(　)	4. $\{y\|y=2x^2,x\in\mathbf{R}\}=\{x\|y=2x^2,x\in\mathbf{R}\}=\{(x,y)\|y=2x^2,x\in\mathbf{R}\}$.(　)
	5. $\{y\|y=2x-1,x\in\mathbf{R}\}\neq\{z\|z=2x-1,x\in\mathbf{R}\}$.(　)
	6. 方程 $ax^2+2x-3=0$ 是关于 x 的一元二次方程.(　)

状元素养 补充知识 拓展视野

华罗庚

华罗庚(1910年11月12日～1985年6月12日),生于江苏金坛,卒于日本东京.中国著名数学家,中国科学院院士.他是中国解析数论、典型群、矩阵几何学、自守函数论与多元复变函数等很多方面研究的创始人与奠基者,也是中国在世界上最有影响的数学家之一.

他在解析数论方面的成就尤其广为人知,国际上颇具名气的"中国解析数论学派"即是以华罗庚为首开创的学派,该学派对于质数分布问题对哥德巴赫猜想作出了许多重大贡献.他在多元复变数函数论方面的贡献,更是影响到了世界数学的发展.按丘成桐的看法,他是三个对当代世界数学潮流有影响的中国数学家之一.另两个人是陈省身和冯康.他还是著名的社会活动家,曾当选为一至六届全国人大常委会委员,第六届全国政协副主席,中国民主同盟副主席.1979年加入中国共产党.

1985年6月12日,华罗庚应邀到日本东京作学术报告,报告结束后突然心脏病发倒在讲台上,送院后证实不治.

他的研究成果被国际数学界命名为"华氏定理"、"布劳威尔—加当—华定理"、"华—王方法"、"华氏算子"、"华氏不变式"等.他一生留下了200篇学术论文,10部专著,还有10余部科普作品.

答案专区 详解详析 启迪思维

1. A 解析:"接近于0的数"、"比较小的正整数"标准不明确,所以①②不是集合,③④能构成集合.∴选A.

2. D 解析:"身高较高"标准不明确,所以不能构成集合,所以选D.

3. C 解析:①③⑤中的对象的性质明确,能构成集合;②中的"难题"没有明确的标准,难以确定;④中的"大城市"也是没有明确的标准,无法确定,故本题选C.

4. D 解析:由集合中元素的互异性可知a,b,c互不相等,∴选D.

5. A 解析:因为$\sqrt{x^2}=|x|,-\sqrt[3]{x^3}=-x$,所以当$x=0$时,这几个实数均为0;

当$x>0$时,它们分别是$x,-x,x,x,-x$;

当$x<0$时,它们分别是$x,-x,-x,-x,-x$,都最多表示两个不同的数.故集合中的元素最多为2个.∴选A.

6. 1 解析:由$(x-1)^2=0$得方程的解

$x_1=x_2=1$

故组成集合$\{1\}$,是单元素集,集合元素个数为1.

7. 解析:当$x^2=0$时,得$x=0$,此时集合中有两个相同的元素,舍去.当$x^2=1$时,得$x=\pm1$.

若$x=1$,此时集合中有两个相同的元素,舍去.

若$x=-1$,此时的集合为$\{0,1,-1\}$,适合题意.

当$x^2=x$时,得$x=0$,或$x=1$,由上可知都不适合题意.

综上可知,适合题意的x的值为-1.

点拨:本题主要考查了集合中元素的互异性,同时也考查了无序性,既然x^2是集合中的元素,则它既可能是1,也可能是0或其他元素,对此需要进行分类讨论.

8. (1)$\in$ $\notin$ $\in$ $\notin$ $\in$ $\notin$ (2)$\in$

9. ①$\notin$ ②$\in$ ③$\in$

10. D 解析:举例如$x=1+\sqrt5,y=2+2\sqrt5$,但$\frac{x}{y}=\frac12\notin M$,故选D.

11. 解析:$\because x=\frac{1}{3-5\sqrt2}=\frac{3+5\sqrt2}{(3-5\sqrt2)(3+5\sqrt2)}=-\frac{3}{41}-\frac{5\sqrt2}{41}$.

且$-\frac{3}{41}\in\mathbf{Q},-\frac{5}{41}\in\mathbf{Q}$.

