

图形计算器 与中学数学活动案例选

主编 王长沛

副主编 王建明 张君麟

北京大学出版社

图形计算器与中学数学 活动案例选

主 编 王长沛

副主编 王建明 张君麟

图书在版编目(CIP)数据

图形计算器与中学数学活动案例选/王长沛主编.-北京:北京大学出版社,2000.7

ISBN 7-301-04589-1

I. 图… II. 王… III. 图形计算器-应用-中学数学活动 IV. G633.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 65468 号

书 名: 图形计算器与中学数学活动案例选

著作责任者: 王长沛

责任编辑: 王 艳

标准书号: ISBN 7-301-04589-1/G · 592

出 版 者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

电 话: 出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752021

排 印 者: 北京大学印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

787mm× 1092mm 16 开本 11.75 印张 293 千字

2000 年 7 月第 1 版 2000 年 7 月第 1 次印刷

印 数: 1—5000 册

定 价: 27.00 元

前 言

这本书终于和大家见面了！这从一个侧面反映了掌上电脑正在进入我们的中学数学教学的事实。这本书记录了北京的一个教师群体对新教学技术的探索过程，反映了我们用掌上电脑为学生营造一个无处不在的数学学习环境所做的努力。经验告诉我们，在接受使用现代信息技术的过程中，学校是一个颇为特殊的群体，教育工作者常会遇到一些问题。

记得那是在 1992 年，我第一次看到图形计算器，当时给我留下的印象是：这是一个可绘制各种函数图像的科学计算器。在广东教育学院举办的数学教育高级研讨班上，一位来自英国的数学教师演示了如何用图形计算器教二次函数。

真正使我对图形计算器刮目相看的是 1995 年的中美女科学家研讨会上的一次讲座，来自美国新泽西州的珀斯特曼教授介绍并演示了用掌上理化实验室（简称 CBL）（形状大小也很像科学计算器）和图形计算器结合，完成一个完整的数学过程：首先学生做理化实验，并用不同探头去测量各种理化变量；然后把测得的数据转化并存储在手掌般大小的 CBL 中；接着将这些数据（根据需要）输入到图形计算器，进行处理；图形计算器可用数组、图形或公式等形式把结果表示出来，学生还可对数据进行进一步的分析，如进行曲线拟合，观察曲线形态的变化，研究物理量（或化学）之间关系，求极值等。珀斯特曼教授还放了一段录像——学生把 CBL 和图形计算器装在小书包里，带到野外做关于环保的调查；学生用它来测排水沟里水的 PH 值，然后对之进行数据处理。

这真是太妙了！倡导认识建构观与绿色数学教育的我，自然十分看重这种小精灵对学生自主探索的巨大的潜在作用，于是我决定把图形计算器引入课堂，引入家庭。但困难的是如何让更多的人看到这类掌上电子数理学习工具的潜在价值，并甘愿付出自己的精力来做这一“前途未卜”的尝试？

1995 年，为人淳朴而慷慨的珀斯特曼主动提出赠给我们 25 台 TI-82 图形计算器、一台 TI-92 图形计算器及 CBL，从而使我们有可能开始在中国进行用掌上电脑及掌上理化实验室改革数理化教学的漫长历程！但是事情并不像预想的那样简单。最难的是找到敢于“第一个吃螃蟹的人”，包括“自上而下”的行政支持。“应试教育”的压力使人们不愿冒险。幸亏，“认识建构观与数学教学课题组”（简称为 JSJ）凝聚了一批来自第一线的勇于探索的教师和他们的校长。最早的一批探索者组成了研究小组，成员们自学图形计算器的使用，并集体备课，使用图形计算器。

1996 年 7 月，第 8 届国际数学教育大会（ICME）在西班牙的塞维利举行，我特地参加了有关图形计算器的讨论会，并结识了一些同行，包括美国德州仪器公司（Texas Instrument，简称 TI）的计算器部门的总裁沙尔（R. Shaar）博士。同年，我们开始和 TI 讨论在中国大陆推动用图形计算器进行教学试验的可能性，也讨论了 TI 对我们的培训与教学试验给予赞助等。同时，

虽无经费支持,我们的研讨活动也一直在艰难地持续着.特别是,在一些学校领导的支持下,我们举行了一些公开课.1997年7月,TI和北京教育学院合作成立了教学和技术中心(Teaching & Technology Centre,简称TTC),以推动图形计算器的教学试验.同时有了一些经费支持,我们试验探索的条件有了根本的改善.

尽管如此,在进行教学试验过程中,我们仍然遇到许多困难,包括技术的、教学法的、教学观的.还有一些困难是我们无法控制的.当时最大的困难是没有实验学校,很难进行系统的教学实验.但要说服学校领导接受并为学校配置图形计算器,本身就很困难.校长与教师们常提的问题是:“我们已经配置了许多计算机实验室,为什么还要配置功能远不如它的掌上电脑?”而回答这个问题又需要大量的教学实践.经过许多努力,自1998年以来,第一批实验学校终于建立起来了,他们分别是北京92中学、北京石油附中等.实验学校的教师也都是TTC的核心成员.在TI的支持下,TTC终于能够较系统的进行教学试验了.TTC的成员们经常聚会研究,做了许多研究课.

