21世纪

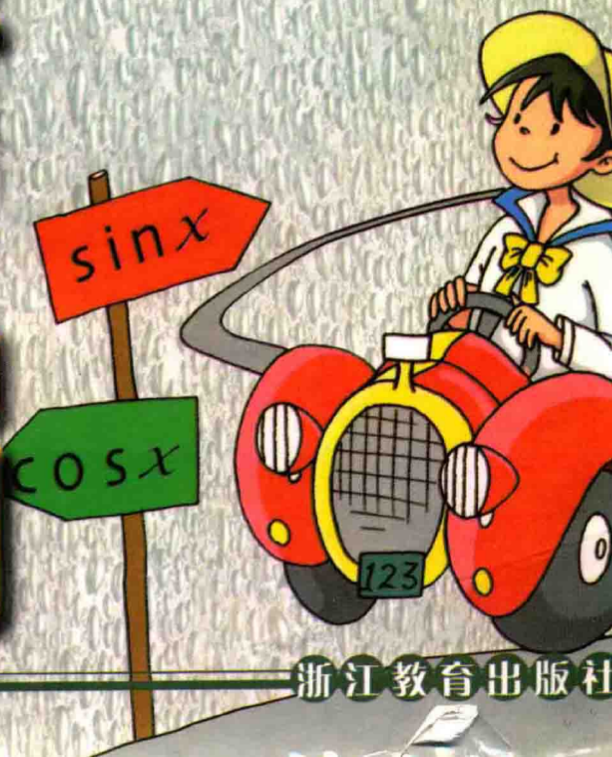
21SHIJI
GAOZHONG
SHUXUE JINGBIAN

高中数学

第一册（下）

（高一第二学期用）

精编



浙江教育出版社

21世纪高中数学精编

第一册(下)

人民教育出版社数学室审阅

主　　编　岑　申(特级教师)　王而冶(特级教师)

副 主 编　金才华(特级教师)　许芬英

本册作者　张永康　李学军　金才华　娄彦飞

杨永华　张小军　高一飞　陈永毅

杨　帆　吴　文　沃　青

浙江教育出版社

21 SHIJI GAOZHONG SHUXUE JINGBIAN

图书在版编目（CIP）数据

21 世纪高中数学精编．第 1 册（下）／岑申，王而冶主编．
杭州：浙江教育出版社，2000.12（2002.1 重印）

ISBN 7-5338-3932-3

Ⅰ.2...　Ⅱ.①岑...②王...　Ⅲ.数学课-高中-教
学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 82804 号

责任编辑 朱承信　　封面设计 韩　波

21世纪高中数学精编　第一册(下)

主　　编：岑　申　王而冶
审　　阅：人民教育出版社数学室
出版发行：浙江教育出版社
印　　刷：金华南方彩印厂
开　　本：850×1168　1/32
印　　张：8.75
字　　数：218000
版　　次：2000年12月第1版
印　　次：2002年1月第3次印刷
书　　号：ISBN 7-5338-3932-3/G·3907
定　　价：10.00元

第四章 三角函数…………………………………………………… 1
学习导引……………………………………………………………… 1
基础例说·基本训练 …………………………………………………… 6
4.1 角的概念的推广 ………………………………………………… 6
4.2 弧度制……………………………………………………………… 11
4.3 任意角的三角函数………………………………………………… 16
4.4 同角三角函数的基本关系式……………………………………… 24
4.5 正弦、余弦的诱导公式 …………………………………………… 36
4.6 两角和与差的正弦、余弦、正切………………………………… 47
4.7 二倍角的正弦、余弦、正切……………………………………… 65
4.8 正弦函数、余弦函数的图象和性质……………………………… 74
4.9 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象 ………………………… 88
4.10 正切函数的图象和性质 ………………………………………… 102
4.11 已知三角函数值求角 …………………………………………… 110
应用·拓展·综合训练…………………………………………………… 116
自我评估……………………………………………………………… 142
第五章 平面向量…………………………………………………… 148
学习导引……………………………………………………………… 148
基础例说·基本训练 …………………………………………………… 152
5.1 向量 ……………………………………………………………… 152
5.2 向量的加法与减法 ……………………………………………… 156
5.3 实数与向量的积 ………………………………………………… 163
5.4 平面向量的坐标运算 …………………………………………… 170
5.5 线段的定比分点 ………………………………………………… 177
5.6 平面向量的数量积及运算律 …………………………………… 181

