CHUZHONG
SHUXUE

JIETI
FA

初中数学
解题法手册

下

SHOUCE

科技教育出版社

CHUZHONG

SHUXUE

JIE TI

FA

初中数学
解题法手册

下

SHOUCE

初中数学解题法手册

（下　册）

张曾漪　李俊明　李传芳　编

上海科技教育出版社

初中数学解题法手册(下)
张曾漪　李俊明　李传芳　编
上海科技教育出版社出版发行
(上海冠生园路 393 号　邮政编码 200233)
各地新华书店经销　　常熟市人民印刷厂印刷
开本：788×1092　1/32　印张：15.25　字数：280000
1995 年 5 月第 1 版　　1996 年 6 月第 2 次印刷
印数：10001—20000
ISBN 7-5428-1020-0/O·46
定价：12.00 元

前　言

《全日制中学数学教学大纲》（以下简称《大纲》）规定，中学数学的教学目的是：使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能；培养学生的运算能力、逻辑推理能力、空间想象能力，……而目前不少中学生的实际情况与《大纲》的要求还有距离，表现在他们的解题能力较差．究其原因，主要有两个：一是不善于根据已知条件及有关的基础知识来寻找解题途径；二是不重视对解题的方法和技能、技巧的总结．伟大数学家笛卡儿曾经说过："我所解决的每个问题都成为以后解决其他问题的规则．"可见，要提高学生的分析和解决问题的能力，就要帮助他们克服上述解题中的两个弱点．鉴于此，我们考虑编写一套"中学数学解题法手册"，作为课堂教学的辅助读物，通过它来配合课堂教学，使学生尽快地学会在解题中"怎样想"、"怎样解"、"怎样总结规律"，以提高分析和解决问题的能力．

《初中数学解题法手册》是参照《大纲》规定的教学目的、要求、内容编写而成的，分上、下两册．本手册是下册．上册内容包括全部"初中代数"、"解三角形"；下册内容是"平面几何"．

本手册内容的编排是将平面几何分为五个部分："直线、射线、线段、角"，"相交线和平行线"，"三角形"，"四边形"，"圆"．每部分作为一个单元，其内容都是按照初中数学课本中有关部分的例题、习题的内容和要求，归类、整理出的若干类

问题，每个单元中设有若干例题及解决问题所必需的基础知识．每个例题基本上包括三方面的内容：一是“分析”，企图通过它引导读者怎样根据已知条件及学过的有关知识来寻找解题途径（即解题思路）；二是“解”，企图通过它指导读者怎样循着“分析”中所得的“思路”，寻求解题方法；三是例题后的“说明”，企图通过它指引读者怎样总结解题方法及一般规律．此外，多数单元最后还有“小结”，主要对解题的基本思想，解题方法及其理论根据，有关知识的补充等作系统的归纳、整理．

在编写中注意了以下两点：

第一，分清主次，循序前进．全书的例题就其要求分为三类：第一类是“紧扣大纲”；第二类是“靠近大纲”；第三类是“超过大纲”．其中，第一类为主要内容，所占篇幅最多．为了醒目起见，对于第二、三类例题都加上“*”号．例题的编排次序注意了“层次”，力求做到由浅入深，由简到繁，循序前进．这样安排也便于读者查考，并有利于读者配合课堂教学进行研讨、参考．

第二，确保基本，因材施教．如上所述，本手册中极大多数的例题都属于基本的，主要供读者研讨解题方法时参考；但为了贯彻因材施教的原则，还安排了一些“靠纲”、“超纲”的例题，以帮助学有余力的学生扩大眼界，增长知识，开拓思路，提高解题能力．

限于水平，本手册难免存在一些问题，我们殷切地希望广大读者提出宝贵意见，以便修改、补充，使之不断趋于完善．

编　者

1992年10月

目　录

一、直线、射线、线段、角

线段、射线是平面图形中最简单的图形.

关于直线、射线、线段和角，常见的问题有以下几类：

(一)有关概念的判别；

(二)线段、角的画法；

(三)线段、角的计算，其中包括一些简单的证明题.

下面将逐一地进行研究.

§1. 有关概念的判别

1. 直线、射线、线段的概念

点和直线都是最简单的概念，都是不给定义的.

一点在平面内或空间沿着一定的方向及相反方向移动时所画出的图形是直线.几何里所说的直线，都是向两方无限延伸着的.直线没有端点.

直线的基本性质 经过两点有一条直线，并且只有一条直线.简单地说，两点确定一条直线.

在直线上某一点一旁的部分叫做**射线**(或半直线)，这个点叫做射线的**端点**.射线有一个端点.