我们的目标是和全国数学教育界的同行一起推动关于图形计算器的探索.自1998年以来,我们又邀请上海、广州与天津的朋友们,一起加入TTC的探索.到今天,一个用图形计算器改进数学教学的全国性行动已经悄然兴起.

我们在几年的实践过程中,获得了大量的案例,也取得了图形计算器在中学数学教学中作用和意义的部分认识,希望广大中学数学教育工作者与我们共享,因此就有了本书的初步创意.

本书有别于纯功能性的使用说明书,主要是在初步掌握图形计算器的操作基础上,通过大量数学活动的案例来展示我们是如何在现有数学教学中用图形计算器来创设教学情景的.本书的写作群体大多来自TTC,他们也是JSJ课题组的成员.

显然可以看到,无论是对图形计算器功能的深入探究,还是限于我们自身的水平,本书的写作之中肯定存在不妥之处,在此衷心欢迎读者们批评指正.

本书之所以得以出版,得到了TI公司及北京大学出版社的大力支持,尤其是责任编辑王艳女士的大力帮助,另外王建明在本书出版中做了大量的工作,在此谨表谢意.

王长沛

2000年5月25日

目 录

前言	(1)
第一章 掌上电脑与后桌面电脑时代的数学教学	(1)
第一节 从图形计算器到手持信息技术	(1)
第二节 从数学活动的角度认识图形计算器	(5)
第三节 用图形计算器设计数学活动	(10)
第四节 数学实验	(12)
第五节 后 PC 时代的数学教学	(14)
参考文献	(16)
第二章 函数	(18)
第一节 图像法研究函数	(18)
第二节 函数的应用	(47)
第三章 平面几何	(58)
第一节 图形计算器作为认知工具,使学生看到和做到图形的对称和旋转	(58)
第二节 圆的有关问题	(67)
第三节 综合应用	(74)
第四章 解析几何	(87)
第一节 二次曲线的有关概念和性质	(87)
第二节 曲线之间的相互位置关系	(97)
第五章 数列探索与建模	(105)
第一节 探索等差数列的变化规律及通项公式	(105)
第二节 探索等比数列的变化规律及通项公式	(111)
第三节 数列的递归公式、数列的极限思想及无穷等比数列($ q <1$)的求和	(118)
第四节 线性规划与回归问题	(131)
第六章 向量与矩阵	(140)
第一节 多种途径认识、理解向量代数及方程理论	(140)
第二节 矩阵和向量的统一及应用	(150)
参考文献	(162)

第七章 综合问题	(163)
第一节 各种物理现象的探索	(163)
第二节 微积分问题	(174)

第一章 掌上电脑与后桌面电脑时代的数学教学

我们相信信息技术(Information Technology,简称IT)将会从根本上改变我们的教育.但今天的桌面电脑(Desk-Top Computer)的某些局限性,制约了它在学科教学中的有效应用.掌上电脑的问世,特别是图形计算器(Graphing Calculator)的异军突起,无疑具有划时代的意义!它不仅为大众数学教育(Mathematics Education for All)提供了真正的可能,而且为学生自主自由的主体建构参与式学习、创新和探索提供了更广阔的空间与更有力的支持,也将促进数学课程的深层改革.可以预料,桌面电脑、掌上电脑(或手持信息技术)、因特网及传统媒体的综合使用,将能有效地解决学校IT使用效率不高这个老大难问题.这预示着学校IT将进入一个新时代——后桌面电脑时代,或后PC时代.本章将围绕以下三个问题展开讨论.

问题一:今日学校常用的掌上电脑有什么功能?可能的发展趋势会如何?这些功能为我们做数学与学数学能提供什么机会?

问题二:后PC时代的数学教育有何特征?数学课程与教学会发生哪些变化?

问题三:我们如何推动和开发学校IT在教学中的应用?

本书选择目前已在欧美及我国部分地区普遍使用的图形计算器为例,对这些问题进行初步讨论.本书将以绿色数学教育作为理论框架来组织我们的观察.大量的论据也来自欧美,特别是用技术教学的教师(Teacher Teaching with Technology,简称 T^3)这一国际性的教师群体的实践.还有一些论据则来自教学和技术中心(Teaching & Technology Centre,简称TTC)的实践——笔者几年来在北京和其他地区形成的TTC群体,并通过它探索用图形计算器教数学及综合理科的实践.

为推动学校IT的应用,笔者还提出IT的“第二次开发”这一概念,以强调教师是学校IT应用开发的主体,而 T^3 和TTC这两个群体的教师培训和行动研究的一些理念与经验也值得注意.

