计算机系列教材

离散数学

张小峰 赵永升
杨洪勇 李秀芳
编著

清华大学出版社

计算机系列教材

离散数学

张小峰　赵永升
杨洪勇　李秀芳　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本书共分12章，内容包含矩阵知识初步、组合数学与数论初步、命题逻辑、谓词逻辑、集合论基础、关系、特殊关系、图论基础、特殊图、代数系统、群论和其他代数系统。本书以训练学生的思维能力为核心，以培养计算机类专业的应用型人才为目的，将计算机数学与算法设计进行有效结合，全面提高学生的程序设计能力和应用创新能力。通过对典型的例题进行分析，培养学生分析问题和解决问题的能力。同时，对一些内容进行延伸，将计算机数学基础与后续的专业知识进行完美结合。

本书可以作为数学类、计算机类的本科教材，也可以作为程序设计大赛培训的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/张小峰，赵永升，杨洪勇，李秀芳编著. —北京：清华大学出版社，2016
计算机系列教材
ISBN 978-7-302-42167-2

Ⅰ. ①离…　Ⅱ. ①张…　②赵…　③杨…　④李…　Ⅲ. ①离散数学–高等学校–教材　Ⅳ. ①O158

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第271781号

责任编辑：白立军
封面设计：常雪影
责任校对：梁　毅
责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市中晟雅豪印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　印　　张：14.5　　字　　数：359千字
版　　次：2016年3月第1版　　印　　次：2016年3月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：29.00元

产品编号：065235-01

前言

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学与技术的重要理论基础。1977年，离散数学被IEEE确定为计算机专业核心主干课程，2004年在计算机5个相关专业的培养计划中，离散数学是计算机工程（Computer Engineering，CE）、计算机科学（Computer Science，CS）和系统工程（System Engineering，SE）3个专业的重要核心课程。作为数据结构、编译原理、数据库原理、操作系统、人工智能等专业课程的前导课程，离散数学不仅需要提供必要的基础知识，更重要的是通过离散数学的学习，培养学生的抽象思维能力和逻辑思维能力，进一步强化学生的程序设计能力。

对于学生而言，单纯的理论知识是枯燥的。因此，增加必要的工程应用，与后续的专业课程进行有效衔接，将提高学生的学习兴趣。在设计具体内容时，本教材借鉴了目前主流教材的特点，除必要的基础知识外，增加了相关知识点的工程应用，突出离散数学在程序设计、算法分析以及相关专业课程中的应用。

1. 特点

1）针对性强，适用范围广

本书针对单学期、短学时的离散数学或计算机数学课程而设计，除必要的基础知识外，增加了学习本课程所需要的矩阵基础知识、组合数学以及数论基础知识。本教材适合高等学校计算机类、数学类等专业的学生使用。

2）授之以渔，注重对解题方法和解题思路的培养

本书针对每一个例题，在给出完整的解题过程之前，尽可能给出详细的分析过程和必要的证明思路。通过对例题的分析，注重对学生解题方法和解题思路的培养，达到“授之以渔”的目的。

3）注重数学的工程应用，培养学生的程序设计思维

本书在设计教学内容时，注重知识点在程序设计、算法分析以及后续专业课程中的应用，让学生了解知识点的应用价值。同时，选取了程序设计大赛中的典型赛题，基于相关的知识点对赛题进行分析，设计巧妙的程序。

2. 内容安排

第1章　矩阵知识初步。对本书中需要的矩阵知识进行简要的介绍，包括矩阵的基本概念、矩阵的运算以及布尔矩阵等。

第2章　组合数学与数论初步。对组合数学及数论的基本知识进行介绍，包括基本计数原则、排列组合、鸽笼原理、素数、最大公约数与最小公倍数、数的进制转换等。

第3章　命题逻辑。对命题逻辑的相关知识进行介绍，包括命题及命题联结词、命

题公式、命题公式的等值演算、联结词的完备集、命题公式的范式、命题逻辑的推理等。

第 4 章　谓词逻辑。对谓词逻辑的相关知识进行介绍，包括谓词逻辑的基本知识、谓词公式的等价及蕴含、谓词逻辑的推理等。

第 5 章　集合论基础。对集合论的基础知识进行介绍，包括集合的基本表示、集合的基本运算、容斥原理等。

第 6 章　关系。对关系的相关知识进行介绍，包括关系的定义与表示、关系的运算、关系的性质等。

第 7 章　特殊关系。介绍了 3 类特殊的关系：等价关系、偏序关系和函数。

第 8 章　图论基础。对图论的基础知识进行介绍，包括图论的基本概念、通路与回路、无向图和有向图的连通性等。

第 9 章　特殊图。介绍 3 种常用的图：欧拉图、汉密尔顿图、树。

第 10 章　代数系统。对代数系统的基本概念进行介绍，包括运算与代数系统的基本定义、运算的性质及特殊元素、代数系统的同态、代数系统与子代数系统等。

第 11 章　群论。对半群、独异点、群的基本概念进行介绍，此外，对置换群、循环群、正规子群等也进行了介绍。

第 12 章　其他代数系统。介绍了环、域、布尔代数等其他代数系统。

本书具体编写分工如下：第 1 章、第 7 章由李秀芳编写，第 8 章、第 9 章由杨洪勇编写，第 10 章、第 12 章由赵永升编写，其余章节由张小峰编写，全书的策划和定稿工作由张小峰负责。