直线上任意两点间的部分叫做**线段**.线段有两个端点.

线段可以向任意一方延伸.线段向一方延伸的部分叫做线段的**延长线**.

线段的性质 在所有连结两点的线中，线段最短．简单地说，两点之间线段最短．

连结两点的线段的长度叫做两点的距离．

例 1 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）延长直线AB；

（2）延长线段AB；

（3）画出A、B两点间的距离；

（4）连结两点的线段叫做两点间的距离．

分析 要知道这些说法是否正确，可以根据有关概念的定义来判断．

解 （1）不正确．因为直线都是向两方无限延伸着的．

（2）正确．因为根据线段的定义可知，线段有两个端点，可以向任意一方延伸．

（3）不正确．因为根据两点间的距离的定义可知，两点间的距离是一个数量，它不是图形，不能把它画出来．

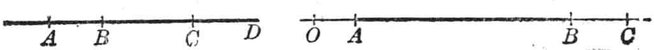
（4）不正确．因为根据两点间的距离的定义可知，连结两点的线段的长度才是两点间的距离．

说明 在初学平面几何时，一定要注意"几何语言"的准确性．

例 2 回答下列问题，并说明理由：

（1）如图1-1-1（1），直线AC和直线CA是不是同一条直线？射线AC和射线CA是不是同一条射线？射线BA和射线BC呢？射线AB和射线AC呢？

（2）如图1-1-1（2），线段AB的延长线是什么？线段BA



（1）　（2）

图 1-1-1

的延长线呢？线段BA的反向延长线呢？

解 （1）如图 1-1-1（1），直线AC和直线 CA 都是经过A、C两点的直线，根据两点确定一条直线可知，它们是同一条直线。

射线AC是在直线AD上点A右边的部分，而射线 CA 是在直线AD上点 C 左边的部分，这两条射线的端点不同，根据射线的定义可知，它们不是同一条射线.

射线BA是在直线AD上点B左边的部分，射线BC是在直线AD上点B右边的部分，这两条射线的端点虽然相同，但它们的方向相反，根据射线的定义可知，它们不是同一条射线.

射线AB是在直线AD上点A右边的部分，射线AC 也是在直线AD上点A右边的部分，这两条射线的端点相同，方向也相同，根据射线的定义可知，它们是同一条射线.

（2）如图1-1-1（2），根据线段的延长线的定义可知，线段AB的延长线是射线BC；线段BA的延长线是射线AO；线段BA的反向延长线，就是把线段BA向着和它相反的方向延伸所得到的延长线，这实际上就是线段AB的延长线，是射线BC.

说明 判别一个概念，一般地可以根据这个概念的定义进行；但如果这个概念是不定义的概念，例如直线，那就可以根据它的基本性质来判别.

例 3 选择题：

图1-1-2中，各种情况下的直线、射线或线段可能相交的是（　　）.

分析 要判定图 1-1-2 中哪种情况下的直线、射线或线段可能相交，可以根据已知图形的位置关系，或有关的概念、性质来判断.

解 如图，情况（A），其中a是直线，AB是射线. 从图中它

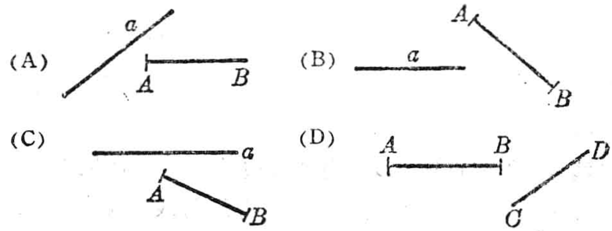


图 1-1-2

们的位置关系来看，因为射线AB只能向 AB 方向延长，所以，在这种情况下，直线a和射线AB不可能相交；

情况(B)，其中a是直线，AB是线段，因为直线是向两方无限延伸着的，它没有端点，所以，在这种情况下，直线a和线段AB一定相交；

情况(C)，其中a是直线，AB是线段，因为线段是有两个端点的，所以，线段AB不可能与直线a相交；

情况(D)，其中AB是线段，CD是直线，这个情况与情况(C)相同，线段AB与直线CD不可能相交.

综上所述，可以知道，应当选择(B).