第一节 从图形计算器到手持信息技术

古语说得好,“工欲善其事,必先利其器”.但除了简单的圆规、直尺和计算尺以外,传统的数学教学似乎无需工具!过去的数学家会不无自豪地说:数学家只需三件东西,一张纸、一支笔和一支烟.但是这一情况正在发生根本改变.用各种工具,特别是认知工具,“做数学、用数学、学数学、教数学”正在成为人类数学活动的主要形式.如果是这样,那么就像书法家熟知文房四宝,武术大师熟知各种兵器一样,一个数学教师对各种做数学的工具也应当有相当的专业知识.本节将力求跟踪学校IT的发展,特别是手持信息技术的可能前景,介绍一般图形计算器的特征;并在更宏观的背景下,简要介绍图形计算器的功能.关键词有:掌上电脑,后桌面电

脑时代, 计算器, 科学计算器, 计算机代数, 交互式几何, 闪烁 ROM 及闪烁应用程序等。

1. 后桌面电脑时代

掌上电脑等(包括网络)的出现标志着一个超越桌面电脑时代的到来。在后桌面电脑时代, 人们对 IT 的高效和功能全已有更平衡的看法, 即更注重实际应用。正如一些信息产业的业内人士所指出的: “整个信息产业已经进入了一个以应用为驱动的时代, 而不再是以技术为第一驱动的时代。”而对高效应用的关注必然使人们去开发一个多元化的信息技术环境, 包括诸如掌上电脑、个人数字代理及网上 TV 等价格低廉的, 具有一定信息接收、存储和处理能力的, 同时使用方便的嵌入式设备。其发展之快令人瞠目。

历史总在重复。掌上电脑一问世, 专用于数学及其教学的掌上电脑——图形计算器也随即应运而生, 并很快为欧美的许多学校所接受。早在 1988 年, 数学教育工作者就已经把图形计算器、桌面电脑、计算器并列, 俨然是学校 IT 的“三大件”。不久掌上理化实验室——可以和图形计算器配套使用的理化实验室也问世了。今天, 形势已很明朗。作为后桌面电脑时代的明星——图形计算器进入学校已成为一股挡不住的潮流。图形计算器的出现无疑将为我们的数学教育大众化与以学生为中心的现代教学环境的形成提供一个前所未有的方便工具, 并将从根本上改变学校 IT 的配置与应用的格局。

任何新事物的成长都不会一帆风顺。自 1995 年我们开始推动图形计算器在学校的应用以来, 越来越多的教育工作者参与开创性的探索。但令笔者担忧的是: 也有一些教育工作者, 特别是教育管理者, 对正在发生的变革反应迟钝。我们常听一些教师这样评论: “学生听我讲就够了。用计算机, 多此一举!”“我在黑板上一画就完成了, 比按按钮用机器画强多了!”由于探索者们自身的观念与水平的限制, 早期的探索难免多少带有些稚气, 更为“反对者”留下口实。

2. 图形计算器

对于第 1 页上的问题一, 本书将以图形计算器为具体实例, 来做描述性的讨论, 期望从中可以获得对后桌面电脑时代大众使用数学和学校数学教学的某些特征(虽然不是全面的)的初步认识, 这也部分地回答了第 1 页上的问题二。那么, 出现于 20 世纪 80 年代中期的图形计算器, 顾名思义, 是兼具绘图与科学计算器功能的计算器。由于绘图功能是由内置图形软件包实现的, 所以早期的图形计算器实际上就已经可以看成是一台掌上电脑, 一台专门为学生学习数学与科学而设计的掌上电脑。以 TI-73、TI-82、TI-83 及 TI-92 等为例, 这类图形计算器都有以下功能:

- (1) 数据处理功能: 输入、编辑、处理与显示数据;
- (2) 函数功能: 以通常代数表达的方式输入函数, 并能很方便地在函数的三种表示法之间进行切换。例如, 可用 $y=x^2+2x-3$ 的形式输入, 同时可用图像与数组的方式表示这一函数;
- (3) 图形功能: 绘制几何图形, 例如做圆、直线等;
- (4) 编程功能: 以简单的程序语言编辑、输入程序, 并执行之。

可见图形计算器所具有的功能早已超越了科学计算器的功能, 它是一种掌上计算机, 一种可以运行数学及其他软件的计算机。

3. 计算器(Calculator)

据魏茨(B. K. Waits)所提供的资料,第一台电子计算器是于1970年4月14日,由日本的佳能公司和美国的德州仪器公司(Texas Instruments Inc.,简称TI)合作研制推出的.之后,惠普公司于1972年推出计算器,该计算器能计算诸如 $\lg 3$ 及 $\sin 3$ 之类函数的值.这标志着科学计算器的诞生,也结束了计算尺的历史使命.美国最后一批计算尺生产于1975年.

4. 图形计算器的家族

1986年,日本的卡西欧公司首先推出图形计算器.它更像通常的计算机,其强大的绘图功能是通过内置的绘图软件实现的.这以后,德州仪器公司、惠普公司等著名公司也相继推出各自的图形计算器系列产品.经过十余年的发展,这类计算器越来越电脑化,并已形成一个大家族.仅TI的图形计算器系列就有:TI-73、TI-81、TI-82、TI-83、TI-83+、TI-85、TI-86、TI-89、TI-92及TI-92+等.卡西欧公司则有Casio6300、Casio7000、Casio9750、Casio9800、Casio9850、Casio9950及Casio9970等.惠普公司有HP28、HP38G、HP48、HP48G+及HP49G等.图形计算器的进一步发展,又很快突破了“科学计算器+绘图”的原意.于是有人更倾向用“手持信息技术”(Hand Holding Technology)来称呼它.

5. 手持信息技术

这一称呼突出了这类信息技术的共同特征——小到可以置于掌上.计算机技术的迅速发展又一次重复着历史:新一代图形计算器已超越了原来意义上的“绘图”!有的不仅可以实现计算机代数系统、交互式几何及闪烁ROM等功能,甚至能运行桌面电脑使用的数学软件,访问因特网,再加之掌上理化实验室的出现,一些学者更愿意用手持信息技术来泛指包括图形计算器家族之类的信息技术.