5.7 平面向量数量积的坐标表示 …………………… 188
5.8 平移 …………………………………………… 191
5.9 正弦定理、余弦定理……………………………… 196
5.10 解斜三角形应用举例 …………………………… 204
5.11 实习作业 ……………………………………… 208
应用·拓展·综合训练…………………………………… 211
自我评估………………………………………………… 226
答案或提示……………………………………………… 232

第四章　三角函数

学习导引

三角函数在物理学、天文学、测量学以及其他各种应用技术学科中有着极其广泛的应用，尤其是它具有周期性变化的独特性质，使它在描述、研究物体的振动、电流的变化等周期性运动中成为必不可少的工具.学习本章主要是以前面已经学过的集合、对应、函数，以及相似三角形和圆等知识为基础.通过本章的学习将使我们对函数这一重要的数学知识有更深刻的认识，更完整地掌握初等函数的研究方法，提高我们的综合、分析、抽象、概括、归纳、联想与类比等的思维能力，为今后学习高等数学打好基础.

本章主要内容是任意角的概念、弧度制、任意角的三角函数、单位圆中的三角函数、同角三角函数间的关系，诱导公式、两角和与差的正弦、余弦、正切、二倍角的正弦、余弦、正切、三角函数的图象和性质，周期函数以及已知三角函数值求角等.

本章的重点是：任意角三角函数的概念，同角三角函数间的关系式，诱导公式，正弦、余弦的和角公式及其应用，正弦曲线的画法和正弦函数的性质.难点是：弧度制的概念，综合运用本章的公式进行简单的三角函数式的化简、求值及恒等式的证明，周期函数的概念，函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象和性质.

公式繁多是本章的主要特点.三角函数式的变换需要较强的思维灵活性，三角函数的图象和性质与我们以往学习过的一次函数、二次函数、反比例函数的图象和性质相比较，则要复杂得多.本章的这些特点虽然给学习带来一些困难，但是如果能抓住问题的本质和关键，注意知识的内在联系，这些困难是不难克服的.下述建议供同学们参考：

1. 搞清三角函数概念的本质.三角函数的本质是角到有向线

段的数量的映射.因此,三角函数概念具有代数和几何的双重属性,在研究三角函数问题时必须使代数方法和几何方法相结合.

2. 单位圆和三角函数线直观地表示了各个三角函数,熟练地掌握单位圆和三角函数线不仅有助于我们对三角函数概念的深刻理解,而且还能帮助我们掌握同角三角函数的基本关系和诱导公式.

3. 搞清周期函数的概念和各个三角函数的周期性,掌握各个三角函数在一个周期范围内的图象,并由图象掌握三角函数的单调性、奇偶性等性质,这样就能见一斑而知全貌,提高学习效率.

4. 对所学的公式要及时归纳整理,搞清各公式之间的联系和推导顺序,注意各公式的结构特征和适用范围.诱导公式数量虽多,但归纳起来就只有两类:一是同名变换(如 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$);二是互余变换(如 $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$).不论哪一类公式等式右边的符号,都由公式左边的角(α 都视作锐角)所在象限来确定.又如和角、差角的三角函数公式的推导顺序如下:$C_{(\alpha+\beta)}\to C_{(\alpha-\beta)}\to S_{(\alpha+\beta)}\to S_{(\alpha-\beta)}\to T_{(\alpha+\beta)}\to T_{(\alpha-\beta)}\to S_{2\alpha}, C_{2\alpha}, T_{2\alpha}$,掌握这一顺序将有助于我们掌握这一系列公式.在运用三角函数公式进行三角函数式变形时,我们要注意观察被变换式的特征,并根据这些特征来选择适当的公式和方法.解题时要不断地总结规律,积累一些常用变换方法,如降次、化积及设辅助角等.

本章的主要概念、定理和公式:

1. 主要概念:

(1) 正角、负角、零角的概念及象限角的概念;

(2) 角度制与弧度制的概念;

(3) 三角函数的概念:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r}\qquad \tan\alpha=\frac{y}{x}$$

$$\cot\alpha=\frac{x}{y}\qquad \sec\alpha=\frac{r}{x}\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}$$

其中 x,y 分别为角 α 的终边上任意一点的横坐标与纵坐标，r 为该点与原点间的距离，即：$r=\sqrt{x^2+y^2}>0$；

(4) 单位圆、正弦线、余弦线、正切线、余切线的概念；

(5) 正弦曲线、余弦曲线.正切曲线与余切曲线的概念；

(6) 周期函数的概念，周期和最小正周期的概念；

(7) 振幅、频率、相位以及初相的概念；

(8) 实数 a 的反正弦、反余弦、反正切以及反余切的概念和它们的符号 $\arcsin a$，$\arccos a$，$\arctan a$，$\operatorname{arccot} a$.