作为鲁东大学软件工程专业、计算机科学与技术专业应用型人才培养的系列教材之一，本书曾作为校内讲义在校内多次印刷，在软件工程、计算机科学与技术、网络工程、信息管理与信息系统等专业中使用。在清华大学出版社正式出版之际，在原讲义的基础上，结合多年的教学实践与改革，进行了较大的修改，使其既能适合在校学生学习，又能适合其他读者阅读。

在本书的规划和写作过程中，山东大学张彩明教授、西安电子科技大学李兴华教授、鲁东大学邹海林教授等对书稿进行了审阅，提出许多建设性的建议，在此深表感谢。清华大学出版社的广大员工也为教材的出版付出了大量的心血，使本书得以及时出版，在此一并致以衷心的感谢。

在本书编写的过程中，作者参考了国内外诸多版本的《离散数学》、《计算机数学基础》等相关教材，同时参考了相关计算机程序设计大赛的相关资料，这里不再一一列举，在此一并感谢。

限于作者学识水平，教材在内容的取舍、教学体系的设计、知识点的构造、程序设计思想的培养等方面肯定存在不足之处，恳请专家、同行和读者提出批评指正。

作者联系方式：iamzxf@126.com。

作　者

2015 年 9 月于烟台

第 1 章　矩阵知识初步

1.0　本章导引

例 1-1　表 1-1 反映了济南、青岛、烟台到北京、上海的动车班次数量。

表 1-1　动车班次数量

	北京	上海
济南	8	6
青岛	5	4
烟台	2	2

可以将这些数字表示成 3 行 2 列的形式，如下：

$$\begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

在实际生活中，经常遇到类似的问题。例如，不同城市之间的距离，物品的生产地和销售地之间的对应关系等，都可以用类似的形式表示。这种形式在表示相关问题时简单、直接。在计算机数学基础中，这种表示形式在关系和图论的研究中有着重要的作用。

1.1　矩阵的概念

定义 1-1　将$m \times n$个数a_{ij}（$i = 1, 2, \cdots, m$，$j = 1, 2, \cdots, n$），按照一定的顺序排列成的一个m行n列的矩形阵列：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个$m \times n$矩阵（matrix），通常用大写字母$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$等表示，可以记为$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$，$a_{ij}$称为矩阵$\boldsymbol{A}$中第$i$行第$j$列的元素（element）。

当$m = n$时，称矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n \times n}$为$n$阶方阵（square matrix）。

例 1-2　有如下的矩阵：

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

则$\boldsymbol{M}$是1×4矩阵，$\boldsymbol{N}$是2×3矩阵，$\boldsymbol{A}$是 3 阶方阵。

定义 1-2 两个$m\times n$矩阵$\boldsymbol{M}$和$\boldsymbol{N}$相等，当且仅当所有的对应元素分别相等。

例 1-3 两个矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2-a+b & 3\\ 4 & 5 & 6-a-b\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 8\end{bmatrix}$$

假设$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求$a$和$b$的值。

分析： 根据定义 1-2，两矩阵相等，即对应位置的元素分别相等，可以根据这一点计算a和b的值。

解：

根据两矩阵相等，可知对应位置上的元素分别相等。因此，

$$\begin{cases}2-a+b=2\\ 6-a-b=8\end{cases}$$

解得$a=b=-1$。

□

定义 1-3 给定矩阵$\boldsymbol{M}=(m_{ij})_{m\times n}$：

（1）如果$m=1$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为行矩阵（row matrix）或行向量（row vector）。

（2）如果$n=1$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为列矩阵（column matrix）或列向量（column vector）。

（3）如果对任意的i、j，有$m_{ij}=0$，称矩阵$\boldsymbol{M}$为零矩阵（zero matrix），记为$\boldsymbol{0}_{m\times n}$或$\boldsymbol{0}$。

（4）如果$m=n$，且对任意的i，有$m_{ii}=1$，其他所有的元素均为 0，称矩阵$\boldsymbol{M}$为单位矩阵（identity matrix），记为E或I。

（5）如果$m=n$，且主对角线以上或以下的元素为 0，称为三角矩阵（triangular matrix）。其中，

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为上三角矩阵（upper triangular matrix）；

$$\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

称为下三角矩阵（lower triangular matrix）。

1.2 矩阵的运算

定义 1-4 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则两个矩阵的和（sum）与差（difference）定义为