6. 计算机代数系统(Computer Algebra System,简称CAS)

1996年问世的TI-92型图形计算器,被认为是第一个使用方便的具有代数系统的图形计算器.魏茨这样评论:今日某些图形计算器的“计算机代数”功能已经相当于桌面电脑所用的数学软件(如Mathematica, Maple或DRIVE)的代数功能.那么何谓计算机代数系统呢?以TI-92型图形计算器为例,目前通常所说的CAS包括以下四种功能:

(1) 精确的算术(Exact Arithmetic, 简称为EA): 对数(有理的、实的、复的)的计算,能给出精确表示.例如对于 $\sin 15^\circ$, EA给出的精确结果是 $\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4}$.又如对 $[\sqrt{24}+\sqrt{8}]^3$, EA给出的精确结果是 $96\sqrt{6}+160\sqrt{2}$.不是所有的图形计算器都有这种功能.

(2) 图形软件包,包括函数、关系与三维绘图:一般图形计算器都有绘图软件包,包括可做形如 $z=x^2+y^2$ 的方程所给出的二次曲面.

(3) 数值求解:通常的数值计算,包括计算函数在某点的导数值,在某区间上的定积分值.

(4) 计算机符号代数:包括对代数式(及方程)的运算与求解.

有的图形计算器可对多项式、有理式、三角式、矩阵与向量等实施运算和变换,实施因式分

解和微积分运算,也包括对方程及微分方程求解等.

7. 交互式几何(Interactive Geometry)

我们常见的 LOGO 的海龟几何、几何画板及 TI-92 型图形计算器内置的卡式几何等,都可看作是交互式几何的范例.

8. 掌上理化实验室

图形计算器与掌上理化实验室相组合可构成完整的科学及数学的过程:自然或社会现象的观察与实验—数据采集—数据处理—数学建模—解释或预测—存储.这也许能为跨学科的整合(如综合理科、活动课、数学建模等)及综合能力的培养提供有力的支持.

9. 闪烁 ROM(Flash ROM)

这可能是计算器及图形计算器技术发展上的一次重大突破!1998 年 TI 和 Casio 又推出了具有闪烁 ROM 的图形计算器,如 TI-92+ 与 TI-89+ 等.令人吃惊的是:闪烁 ROM 技术可把图形计算器用户的存储容量扩大 6~10 倍!利用闪烁 ROM 技术可使图形计算器升级,例如可把内置数学软件的新版本下载(Download)到图形计算器中,以取代原来的旧版本.于是为了升级,为了给自己的图形计算器增添新功能,用户只需使用闪烁 ROM,而无需购买新图形计算器.这就好像人们常说的旧瓶装新酒,不用更换硬件本身就可以使图形计算器升级.出于经济的考虑,对学生、家长和老师来讲,这点也很重要.

那么什么是闪烁 ROM 呢?大家知道计算机有两种不同的存储器——ROM 和 RAM.ROM(只读存储器)仅存储事先一次性编好的程序,并无法改变.所有计算机内置的功能都放在 ROM 里面,但是仅有 ROM 是不行的,因为使用者不能向 ROM 输入数、符号和图形.为此计算机需要另一种存储器——RAM,也称随机存储器.我们可以向 RAM 里面输入、存取新的信息.RAM 可以被无数次改写.

RAM 比 ROM 要贵.这些年来,人们通过不断增加 ROM 的数量以增强图形计算器的内置功能.RAM 的生产成本与价格较高.尽管计算机 ROM 的价格不断降低,而图形计算器 RAM 的价格却没有太大变化.除了显示器外,ROM 是图形计算器元件中最贵的.正因为如此,人们对图形计算器装备的 RAM 的数量做了严格的限量,以保持图形计算器的低价位.

闪烁 ROM 的优点恰恰就在于它是 ROM!但它可以像 RAM 那样被反复改写,这就综合了 ROM 和 RAM 的优点.通过闪烁 ROM,我们可以把新的数学软件下载到图形计算器中作为它的内置功能.

10. 闪烁应用程序

这是闪烁 ROM 的最重要的应用.闪烁应用程序是能够在图形计算器上运行的软件程序,它存放在闪烁 ROM 里面.在图形计算器运行时,它仍然保存在那里.也就是说,它不占用 RAM,因此也不和使用者自己输入的程序抢占空间.与用程序编辑器(一般图形计算器都有)所编写的程序相比较,闪烁应用程序的功能与速度要更强大、更快.理由很简单,闪烁应用程序是用更强有力的语言(C 语言或汇编语言)编写的.例如,它对显示器的控制可精细到每一个像素.它不仅可以显示菜单、主屏、数表及一般图形计算器所能绘制的图形,而且能做精细的图

画、动画、人像及新类型的菜单。

用魏茨等的话讲：闪烁应用程序戏剧性地改变了计算器的功能！有了闪烁应用程序，将来的图形计算器简直就是运行软件程序的计算机平台！于是，那些能在桌面电脑上运行的数学软件，也完全有可能在闪烁图形计算器上运行。也就是说，那些著名的软件，如 LOGO、三维几何及电子表格等也能在学生的掌上实现！