2. 主要公式：

(1) 平面上两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$的距离公式：

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

(2) 所有与角 α 终边相同的角(包括角 α)的表示方法为：$S=\{\beta|\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$或 $S=\{\beta|\beta=2k\pi+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

(3) 弧长公式：$l=|\alpha|\cdot R$ （其中 α 为此圆弧所对的圆心角的弧度数，R 为此圆的半弦).

(4) 扇形的面积公式：$S=\frac{1}{2}lR$.

(5) 角度与弧度的转化公式：

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{rad};\qquad 1\text{rad}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ;$$

(6) 诱导公式：

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$； $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$；

$\tan(180^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$； $\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$；

$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$； $\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$；

$\tan(180^\circ+\alpha)=\tan\alpha$； $\cot(180^\circ+\alpha)=\cot\alpha$；

$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$； $\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$；

$\tan(360^\circ-\alpha)=-\tan\alpha$； $\cot(360^\circ-\alpha)=-\cot\alpha$；

$\sin(k\cdot360^\circ+\alpha)=\sin\alpha$; $\cos(k\cdot360^\circ+\alpha)=\cos\alpha$;

$\tan(k\cdot360^\circ+\alpha)=\tan\alpha$; $\cot(k\cdot360^\circ+\alpha)=\cot\alpha$.

(以上四个公式中的 k 均为整数,即 $k\in\mathbf{Z}$)

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$; $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$;

$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$; $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$;

$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$;

$\tan(90^\circ-\alpha)=\cot\alpha$; $\cot(90^\circ-\alpha)=\tan\alpha$;

$\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha$; $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$;

$\tan(90^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$; $\cot(90^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$;

$\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha$;

$\tan(270^\circ-\alpha)=\cot\alpha$; $\cot(270^\circ-\alpha)=\tan\alpha$;

$\sin(270^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$; $\cos(270^\circ+\alpha)=\sin\alpha$;

$\tan(270^\circ+\alpha)=-\cot\alpha$; $\cot(270^\circ+\alpha)=-\tan\alpha$.

(7) 同角三角函数的基本关系式:

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

(8) 两角和与差的正弦、余弦、正切公式:

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};$$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$;

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$

(9) 二倍角的正弦、余弦、正切公式:

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$;

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

（10）半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \text{或} \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

此外，由(7)，(8)，(9)，(10)这四组公式还可推导出许多公式，如三倍角公式，万能置换公式，……等，同时要注意这些公式的变形，如 $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$，$\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$ 等.

（11）有关三角函数的最小正周期的计算公式：

$y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$；

$y = A\cos(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$；

$y = A\tan(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T = \dfrac{\pi}{|\omega|}$.

（12）已知三角函数值求角的一般公式：

若 $\sin x = a$，

（ⅰ）当 $|a|>1$ 时，无解；

（ⅱ）当 $a=1$ 时，$\{x \mid x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\}$，

当 $a=-1$ 时，$\{x \mid x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}\}$；

（ⅲ）当 $|a|<1$ 时，$\{x \mid x = k\pi + (-1)^k \arcsin a$，$k\in \mathbf{Z}\}$.

若 $\cos x = a$，

（ⅰ）当 $|a|>1$ 时，无解；

（ⅱ）当 $a=1$ 时，$\{x \mid x = 2k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$；

当 $a=-1$ 时，$\{x \mid x = 2k\pi + \pi, k\in \mathbf{Z}\}$；

（ⅲ）当$|a|<1$时，$\{x|x=2k\pi\pm\arccos a, k\in\mathbf{Z}\}$；

若$\tan x=a$，

则$\{x|x=k\pi+\arctan a, k\in\mathbf{Z}\}$.

基础例说·基本训练

4.1 角的概念的推广

【例说】

例1 若角α和β的终边关于y轴对称，则（　　）

(A) $\alpha+\beta=90^\circ$

(B) $\alpha+\beta=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\times180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$

(C) $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$

(D) $\alpha+\beta=(2k+1)\cdot180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$

解 ∵ β和α的终边关于y轴对称.