例 4 平面上有任意三个点A、B、C.问：

(1) 一共可以画出多少条直线？

(2) 以一点为端点且经过另一点的射线可以得到多少条？

(3) 可以得到多少条线段？

分析 对于(1)，要知道一共可以画出多少条直线，可以这样想：根据两点确定一条直线，所以这实际上就是要知道已知三点中每两点组成一组，一共可以组成多少个组．另一方面，已知三个点是任意的，就是说，这三个点之间的位置关系

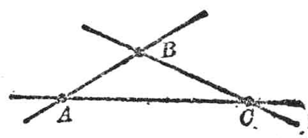
是不确定的．一般地，这样三个点之间的位置关系有两种可能情况，即三点在同一条直线上，或者三点不在同一条直线上．因此，这三个点一共可以组成多少个组，还必须结合这三点间的位置关系来考虑．

对于（2）、（3），可以在（1）的基础上，根据射线和线段的定义来得出所求的结果．

解　已知A、B、C是任意的三个点，所以，这三个点之间的位置关系有两种可能情况：它们在同一条直线上，或者它们不在同一条直线上．

（1）（i）　如果已知三点A、B、C在同一条直线上，不妨设同在直线l上［图1-1-3（1）］，那么根据两点确定一条直线，可以画出直线AB、直线AC和直线BC．很明显，这三条直线都就是直线l．因此，在这种情况下，只能画出一条直线，就是直线l．

（1）



（2）

图 1-1-3

（ii）　如果已知三点A、B、C不在同一条直线上［图1-1-3（2）］，那么根据两点确定一条直线，可以画出直线AB、直线AC和直线BC，因此，一共可以画出三条直线．

综上所述，可以知道，如果平面上有任意三个点，那么可以画出一条直线或三条直线．

（2）（i）　如果已知三点A、B、C在同一条直线上［参看图1-1-3（1）］，那么可以得到：以A为端点经过B或C的两

条射线，但这两条射线实际上是同一条射线；以B为端点经过A或C的两条射线；以C为端点经过B或A的两条射线，但这两条射线也相重合. 因此，这种情况下，一共可以得到四条射线.

(ii) 如果已知三点A、B、C不在同一条直线 l 上[参看图1-1-3(2)]，那么可以得到：在直线AB上，以A为端点经过B的一条射线和以B为端点经过A的一条射线；在直线 BC上，以B为端点经过C的一条射线和以C为端点经过 B 的一条射线；在直线AC上，以A为端点经过C的一条射线，以C为端点经过A的一条射线. 因此，这种情况下一共可以得到六条射线.

综上所述，可以知道，如果平面上有任意三个点，那么以其中一点为端点而经过另一点的射线可以得到四条或六条.

(3) (i) 如果已知三点A、B、C在同一条直线l上[参看图1-1-3(1)]，那么根据线段的定义，可以得到：以A、B两点为端点的线段AB；以A、C两点为端点的线段AC；和以B、C两点为端点的线段BC. 因此，在这种情况下，一共可以得到三条线段.

(ii) 如果已知A、B、C不在同一条直线上[参看图1-1-3(2)]，那么可以得到：在直线AB上的线段AB；在直线 BC 上的线段BC；在直线AC上的线段AC. 因此，在这种情况下，一共可以得到三条线段.

综上所述，可以知道，如果平面上有任意三个点，那么不论这三点的相互位置怎样，总可以得到三条线段.

注意 解上述问题的时候，必须仔细考虑一切可能情况，做到不遗漏，也不重复. 特别是对"任意三个点"的位置关系要考虑到它们的两种可能情况.

2. 角的概念

有公共端点的两条射线所组成的图形叫做**角**，这个公共端点叫做角的**顶点**，这两条射线都叫做角的**边**.

一条射线由原来的位置，绕着它的端点旋转到所成的角的终边和始边成一条直线时，所成的角叫做**平角**；再旋转下去，当所成角的终边和始边重合时，所成的角叫做**周角**.

平角的一半叫做**直角**. 大于直角而小于平角的角叫做**钝角**. 小于直角的角叫做**锐角**.

例 5 判断下列说法是否正确，并说明理由：

（1）有公共端点的两条射线叫做角；

（2）两条射线所组成的图形叫做角.

分析 要知道这些说法是否正确，可以根据角的定义来判断.

解 （1）不正确. 因为角的定义是：有公共端点的两条射线所组成的图形叫做角，而这里说的只是有公共端点的两条射线.

（2）不正确. 因为这里说的只是“两条射线所组成的图形叫做角”，而没有指明这两条射线是“有公共端点的两条射线”. 如果两条射线没有公共端点，那么这两条射线组成的图形就不是角. 如图1-1-4所示，射线AB和CD组成的图形就不是角.

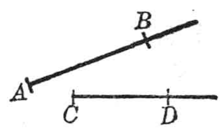


图 1-1-4

说明 对于角的概念，必须注意它所包含的“三个要素”，即“两条射线”、“有公共端点”、“所组成的图形”，这三者是缺一不可的.

例 6 如图1-1-5所示，$\angle AOB$ 和$\angle COD$ 的大小关系怎