11. 联网图形计算器

因特网对我们人类社会的深刻影响，这里无需多谈。一方面，图形计算器使“人人可以通过数形结合探索数学”成为可能；另一方面，联网图形计算器将使得图形计算器可以和图形计算器、计算机及因特网建立联系，这对未来的学习与教学，无疑将产生不可估量的影响。

还应提一下，有的图形计算器具有文字处理功能，使教师、学生能随时随地进行文字处理，如完成作业、教案、学生记录，及关于课堂动态过程的观察与反思的文字处理等。利用 Input/Output（输入/输出）功能，图形计算器（通过电脑或红外线）可以和其他图形计算器或计算机互访。图形计算器（如 TI 系列产品）通过把配套的便携式显示板放在普通的投影仪器上，可把教师的工作显示给全班学生，有的还可访问因特网，这无疑将对学生自主而广泛的访问信息和参与交流提供空前广阔的空间。

简易编程功能可使用户自己定义一些特定的任务。例如，我们可以把教学过程，特别是可以把需要演示的内容编成程序，先按顺序把它们存储好。在上课时只需依次按下 Enter 键，便可显示事先设计好的内容。北京一些没有计算机基础的教师在尝试使用图形计算器教学时，生怕机件使用不熟练，硬是用这种“笨办法”，“只按一个键”便把课上下来了，从而逐渐破除了对使用新技术的恐惧。

掌上电脑必将成为后 PC 时代的新宠，并将不可避免地改变学校 IT 环境的格局。

第二节 从数学活动的角度认识图形计算器

读金庸的武侠小说，给我一突出的印象是每个武术流派都有自己的理论，即使对同一兵器，不同大侠也会有不同评论和选择，这取决于他们的武术理论流派与个人的风格。对学校 IT 功能的认识也是如此。

本节从做数学、学数学与教数学的智力工具这一角度进行更深入的考察，认识图形计算器。不同于第一节，本节将更侧重于教数学、学数学、做数学。我们有必要明确地阐述自己的数学观、数学学习观、教学观，甚至一般的教育观、认识观等。这些观念不仅决定了我们对图形计算器的哪些功能特别看重，也决定了如何用图形计算器。最早发起“用图形计算器进行教学试验”的数学教育工作者们全都来自 JSJ。而直接组织与指导有关图形计算器探索活动的核心群体——TTC 本身也是 JSJ 的一个子课题组。

首先本节将简要介绍 JSJ 及 TTC 的理论框架——绿色数学教育的理论。然后，我们将结合使用图形计算器做数学与学数学的实践，对图形计算器的特征及使用策略进行讨论。本节的关键词是：数学的多重表示，便携性，交互性。

1. TTC 和 JSJ 的哲学

JSJ 是一个以教师为主体的行动研究群体(或无形学院).我国今日正在发生的数学教育变革是一个根本性的全方位的范式革命,是人类思想史上一次深刻转变的一个侧面.为了推动这一改革,需要建立一个较简洁的数学教育哲学框架,这也是 JSJ 及 TTC 的数学教育教学观的核心.这一变革的决定性因素有三个:

(1) 教育价值观:关注人,以人为本的价值系统在教育,特别是在数学教育系统中需重新定位.这也是素质教育最核心的理念,决定并影响着数学课程与教学实践的几乎所有方面.

(2) 哲学与认识论观:其中对数学教育改革实践与理论建设最有影响的是“认识建构观”被人们广泛接受,人们开始承认认识活动与学习不是简单的“镜式反映”,更不是“灌输”.

(3) 现代数学观:从数学本体论或数学认识论的角度重新认识数学,认识它的本质,认识数学活动的基本特征.

以上三点构成了绿色数学教育的核心.当我们对用图形计算器改革教学进行探索时,它们也成为指导我们探索的基本理念.相信读者在了解了上述 JSJ 与 TTC 的基本思路后,对于我们“是怎样做的?”“为什么这样做?”会有更深的了解.

TI 系列的图形计算器的最初思路是通过有多重联系的表示法(如数形结合)探索函数;以后又逐渐形成在更丰富多彩的环境中以更为平衡的方式做数学,并应用它解决问题,即现代数理化教学的模式.

2. 从数形结合到多重表示

无论从哪个角度看,图形计算器最值得注意的特征便是使数学“视觉化”(Visualisation),它可以用多种方法对数学对象、数学事实及数学过程进行表示.也就是说,图形计算器拥有多种方式使抽象的数学视觉化,而且很容易实现由一种表示到另一种表示的转化.

其实早期图形计算器设计的基本理念之一正是使“人人通过视觉化学习数学”成为可能,把数学对象“视觉化”传达到每个学生.来自欧美的数学教授的早期探索正是源于很朴素但却强有力的理念,如通过数形结合改进微积分预备课程的教学.而这一理念及图形计算器的优点很快被广大教师和学生所接受.这方面他们积累了丰富的经验,可圈可点的精彩案例比比皆是.从某种意义上讲,这也是我们常说的“数形结合”.

但“多重表示”、“视觉化”的意义比我们通常所指的“数形结合”要更为丰富.

首先从“表示的对象”看,“多重表示”的表示对象可以是:

- (1) 数学对象(作为一个名词),如复数、数、方程、曲线等数学概念与结构;
- (2) 数学事实(作为一个陈述句),如定理;
- (3) 数学过程,如一个算法程序,或更一般的“抽象—符号表示—符号运算—应用”.