∴ $\beta=k\cdot360^\circ+(180^\circ-\alpha)$

∴ $\alpha+\beta=k\cdot360^\circ+180^\circ=(2k+1)\cdot180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$

故本题应选(D).

例2 若α为第一象限角，则$\frac{\alpha}{3}$（　　）

(A) 不是第三象限角

(B) 不是第四象限角

(C) 是第四象限角

(D) 不是第一象限角

解 由题设知　$k\cdot360^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+90^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

∴ $k\cdot120^\circ<\frac{\alpha}{3}<k\cdot120^\circ+30^\circ$.

$k=0$ 时， $0^\circ<\frac{\alpha}{3}<30^\circ$ （第一象限角），

$k=1$ 时， $120^\circ<\frac{\alpha}{3}<150^\circ$ （第二象限角），

$k=2$ 时， $240^\circ<\frac{\alpha}{3}<270^\circ$ （第三象限角），

$k=3$ 时， $360^\circ<\frac{\alpha}{3}<390^\circ$ （第一象限角），

……

$\therefore$ $\frac{\alpha}{3}$一定不是第四象限角，本题应选(B).

例 3 在直角坐标系中，角 α 的顶点在坐标原点，始边在 x 轴的正半轴上，若 α 的终边过函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$的两图象的交点，求满足条件的角 α 的集合.

解 由题设知 函数 $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$的图象的交点在角 α 的终边上，设此交点的坐标为 $P(x,y)$，则

$$y<0, x<0\ (\because\ -x>0),$$

$\therefore$ 角 α 为第三象限的角.

又 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)=\log_2(-x)$，

$y=-2^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上是减函数，于是存在反函数

$$f^{-1}(x)=\log_2(-x).$$

$\therefore$ $y=-2^x$ 与 $y=-\log_{\frac{1}{2}}(-x)$互为反函数，它们的图象关于直线 $y=x$ 对称，故它们的交点 P 必在直线 $y=x$ 上，又 P 在第三象限，

$\therefore$ $\alpha=k\cdot360^\circ+225^\circ$ $(k\in\mathbf{Z})$，

即角 α 的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360^\circ+225^\circ, k\in\mathbf{Z}\}$.

例 4 若 α 是第二象限角，那么 $90^\circ-\alpha$ 是(　　)

(A) 第一象限角　　(B) 第四象限角

(C) 第一或第四象限角　　(D) 第一或第二象限角

解 由题设知 $k\cdot360^\circ+90^\circ<\alpha<k\cdot360^\circ+180^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ -k\cdot360^\circ-180^\circ<-\alpha<-k\cdot360^\circ-90^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ -k\cdot360^\circ-90^\circ<90^\circ-\alpha<-k\cdot360^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ 90^\circ-\alpha$ 为第四象限角,本题应选(B).

例5 写出与 -1035° 终边相同的角,并指出其中属于 $[-720^\circ,720^\circ]$ 的角.

解 $\because\ -1035^\circ=-3\times360^\circ+45^\circ$,

$\therefore$ 与 -1035° 角具有相同终边的角为

$$\alpha=k\cdot360^\circ+45^\circ\ (k\in\mathbf{Z}).$$

依题意有 $-720^\circ\leqslant k\cdot360^\circ+45^\circ\leqslant720^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ -\dfrac{17}{8}\leqslant k\leqslant\dfrac{15}{8}\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ k=-2,-1,0,1$.

当 $k=-2$ 时,$\alpha=-675^\circ$; 当 $k=-1$ 时,$\alpha=-315^\circ$;

当 $k=0$ 时, $\alpha=45^\circ$; 当 $k=1$ 时, $\alpha=405^\circ$.

故满足条件的角为 $\alpha=-675^\circ,-315^\circ,45^\circ,405^\circ$.

例6 若角 θ 的终边与 $\dfrac{\pi}{3}$ 的终边相同,在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内哪些角的终边与 $\dfrac{\theta}{3}$ 的终边相同.

解 由题设知 $\theta=k\cdot360^\circ+60^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ \dfrac{\theta}{3}=k\cdot120^\circ+20^\circ\ (k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore\ 0^\circ\leqslant k\cdot120^\circ+20^\circ<360^\circ$,

$\therefore\ -20^\circ\leqslant k\cdot120^\circ<340^\circ$,即 $-\dfrac{1}{6}\leqslant k<\dfrac{17}{6}$.

$\because\ k\in\mathbf{Z}$, $\therefore\ k=0,1,2$.