$\therefore x\in M$.

$\because y=2+\sqrt2\pi,2\in\mathbf{Q},\pi\notin\mathbf{Q}$.

$\therefore y\notin M$.

12. A 解析:(1)最小的自然数应该是0;(2)反例:$-0.5\notin\mathbf{N}$,但$0.5\notin\mathbf{N}$;(3)当$a=0,b=1$时,$a+b=1$;(4)不满足元素的互异性,故选A.

13. 解析:$(\sqrt{2-\sqrt3}+\sqrt{2+\sqrt3})^2=6,\sqrt{2-\sqrt3}+\sqrt{2+\sqrt3}=\sqrt6$.当$a=0,b=1$时,$\sqrt6$属于该集合,$\therefore m\in A$.

14. B 解析:①2,4,6,8,10,有限集;③$x_1=-2,x_2=2$,有限集;④一年收获的玉米,虽然我们不能具体的知道是多少,但我们知道它是有限的,可数的.故选B.

15. 有限 无限 解析:对于有限和无限应从本质上去理解.

16. $\{(1,2)\}$

17. 解析:(1)按自然数中由小到大逐个检验

$\because 0=0^2$

$1=1^2$

$4=2^2$

$9=3^2$

$16=4^2$

$\therefore A=\{0,1,4,9,16\}$

(2)由$(x+1)^2(x-2)=0$得

$x_1=x_2=-1,x_3=2$

故$B=\{-1,2\}$.

18. 解析:(1)$\{x|x=2n,n\in\mathbf{N}\}$,或$\{0,2,4,\cdots\}$;

(2)$\{3,5,7,11,13,17,19\}$;

(3)$\{x-3,x+3\}$;

(4)$\{1,2,5\}$;

(5)$\{(x,y)|x<0,且y<0\}$;

(6)$\{P||PO|=1\}$

点拨:列举法和描述法都是表示集合的方法,要明确在什么条件下表示集合宜用列举法,在什么条件下表示集合宜用描述法.

19. 解析:(1)该集合可表示为$\{x\in\mathbf{Z}|6x^2-5x+1=0\}$;

(2)该集合可表示为$\{x\in\mathbf{R}|6x^2-5x+1=0\}$;

(3)该集合可表示为$\{x|x=2k,k>1,k\in\mathbf{N}\}$.

点拨:用描述法表示集合,需找准x所属的集合I和集合的一个特征性质$P(x)$.

20. 解析:(1)$\{x|x=5n,n\in\mathbf{Z}\}$;

(2)$\{(x,y)|-1\leqslant x\leqslant\frac32,-\frac12\leqslant y\leqslant1,且xy\geqslant0\}$.

点拨:(1)要写清楚集合中的代表元素,并写准确元素的特征性质.

(2)要清楚集合中的元素是坐标,有序实数对,而不是数集,不要漏掉$xy\geqslant0$.

21. 解析:(1)平面内线段AB的垂直平分线;

(2)平面内以O为圆心,以3 cm为半径的圆.

22. 解析:用描述法表示为

$$\left\{(x,y)\middle|-\frac32<x<1,-\frac12<y<1,且xy<0\right\}$$

点拨:集合中的代表元素是点的坐标,有序实数对,要注意边界是否被包含在内.

23. $\{a|a\in\mathbf{R},且a\neq0,且a\neq2,且a\neq-1\}$

解析:根据集合元素的互异性,$a\neq2$,且$a^2-a\neq2$,且$a^2-a\neq a$,由$a^2-a=2$得$a=-1$或$a=2$,故$a\neq-1$,且$a\neq2$.由$a^2-a=a$得$a=0$

或$a=2$. 故$a\neq0$,且$a\neq2$.

$\therefore a\neq0$,且$a\neq2$,且$a\neq-1$.

$\therefore a$的取值范围是$\{a|a\in\mathbf{R}$,且$a\neq0$,且$a\neq2$,且$a\neq-1\}$.

24. BCE　解析:A显然正确,B应为$0\notin\varnothing$,C不正确,$\because\varnothing$中没有任何元素,而$\{\varnothing\}$中有一个元素,是符号"$\varnothing$",D正确,E错误.

25. 解:$\because A=\{x|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$中的代表元素是$x$,那么集合$A$是满足$x\in\mathbf{R}$的全体,因此,$A=\mathbf{R}$.