其次,从“表示法”看,除了平常所说“解析式的”、“数值的”及“图形的”等三种之外,图形计算器提供了更强大的数学对象的多种表示手段,例如,可用静态(可观察结构)的或动态(有利于观察过程)的、分解式的或整体的、定性的或定量的,等等方式,有所侧重地揭示数学概念的某些不同方面,并可使不同表达方式之间的转换很快实现,而且使学生几乎可以“看到”这一“动态”转换过程.而多种形式认识的整合,有助于学习者自己更好地建构对这些数学对象的理解.这正是多年来我们已经形成的关于数形结合的共识,这大大超越我们的想象.魏茨等所提供的大量的实例启示我们,利用图形计算器把数学对象的多重表达方式组合在一起.而这些在

过去只有具备“特殊才能”的数学家才能观察和想象到。

从本书的案例也可看出, TTC 与 JSJ 的教师们在设计数学教学情景时, 考虑得最多的也正是如何充分利用图形计算器强大的多种表示功能, 特别是数形结合功能. 本书几乎所有的案例都包含着从数形结合的角度探索数学的因素. 应当指出, 我们的许多做法受到美国 T^3 同行的启发. 例如, 从本书温玉清等所提供的实际教学的案例中, 读者也许可以看到一些新尝试.

第三, 我们还试图充分使用图形计算器所提供的一切手段, 如分屏模式、Zoom 与 Trace 等功能, 使我们可以对数形结合进行更深入的考察. 例如, 学生还可以很方便地进入分屏模式, 使屏的左方显示解析式, 而右方显示相应的图像. 这为学生的对比观察提供了更好的条件. 无论是在 TTC 或 T^3 的教学案例中, 读者都不难找到这类例子.

平心而论, 仅用传统的“纸笔—计算—描点—做图”, 也能做上述工作. “你看, 我用手一画就出来了. 动手画更有体验! 用计算机做图多此一举.”但以此为由拒绝新技术未免偏颇了. 如果他们有机会用过图形计算器, 特别是认真观察过学生如何用它做数学, 就会注意到这样一个事实: 如果学生被大量的“令人厌烦的冗长计算和描点操作”所淹没, 就会影响他们从数形结合的角度进行观察、对比与思考. 对那些复杂的表达式或图形, 一般人很难发现其“数形”两种表达方式之间的联系. TTC 的教师们一方面充分考虑了有关“数形结合”的已有经验, 另一方面又试图利用图形计算器所提供的“新机会”——图形计算器可以提供大量函数图形及相应的解析式. 读者可以看到, 在不长的时间内, 学生就可以对大量的案例(有时可多达十几个!)进行观察, 而且这些是学生自己选择并做出的(注意: 是学生自己做出的!). 这种图形计算器支持下的教学情境, 自然有利于学生自己发现、归纳、猜测出(如二次函数或幂函数)函数的性质.

3. 再谈数学的多重表示

为了加深与拓广对“多重表示”的认识, 从而能更有效地开发利用图形计算器的潜在功能, 我们愿再就此做一些讨论. 笔者试图说明: 无论对数学而言, 还是对数学学习而言, 数学(对象、事实与过程)的表示形式(与内容相对)都是一个核心问题, 这来源于数学本身的特征——高度的抽象性.

首先, 从数学的本质看. 数学的高度抽象性, 使从多角度表示数学的对象、过程与事实有着特殊的重要意义, 也反映了数学思维形式的多样性之间的联系与转化. 大家知道, 数学化、数学过程是数学的本质之一, 而作为数学过程的“抽象—符号变换—应用”也是最重要的数学思想. 即使对数学家而言, 表示方法的选择也是十分重要的. 用不同方法表示同一数学对象、事实及过程, 不仅可能为解题带来新的思路, 有时还会导致或促使一个新数学分支的产生. 在数学的发展史上, 不乏这样的例子. 分形学(Fractals)的产生与发展便是一个很好的例子. 谢宾斯基三角形、康托集及 Koch 雪花曲线(1904 年)等早就引起过数学家的注意, 并以其难于想象的性质获得了“数学怪物”(Mathematical Monster)的美称. 其实, 一些分形问题是由很简单的规则产生的, 所涉及的数学概念和算法也并非多高深, 但由于它们都产生于一种简单结构的无数次反复过程, 有时使数学家也很难想象出它们的样式(Pattern), 更不知道这些怪物会有什么实际应用, 自然也不会成为当时数学的一个分支. 今日借助计算机技术, 数学家不仅还原了这些怪物的“美貌”, 即美丽的几何结构, 而且发现可以把它们作为“混沌无序”现象的重要模型, 成为许多自然科学的核心工具(物理、化学、生物、地理与天文等). 其实通过电脑动画, 大众也经常与之谋面.

今天分形学的部分内容进入中学数学课程已有必要,也有可能.而且对大多数学生来讲,一方面,通过具有分形结构的图形及其生成过程,我们可以更好地体验到有关代数、映射、递归、向量代数、无穷与极限等数学概念与过程.而学校 IT 的发展使这成为可能.更令人吃惊的是,现在用掌上电脑(价格相对便宜)及并不复杂的程序,我们便可以做出许多漂亮的、具有自相似结构的几何图形.按德瑞福斯(T. Dreyfus)的说法:这甚至可以改变学习者所面对的数学对象和过程本身的性质.