当 $k=0$ 时,$\alpha=20^\circ$; 当 $k=1$ 时,$\alpha=140^\circ$;

当 $k=2$ 时,$\alpha=260^\circ$.

$\therefore$ 在 $[0^\circ,360^\circ)$ 内与 $\dfrac{\theta}{3}$ 的终边相同的角为 $20^\circ,140^\circ,260^\circ$.

【训练】

1. 已知集合 $M=\{x\mid x=k\cdot45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=k\cdot90^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，$P=\{x\mid x=k\cdot180^\circ+45^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$，那么（　）

(A) $P\subset N\subset M$　　(B) $P=N\subset M$

(C) $P\subset N=M$　　(D) $P=N=M$

2. 若 α 是第四象限角，则 $180^\circ-\alpha$ 是（　　）

(A) 第一象限角　　(B) 第二象限角

(C) 第三象限角　　(D) 第四象限角

3. 如果 $-90^\circ<\alpha<\beta<90^\circ$，那么 $\alpha-\beta$ 的取值范围是（　）

(A) $(-90^\circ,0^\circ)$　　(B) $(-90^\circ,90^\circ)$

(C) $(-180^\circ,0^\circ)$　　(D) $(-180^\circ,180^\circ)$

4. 集合 $M=\{\alpha\mid\alpha=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{N}\}$ 中，各角的终边都在（　　）

(A) x 轴的正半轴上

(B) y 轴的正半轴上

(C) x 轴和 y 轴上

(D) x 轴的正半轴或 y 轴的正半轴上

5. 已知下列四个角：

(1) $\alpha=160^\circ$，(2) $\beta=480^\circ$，(3) $\gamma=-960^\circ$，(4) $\theta=-1600^\circ$.

其中属于第二象限的角是（　　）

(A) (1)　　(B) (1),(2)

(C) (1),(2),(3)　　(D) (1),(2),(3),(4)

6. 如果以原点为顶点，x 轴的正方向为始边的角 α 的终边上一点 $P(x,y)$ 落在直线 $y=-\sqrt{3}x$ 上 $(x^2+y^2\neq0)$，那么角 α 的集合是（　）

(A) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot180^\circ+150^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

(B) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot180^\circ+120^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

(C) $\{\alpha\mid\alpha=k\cdot360^\circ+120^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$

(D) $\{\alpha \mid \alpha = k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$

7. (1) 与 -45°角的终边相同的角的集合是________.

(2) 如果 α 是第三象限角,那么 α 的取值范围是________.

(3) 若角 α 与 β 的终边是互为反向延长线,则 α,β 之间满足的关系式是________.

(4) 若角 α 的终边和函数 $y=-|x|$ 的图象重合,则 α 的集合是________.

(5) 在 -720° 与 720° 之间,与 60° 角具有相同终边的角是________.

(6) 设角 α 的终边与 252° 的角的终边关于 y 轴对称,且有 $-360^\circ < \alpha < 360^\circ$,那么 $\alpha=$________.

8. 已知角 α 的顶点在坐标原点,以 x 轴的正方向为始边,$P(x,y)$为角 α 的终边上的点,且点 P 是函数 $y=-\frac{3}{x}$ 的图象的对称轴与函数 $y=2^x$ 的图象的交点,求满足上述条件的角 α 的集合.

9. (1) 如果角 α 和 β 的终边重合,那么 $\alpha-\beta=$________.

(2) 如果角 α 和 β 的终边关于 x 轴对称,那么 $\alpha+\beta=$________.

10. 如果角 $\alpha \neq k \cdot 180^\circ$, $\theta_1 = k_1 \cdot 360^\circ + \alpha$, $\theta_2 = k_2 \cdot 360^\circ - \alpha$ ($k, k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$),那么角 θ_1 和 θ_2 的终边的位置关系是( )

(A) 关于 x 轴对称　　(B) 关于 y 轴对称

(C) 互为反向延长线　　(D) 重合

11. 如果集合 $A=\{\alpha \mid k \cdot 360^\circ + 30^\circ < \alpha < k \cdot 360^\circ + 150^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$, $B=\{\beta \mid \beta = k \cdot 360^\circ - 90^\circ < \beta < k \cdot 360^\circ + 45^\circ, k \in \mathbf{Z}\}$,那么 $A \cup B=$________; $A \cap B=$________.

12. 已知 α 是小于 360°的正角,$\beta=7\alpha$,且 β 的终边与 α 的终边重

合,求 α.