$\therefore 0\in A$;

又$\because B=\{y|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$中的代表元素是$y$,而$y=x^2+1\geqslant1$.

$\therefore B$是大于或等于1的所有实数的全体,实质上集合B就是函数$y=x^2+1$的值域,$\therefore$集合$B=\{y|y\geqslant1\}$. $\therefore 0\notin B$;

而$C=\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$,它的代表元素是有序数对$(x,y)$,是点的坐标,可以看作点,那么集合$C$就是函数$y=x^2+1$的图象上的所有点的集合,可以看作图形,而0是一个实数,因此,$0\notin C$.

点拨:上述三个集合的限制条件一样,只是代表元素不同,从而使得三个集合有本质的不同,因此讨论集合要注意区分集合中的元素的代表形式,但有时元素的代表形式又不影响集合. 如$A=\{x|x\geqslant1\}$,$B=\{y|y\geqslant1\}$. $A=B$,尽管它们的代表形式不同,应注意识别.

26. 解析:由于三个集合的代表元素互不相同,又特征性质不同,所以它们是互不相同的集合.

27. 解析:假设$\begin{cases}a+d=aq & (1)\\ a+2d=aq^2 & (2)\end{cases}$

(2)−(1)得$d=aq(q-1)$,代入(1)得

$q=1$,$\therefore a=aq=aq^2$,矛盾,

$\therefore\begin{cases}a+d=aq^2 & (3)\\ a+2d=aq & (4)\end{cases}$

(3)−(4)得$d=aq(1-q)$.

代入(3)得$2q^2-q-1=0$,$\therefore q=-\dfrac{1}{2}$.

点拨:本题主要考查分类讨论的思想和集合元素的互异性.

28. 解析:分别令集合中的三个元素为1.

当$a+2=1$时,得$a=-1$,此时$A=\{1,0,1\}$;当$(a+1)^2=1$时,得$a=0$或$a=-2$,此时$A=\{2,1,3\}$或$A=\{0,1,1\}$;当$a^2+3a+3=1$时,得$a=-1$或$a=-2$,此时$A=\{1,0,1\}$或$A=\{1,0,1\}$.

由集合中元素的互异性,可知$a=-1$或$a=-2$时不成立,$\therefore a=0$.

29. 解析:$\because x\in\mathbf{N}_+,y\in\mathbf{N}_+,x+y=4$,

$\therefore\begin{cases}x=1,\\ y=3.\end{cases}\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}\begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$

$\therefore$ 用列举法表示为$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

点拨:集合的代表元素是有序数组,这一点要搞清楚.

30. 解析:首先根据绝对值的意义化简$x=\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}$

当$a>0,b>0$时,$x=2$;

当$a<0,b<0$时,$x=-2$;

当$a>0,b<0$,或$a<0,b>0$时,$x=0$.

故用列举法表示为$\{-2,0,2\}$.

点拨:对给出的集合,首先要搞清楚集合中的元素指的是什么,元素需满足什么条件,区别符号语言所表达的含义.

31. 解析:(1)$\because x\in\mathbf{N}$,且$\dfrac{6}{1+x}\in\mathbf{Z}$,

$\therefore 1+x=1,2,3,6$. $\therefore x=0,1,2,5$.

$\therefore M=\{0,1,2,5\}$.

(2)结合(1)知,$\dfrac{6}{1+x}=6,3,2,1$.

$\therefore C=\{6,3,2,1\}$.

点拨:集合M、C中元素的形式不一致,要正确认识. 集合M中的元素是自然数x,满足条件的$\dfrac{6}{1+x}$是整数;集合C中的元素是整数$\dfrac{6}{1+x}$,满足条件的x是自然数.

32. D

33. 解析:由题意知:方程$x^2+(a-1)x+b=0$有两个相等的实根a,

根据韦达定理,得$\begin{cases}2a=-(a-1)\\ a^2=b\end{cases}$,

解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\ b=\dfrac{1}{9}\end{cases}$.

$\therefore a+b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{9}$.

34. C　解析:取$x=1-\sqrt{2}$,$y=\sqrt{2}$,则$\dfrac{x}{y}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\because\dfrac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$　$\therefore\dfrac{x}{y}\notin M$,故选C.