其次,从学数学的角度看.无论是数学教师和数学家,还是人工智能学者或认知心理学家,也都从各自的角度强调(数学的)多重表示的重要性.不仅有经验的教师历来重视数形结合,许多教材也试图体现数形结合.

从数学学习心理的角度看,不同的数学思维形式,它们之间的转换及其表达方式被看作是数学学习的核心,例如金斯伯格(A. Ginsburg)便建议用它来定义数学学习.由此看来,图形计算器拥有的多重表示方法对数学学习的潜在影响涉及到数学活动的核心部分.

此外根据许多数学教师的经验(一些研究结果也表明),个人的认知风格存在着差异,有时这种差异是很大的.有的把这种差异归结为“左脑型”与“右脑型”的对立;有的则把这种差异归结为“解析型”与“视觉型”的对立.一些研究表明,有不少数学家承认“自己的空间想象能力极差”,而另一些数学家则公开坦白“我的计算能力极差,连简单的四则运算都很少不出错!”(彭加莱).认知风格的差异可能还不至于此.例如,LOGO 与微世界(Microworld)的提出者帕什特就发现也许还有其他认知风格.也许认知风格的差异比我们已知的还要复杂.

但一些数学教师却不以为然.他们以为过多的“图形提示”也许会妨碍“学到好的数学”!有些教师也许担心(包括国外一些学者)过分依赖“直观”,影响学生数学抽象能力的发展.他们的理由是“我们都是这样学会的!”笔者以为,持这些看法的人没有注意到“存在着其他学习方式”的可能性,忽略了“条条道路通罗马”这一道理.实际上问题可能还要严重,也许传统的数学教育、数学课程与教材都忽略了学生个体的认知风格.例如有心理学家问道:是否整个传统的数学课程只有利于一类学生,偏向某一类人——例如“左脑型”,包括那面面俱到的“教学大纲”、“标准化考试”.于是,“计算能力差”的学生被认为是数学差生!可以想象,彭加莱、爱因斯坦恐怕很难考上今天的大学.按照一些数学教育家的看法,缺乏“空间想象力”的也可成为数学家;反之,缺乏“计算才能”的人,也同样可成为数学家.更何况,大众数学教育的目标是人人要学好数学,学好对他的生存发展有用的数学,不同学生可以学不同的数学.

这无疑对教科书的发展提出了挑战,使不同认知风格的学生,都能从数学课程得到最适合自己的认知风格的内容.显然,这就要求教师与教科书能以多元化的方式呈现数学对象、数学事实与数学过程.例如,某学生也许善于理解用解析方法(如解析式)所表达的数学概念,但却看不懂该概念的图形表达方式;又如,对同一数学概念,另一学生一看图就明白了,但却在读表达式时遇到了麻烦.

除了教育教学观以外,媒介也是一个重要因素.过去传统的“纸笔媒介”及教学手段也不易满足多种认知风格的学习者的要求.还记得佛罗登塔对教科书的“严厉批判”吗?他认为:教科书不能展示“带脚手架”的数学大厦的建筑过程,也不能体现教师及学生的个人风格.正因为如此,他说:“印刷术是苏格拉底教学法的敌人!”“它(启发式教学)不需要这种东西!”

但从电子媒介看到了希望!图形计算器强大的“多重表示”功能就是一个生动的例子,它为人人学好数学提供了认知工具.

4. 交互性

这是许多人都十分重视的特性. 电脑在人和无生命环境之间起到某种特殊的交流中介作用. 人对完全被动的数学材料进行操作和实验, 而电脑以可预测的方式(根据设计)对人的干预作出反应.

前面提到过的各种交互式几何, 如卡氏几何与几何画板或 LOGO 的海龟几何就是极好的例子. TI 图形计算器的交互式几何(卡氏几何或几何画板)和动画功能, 为教师提供了极丰富的演示手段. 但认识建构主义者们更关注让学生通过实验认识几何, 并探索几何图形性质的过程: 作图、观察、猜想、动手干预改变图形, 让图形某些部分动起来, 算算线段、角度、面积, 等等. 学生和教师可以在掌上玩各种几何图形, 如果把这个改变一下, 那么什么会发生呢? 让我们来看一个关于探索复合函数的例子.

1996 年, 我曾观察过一个学生是如何与图形计算器对话的. 她刚学完三角函数拿起图形计算器, 顺手输入函数 $y = \ln(\sin x)$, 然后想看其图像会是什么样子. 然后按下 **Plot**. 令她吃惊的是屏幕上出现的图形奇形怪状(对她而言). 于是问“为什么?”. 她试图用已有的知识来解释. 在我的提示下, 她想到了定义域、值域、函数的单调性等, 从而对该图形做了很好的解释. 接着, 为了验证自己的理解, 她又输入了一系列类似的复合函数.

令人注意的是图形计算器的交互性对输入作出反应, 而且反馈的速度如此之快! 让我们再回放这个学生的探索过程: 如果函数是这样, 那么它的图形会是什么样子? 我不知道她是否有猜想. 重要的是她动手画图来发现! 有图形计算器的支持, 她能很快地看到自己干预的结果. 于是她形成了新猜想. 接着她又重复了几次(重复实验).