13. 如果角 α 的终边经过点 $P(-1,-\sqrt{3})$,试写出角 α 的集合 A,并求出 A 中绝对值最小的角.

4.2 弧度制

【例说】

例 1 某铁道转弯处成圆弧形,其圆弧的半径为 2 km,一列火车以 30 km/h 的速度通过,试问该火车在 10 s 内转过了多少角度?

解 $s=vt=\dfrac{30}{3600}\times 10=\dfrac{1}{12}(\text{km})$,

又 $\alpha\cdot R=s$, $R=2(\text{km})$,

$\therefore$ $\alpha=\dfrac{1}{24}(\text{rad})$, $\therefore$ $\alpha=\dfrac{1}{24}\cdot\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\dfrac{15}{2\pi}\right)^\circ\approx 2.4^\circ$.

注意 弧长公式 $l=R\cdot|\alpha|$ 中的角 α 应是弧度数. 若角 α 是度数,那么必须用公式 $\pi=180^\circ$ 转化成弧度数后再使用公式. 扇形的面积公式为 $S=\dfrac{1}{2}Rl=\dfrac{1}{2}R^2|\alpha|$ 中的 α 也应是弧度数.

例 2 已知扇形的周长为30 cm,试问当它的半径和圆心角各取什么值时,该扇形的面积达到最大,最大面积是多少?

解 设扇形的半径为 R cm,圆心角为 α rad,则有

$2R+\alpha R=30$, $\therefore$ $R(\alpha+2)=30$.

$\because$ $\alpha>0$, $R=\dfrac{30}{\alpha+2}<15$,又 $\alpha<2\pi$,

$\therefore$ $R>\dfrac{15}{\pi+1}$, 即 $\dfrac{15}{\pi+1}<R<15$.

又 $S=\dfrac{1}{2}Rl=\dfrac{1}{2}R^2|\alpha|=\dfrac{1}{2}R^2\alpha$,

$\therefore$ $S=\dfrac{1}{2}R^2\left(\dfrac{30}{R}-2\right)=R(15-R)=-R^2+15R$

$$= -\left(R^2 - 2\times\frac{15}{2}R + \frac{225}{4}\right) + \frac{225}{4}$$

$$= \frac{225}{4} - \left(R - \frac{15}{2}\right)^2 (\text{cm}^2).$$

$\therefore$ 当 $R = \frac{15}{2}$ 时，S 达到最大值，其最大值为 $S_{\max} = \frac{225}{4}$，此时 $\frac{15}{2}(\alpha+2) = 30$，$\alpha = 2$.

$\therefore$ 当圆心角 $\alpha = 2(\text{rad})$，半径 $R = \frac{15}{2}(\text{cm})$ 时，扇形的面积最大，最大面积为 $\frac{225}{4}\text{ cm}^2$.

例 3 已知一扇形的圆心角为120°，求此扇形的面积与其内切圆的面积之比.

解 如图 4-1，$\angle AOB = 120°$，

设内切圆圆心为 O'，$\odot O'$ 切 OA 于 D，切 OB 于 E，切 $\overset{\frown}{AB}$ 于点 C.

则 O, O', C 三点共线，且

$\angle AOC = \angle BOC = 60°$.

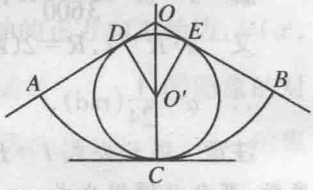


图 4-1

连 $O'D$，则 $O'D = r$.

$\because$ $OO' \cdot \sin 60° = r$，

$\therefore$ $OO' = \frac{2r}{\sqrt{3}}$. 由 $OC = R = OO' + O'C = OO' + r$，

$\therefore$ $r + \frac{2r}{\sqrt{3}} = R$，$\therefore$ $r = \frac{\sqrt{3}R}{2+\sqrt{3}}$，

$\therefore$ $S_{内切圆} = \pi r^2 = \frac{3\pi R^2}{7+4\sqrt{3}}$.

又 $S_{扇} = \frac{1}{2}Rl = \frac{1}{2}R \times \frac{2}{3}\pi R = \frac{1}{3}\pi R^2$，

$\therefore$ $S_{扇} : S_{内切圆} = \frac{1}{3}\pi R^2 : \frac{3\pi R^2}{7+4\sqrt{3}} = (7+4\sqrt{3}):9$.