35. B　解析:$a=2$,

$b=1\Rightarrow\dfrac{a}{b}=2$;

$b=2\Rightarrow\dfrac{a}{b}=1$;

$b=6\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{3}$;

$a=3$,

$b=1\Rightarrow\dfrac{a}{b}=3$;

$b=2\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{3}{2}$;

$b=6\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{1}{2}$;

$a=5$,

$b=1\Rightarrow\dfrac{a}{b}=5$;

$b=2\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{2}$;

$b=6\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{5}{6}$;

故选B.

36. C　解析:$\because a=1$,

$b=4\Rightarrow ab=4$;

$b=6\Rightarrow ab=6$;

$b=8\Rightarrow ab=8$.

$a=2$,

$b=4\Rightarrow ab=8$;

$b=6\Rightarrow ab=12$;

$b=8\Rightarrow ab=16$.

$a=4$,

$b=4\Rightarrow ab=16$;$b=6\Rightarrow ab=24$;

$b=8\Rightarrow ab=32$.

$\therefore$共有7个元素,故选C.

37. 解析:$\because 3\in M$,$\therefore\dfrac{1+a}{1-a}=\dfrac{1+3}{1-3}=-2\in M$,$\therefore\dfrac{1-2}{1+2}=-\dfrac{1}{3}\in M$,

$\therefore\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}\in M$,

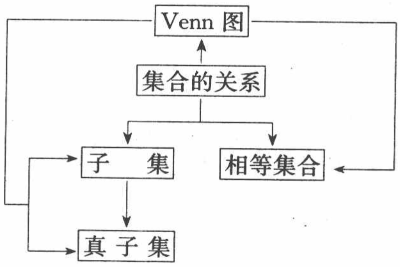
$\therefore\dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}}=3\in M$.

$\therefore M=\{3,-2,-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\}$.

38. 解析:由于3×4与$\dfrac{4}{3}$均不属于数集$\{1,3,4\}$,$\therefore$数集$\{1,3,4\}$不具有性质P;由于1×2,1×3,1×6,2×3,$\dfrac{6}{2}$,$\dfrac{6}{3}$,$\dfrac{1}{1}$,$\dfrac{2}{2}$,$\dfrac{3}{3}$,$\dfrac{6}{6}$都属于数集$\{1,2,3,6\}$,$\therefore$数集$\{1,2,3,6\}$具有性质P.

1.1.2 集合间的基本关系

状元学法 提纲挈领 一目了然



状元笔记 善于归纳 活学活用

知识点1 子集(★★★)

1. 子集的定义

观察下面的例子，说出两个集合的元素构成特点：

(1)本班所有姓王的同学组成的集合 A 与本班所有同学组成的集合 B；

(2)$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$.

我们发现：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 的元素.

如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们说这两个集合有包含关系，称集合 A 是集合 B 的子集(subset).

记作：$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

读作：“A 包含于(is contained in)B”，或“B 包含(contains)A”.

需要注意以下几点：

(1)“A 是 B 的子集”的含义：集合 A 中的任何一个元素都是集合 B 中的元素，即由任意 $x\in A$，能推出 $x\in B$.

例如，$\{1,2,3\}\subseteq \mathbf{N}$，$\mathbf{N}\subseteq \mathbf{R}$，$\{x|x$ 为山东人$\}\subseteq\{x|x$ 为中国人$\}$等.

(2)当 A 不是 B 的子集时，我们记作“$A\nsubseteq B$”(或 $B\nsupseteq A$)，读作：“A 不包含于 B”(或“B 不包含 A”). 只要 A 中有一个元素不在 B 中，则 $A\nsubseteq B$.

> **易错警示**：误认为子集是由集合的部分元素构成的集合而致错，即忽略空集致错

例如 $A=\{1,2,3\}$不是 $B=\{2,3,4,5,6\}$的子集. 因为 A 中的元素 1 不是集合 B 中的元素.

(3)任何一个集合是它本身的子集. 因为，对于任何一个集合 A，它的任何一个元素都属于集合 A 本身，记作 $A\subseteq A$.

例如，$\{1,5\}\subseteq\{1,5\}$等.

(4)空集是任何集合的子集，即对于任一集合 A，有$\varnothing\subseteq A$. 这是规定.