还要提一下, 这只是“顺手牵羊”的发现!

大家都了解“如果……那么……”这类探究模式的重要性——是科学探索与科学试验的最基本的模式. 佛罗登塔把这类数学家在头脑里进行的活动称为思想试验. 而在图形计算器的交互式几何支持下, 可以使得思想试验视觉化. 学生(甚至教师)能更有信心、更有兴趣看自己干预的后果, 看自己试验的过程与结果. 这种交互的实验探究式的学习方法, 也许不仅有助于学生发展对空间关系的推理和理解能力, 可能还有助于一般认知能力或科学精神的发展.

5. 不可轻视的便携性

图形计算器及掌上理化实验室的突出特征便是其小型化. 它像随身听、手机一样, 可被轻松放入衣服的口袋, 其价格也一般为家庭所能承受. 这无疑使每个学生都拥有它成为可能, 从而为普通人用它来做数学和用数学提供了技术手段的支持.

但令人感到沮丧的是, 一部分教育工作者恰恰忽视了这一点. 由此可见, 在“谁是学习活动的主体”这一根本问题认识上的差异会导致深刻分歧! 对便携性的重视程度反映了我们的教学观. 在图形计算器各项优点中, 主张绿色数学教育的认识建构主义者们自然会非常看重小巧而又“五脏俱全”的特点. 理由很简单, 它为以学生为中心的数学活动或教学情景提供了迄今为止最好的数学探索工具. 学生和教师可以随时随地地拿这个“小精灵”来做一会儿数学或玩一会儿数学.

但有的教师却片面地看重高档 PC 机和教学软件的表现力(特别是多媒体), 只强调了用它来向学生演示和讲解这一面, 而对掌上电脑不屑一顾. 在“两利相权取其大”时, 他们的价值天秤偏向了教师“表演”一侧. 在使用图形计算器之初, 我们的 TTC 成员们也停留在由教师用

图形计算器向学生演示概念的形成过程,他们更看重多媒体的丰富的表现力.但由于受到认识建构观的影响,他们由学生“看教师表演”逐步转向强调学生自己“做”!作为主张以学生为本和“人性的数学”的认识建构主义者,应充分支持学生自主地用工具做数学,构造假设、实验、检验等数学活动.用图形计算器更有力地支持学生主体——这正是笔者所提出的黄金原则.

本书的许多例子都反映了 TTC 的成员设计与控制用图形计算器支持下的数学教学情境.一个典型的例子是赵伟平老师所提供的关于探索幂函数性质的教学活动.从赵老师近乎白描的学生数学活动过程中,我们可以看到,在没有教师干预的情况下,学生是如何探索的.如果细读赵老师的文章,读者从中也许可以观察到图形计算器所起的作用.读者是否也可以做一个思想实验——“如果没有图形计算器,那么又会…….”

第三节 用图形计算器设计数学活动

本节介绍与讨论更为实质性、更为具体,也是教师最为关心的问题,即在实际的数学教学中,我们可以用图形计算器做些什么?我们可以用它创设什么样的教学情境?人们对图形计算器的应用做了哪些探索?对学生的发展产生了什么样的影响?这是一些最终要由课堂实践或学生的表现才能回答的问题,要求我们对有图形计算器参与的数学活动进行分析.这也是我们编写本书的目的.

TTC 与 T^3 的实践表明,虽然任何一种图形计算器的内置功能都是确定的、有限的,但我们在使用实践中却可以通过自己的努力,创造出无穷多种“用图形计算器支持的”的数学活动情境,或综合数理活动情境,使学生的数学理解及更高层次的发展得以实现.例如,为了用图形计算器加深学生对三角函数概念的理解,教师们可以设计的教学情境千变万化.随着对图形计算器功能了解的不断深入,随着教育教学观的更新,随着数学修养的不断提高,我们设置的数学活动的思路、技巧也会有所改进.

本节将从两个角度来回答所提出的问题.首先,我们将直接援引魏茨及德马拉(F. Demana)所概括的使用图形计算器的 10 类典型数学活动,相信读者会了解到美国同行们使用图形计算器的基本类型.其次,我们依据 TTC 及 T^3 的实践,分别从概念学习、问题解决与数学应用等几个方面,来回答所提出的问题.

魏茨和德马拉在“图形计算器和预备项目(C^2PC):我们在过去 10 年间学到了什么?”一文中,把反复出现的使用图形计算器的日常数学活动概括为 10 类.建议读者认真阅读有关这 10 类及相应例子的讨论.根据魏茨等的工作及 TTC 自己的实践,我们把用图形计算器做数学的几个基本模式大致分为如下几种.

1. 以数值方式解决问题

把图形计算器作为科学计算器来使用,使我们摆脱了繁琐的计算.这对于数学教育有重要的意义.早在 20 世纪 80 年代就有人提出:

(1) 在解决问题时,用计算器作为计算工具,使教师、学生,甚至数学家可有更多的时间与注意力集中于问题本身.

(2) 对数值的样式或规律进行观察分析.以下案例是我们从戴维斯的书中的例子:以 2 结尾的整数,一定是偶数,请由此开始你的探索,并尽可能将此命题推广.学生可以通过观