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

从定义 1-4 可以看出，两个矩阵只有具有相同的行数和列数时，才能进行相加减。

例 1-4 设有矩阵$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$，定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\4 & 5 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 8\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+1 & 5+2 & 3+3\\4+4 & 5+5 & 1+8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7 & 6\\8 & 10 & 9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1-1 & 5-2 & 3-3\\4-4 & 5-5 & 1-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0\\0 & 0 & -7\end{bmatrix}$$

□

不难验证，矩阵的加法满足下列运算定律。

（1）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$。

定义 1-5 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$k\in R$是常数，则矩阵$(ka_{ij})_{m\times n}$称为数$k$与矩阵$\boldsymbol{A}$的数乘（scalar multiplication），记为$k\boldsymbol{A}$，即$k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$。

不难验证，矩阵的数乘满足如下性质。

（1）$(k_1k_2)\boldsymbol{A}=k_1(k_2\boldsymbol{A})$。

（2）$(k_1+k_2)\boldsymbol{A}=k_1\boldsymbol{A}+k_2\boldsymbol{A}$；$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$。

（3）$k\boldsymbol{A}=0\Leftrightarrow k=0$或$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$。

例 1-5 给定两矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，定义如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\-1 & 2 & 1\\4 & 4 & 2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 1 & 1\\2 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

且$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，求矩阵$\boldsymbol{X}$。

解： 显然，矩阵$\boldsymbol{X}$与$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是同种类型的，均为 3 阶方阵，不妨设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\x_{21} & x_{22} & x_{23}\\x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}$$

根据$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$，有

$$3\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} 9-2x_{11} & 3-2x_{12} & -2x_{13} \\ -3-2x_{21} & 6-2x_{22} & 3-2x_{23} \\ 12-2x_{31} & 12-2x_{32} & 6-2x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

两矩阵相等必有对应元素分别相等，因此有

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 4 & \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 5 & \frac{11}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

□

定义 1-6 设矩阵$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times p}$，矩阵$\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{p\times n}$，则两个矩阵的乘积（product）定义为$\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

记为$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$。

从定义 1-6 可以看出，两个矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$如果可以相乘，则矩阵$\boldsymbol{A}$的列数必须与矩阵$\boldsymbol{B}$的行数相同，否则两者无法相乘。

例 1-6 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，试计算$\boldsymbol{AB}$和$\boldsymbol{BA}$。

解：

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{AB} \\ =&\begin{bmatrix} 3\times 1+1\times(-1)+0\times 2 & 3\times 0+1\times 1+0\times 1 & 3\times 2+1\times 1+0\times 1 \\ (-1)\times 1+2\times(-1)+1\times 2 & (-1)\times 0+2\times 1+1\times 1 & (-1)\times 2+2\times 1+1\times 1 \\ 4\times 1+4\times(-1)+2\times 2 & 4\times 0+4\times 1+2\times 1 & 4\times 2+4\times 1+2\times 1 \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 14 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{BA} \\ =&\begin{bmatrix} 1\times 3+0\times(-1)+2\times 4 & 1\times 1+0\times 2+2\times 4 & 1\times 0+0\times 1+2\times 2 \\ (-1)\times 3+1\times(-1)+1\times 4 & (-1)\times 1+1\times 2+1\times 4 & (-1)\times 0+1\times 1+1\times 2 \\ 2\times 3+1\times(-1)+1\times 4 & 2\times 1+1\times 2+1\times 4 & 2\times 0+1\times 1+1\times 2 \end{bmatrix} \\ =&\begin{bmatrix} 11 & 9 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \\ 9 & 8 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

从例 1-6 可以看出，矩阵的乘法运算不满足交换律。可以验证，矩阵的乘法运算满足如下的性质。

（1）$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，$k(\boldsymbol{AB}) = (k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$。

（2）$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$。

定义 1-7 设矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，矩阵$\boldsymbol{A}$的转置（transpose）记为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$或$\boldsymbol{A}'$，定义为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(a'_{ij})_{n\times m}，\text{其中}a'_{ij}=a_{ji}$$

例 1-7 如果矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&0\\-1&2&1\\4&4&2\end{bmatrix}$，则矩阵$\boldsymbol{A}$的转置为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}3&-1&4\\1&2&4\\0&1&2\end{bmatrix}$。