(5)若 $A\subseteq B$，不能认为 A 是 B 的一部分，有可能 $A=\varnothing$或 $A=B$.

2. Venn 图

在数学中，我们经常用平面上封闭的曲线内部代表集合，这种图称为 Venn 图.

用 Venn 图表示两个集合间的“包含”关系，如图 1.1.2－1 所示，集合 A、B 的关系是：$A\subseteq B$(或 $B\supseteq A$).

3. “$\subseteq(\supseteq)$”，用在集合与集合之间，注意与符号“$\in$”和“$\notin$”的区别，后者用在元素与集合之间.

例 1 下列各组的几个集合中，哪两个集合之间具有包含关系？

(1)$S=\{-2,-1,1,2\}$，$A=\{-1,1\}$，$B=\{-2,2\}$；

(2)$S=\mathbf{R}$，$A=\{x|x\leqslant 0\}$，$B=\{x|x>0\}$；

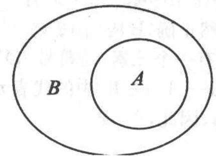


图 1.1.2－1

(3)$S=\{x|x$ 是四边形$\}$，

$A=\{x|x$ 是至少一组对边平行的四边形$\}$，

$B=\{x|x$ 是平行四边形$\}$，

$C=\{x|x$ 是矩形$\}$.

【解析】判断集合间的包含关系，关键是看一个集合中的元素是否都在另一个集合中，如果都在，则具有包含关系，如果至少存在一个不在，则不具有包含关系.

【答案】(1)$A\subseteq S$；$B\subseteq S$；

(2)$A\subseteq S$；$B\subseteq S$；

(3)$C\subseteq B\subseteq A\subseteq S$.

> **点拨**：本题主要考查两个集合关系中的包含关系——子集.

跟踪训练

1. 下列各式中，正确的个数是 ( )

①$\{0\}\in\{0,1,2\}$；②$\{0,1,2\}\subseteq\{2,1,0\}$；③$\varnothing\subseteq\{0,1,2\}$；④$\varnothing=\{0\}$；⑤$\{0,1\}=\{(0,1)\}$；⑥$0=\{0\}$.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 指出下列各对集合之间的关系：

(1)$A=\{x|x$ 是四边形$\}$，$B=\{x|x$ 是梯形$\}$；

(2)$A=\{x|x$ 是等腰三角形$\}$，$B=\{x|x$ 是有一个角是 45°的直角三角形$\}$；

(3)$A=\{x|x>3\}$，$B=\{x|x\geqslant 5\}$；

(4)$A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|2<x<4\}$.

例 2 用 Venn 图表示出集合 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 的包含关系.

【答案】集合 $\mathbf{N}$，$\mathbf{Z}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ 的包含关系如图 1.1.2－2 所示：

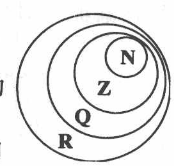


图 1.1.2－2

跟踪训练

3. 已知 $A=\{a,b\}$，$B=\{x|x\subseteq A\}$，试用列举法表示集合 B.

知识点2 集合相等(★)

如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，同时集合 B 的任何一个元素都是集合 A 的元素，我们就说集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$，读作“A 等于 B”.

需要注意以下几点：

(1)证明：若 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，则 $A=B$.

因为 $A\subseteq B$，所以 A 的元素都是 B 的元素；又因为 $B\subseteq A$，所以 B 的元素都是 A 的元素，这就是说，集合 A 与集合 B 的元素是完全相同的，因而我们说 A 与 B 是相等的集合.

(2)上面定义的证明给出了我们证明两个集合相等的方法，即欲证 $A=B$，只需证$A\subseteq B$ 与 $B\subseteq A$都成立即可.

(3)两个集合相等的实质就是两个集合所含有的元素完全相同，常用这一思想解有关集合相等的题目，尤其是元素个数较少的有限集.

(4)$A\subseteq B$ 也有可能 $A=B$.

例 3 判断下列各组中两个集合的关系.

(1)$A=\{x|(x+1)(x+2)=0\}$，$B=\{-1,-2\}$；

(2)$M=\{x|x=2n-1,n\in \mathbf{N}_+\}$，$N=\{x|x=2n+1,n\in \mathbf{N}_+\}$.