可以证明，矩阵的转置满足如下的性质。

（1）$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。

（3）$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

1.3 布尔矩阵

定义 1-8 如果一个$m\times n$矩阵中的所有元素都是 0 或 1，称该矩阵是布尔矩阵（Boolean matrix）。

需要说明的是，布尔矩阵中的 0 或 1 并不代表数值中的 0 或 1，而是代表布尔常量 0 或 1，分别表示逻辑假（false）和逻辑真（true）。

与一般矩阵的运算相同，布尔矩阵也可以进行加、减和乘法运算，但由于布尔值进行加、减和乘法运算没有意义，因此需要定义布尔矩阵的运算，它与一般矩阵的运算是不同的。

定义 1-9 设有布尔矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$和$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则：

（1）两个布尔矩阵的交集（intersection），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果}a_{ij}=0\text{或}b_{ij}=0\\1 & \text{如果}a_{ij}=1\text{且}b_{ij}=1\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m，\ j=1,2,\cdots,n)$$

（2）两个布尔矩阵的并集（union），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}0 & \text{如果}a_{ij}=0\text{且}b_{ij}=0\\1 & \text{如果}a_{ij}=1\text{或}b_{ij}=1\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots,m，\ j=1,2,\cdots,n)$$

例 1-8 给定两矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}，\quad\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$$

□

定义 1-10 如果布尔矩阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times p}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{p\times n}$，则两个布尔矩阵的布尔积（Boolean product），记为$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=(c_{ij})_{m\times n}$，定义为

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \text{如果存在}k=1,2,\cdots,p，\text{使}a_{ik}=1\text{且}b_{kj}=0\\0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中，$i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$。

例 1-9 给定两矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$, 计算$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的布尔积$\boldsymbol{C}$。

解:

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{12}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{21}=1$，因此$c_{11}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{11}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{12}=1$，因此$c_{12}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{12}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{23}=1$，因此$c_{13}=1$。

由于$\boldsymbol{A}$中的第一行中$a_{11}=1$，$\boldsymbol{B}$的第一列中$b_{14}=1$，因此$c_{14}=1$。

类似地，可以求出矩阵$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的布尔积$\boldsymbol{C}$，如下:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

□

可以证明，布尔矩阵的运算满足如下性质。

（1）$\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{A}$。

（2）$(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\vee\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})$，$(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\wedge\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})$。

（3）$\boldsymbol{A}\vee(\boldsymbol{B}\wedge\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{B})\wedge(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{C})$，$\boldsymbol{A}\wedge(\boldsymbol{B}\vee\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B})\vee(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{C})$。

（4）$(\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B})\odot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\odot(\boldsymbol{B}\odot\boldsymbol{C})$。

习题 1

1. 已知矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$定义如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&3&2\\-1&4&2\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&1&3&1\\2&2&4&2\\3&3&2&3\end{bmatrix}$$

计算:

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。　　（2）$2\boldsymbol{A}$，$3\boldsymbol{B}$。

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{B}$。　　（4）$\boldsymbol{AB}$。

2. 已知两布尔矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$定义如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}$$

计算:

（1）$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\vee\boldsymbol{B}$。　　（2）$\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$。　　（3）$\boldsymbol{A}\odot\boldsymbol{B}$。

第 2 章　组合数学与数论初步

2.0　本章导引

例 2-1　从烟台出发，到北京、上海、西安、杭州、拉萨 5 个城市旅游，最后回到烟台。已知所有城市间的单向路线的费用，旅游费用可以按路线的费用累加得到，那么按照怎样的顺序游玩这些城市，费用最省？

分析：如果能列出所有的旅游路线，计算每条线路的费用，选择费用最少的线路即可。由于起点和终点是确定的，其根本在于中间的 5 个城市如何选择，这 5 个城市的排列有$5! = 120$种方案，即有 120 种不同的选择。将每条线路的费用计算出来，从 120 种结果中选择最少的即可。

例 2-2　甲数是 36，甲、乙两数的最小公倍数是 288，最大公约数是 4，乙数应该是多少？

分析：此题的关键在于找出两数最小公约数和最大公倍数之间的关系。由于两者的最大公约数是 4，因此乙应该是 4 的倍数，但不是 12 和 36 的倍数。可以从这个角度去搜索这个数。

2.1　基本计数原则

分析计算机算法的时间复杂性和空间复杂性时，需要对计算机的基本运行次数和占用的存储空间进行计数，这是计数的基本运用。基本的计数原则有加法原则和乘法原则。

2.1.1　加法原则

从烟台到北京，可以坐飞机或火车，飞机每天有 4 个航班，火车每天有 5 个车次，则从烟台到北京有 9 种不同的选择方式。这是加法原则的基本应用。

定义 2-1（加法原则）　实现一个任务，有n种不同的方式可以选择，每种方式都可以独立完成任务，在第k种方式中，有a_k种具体的实现方式。则实现这个任务的方式有：

$$N = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

例 2-3　学生请老师推荐一本程序设计的入门教材，该老师熟悉 C、C++、Java 三门编程语言，已知这三门语言的入门教材分别有 4、5 和 6 本。那么该教师可以有 4+5+6=15 种选择方式。