XUESHENGBANKEWAIBIDUCONGSHU

学生版课外必读丛书

数学故事·二

32

主　　编：陈国勇
责任编辑：沈晓莉

浙江少年儿童出版社

中小学生故事金库・中外科学故事

数学故事・二

本书编委会

浙江少年儿童出版社

粤新登字 16 号
责任编辑　沈晓莉
责任校对　赵慧锋
封面设计　陈志强

书　　名　学生版课外必读丛书
编　　者　陈国勇主编
出版发行　浙江少年儿童出版社
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　杭新印务有限公司印刷厂
规　　格　787×1092 毫米　32 开本
印　　张　389.975 印张
字　　数　7658 千字
版　　次　2004 年 6 月第 1 版
印　　次　2004 年 6 月第 1 次印刷
印　　数　1－10000 册
书　　号　ISBN7－5342－2732－1/E·1
定　　价　(全套 100 本)928.80 元

目　录

数学史上第一人—泰勒斯

泰勒斯是希腊数学史上第一位留下姓名的人。在泰勒斯所处的时代很久以前，人们已经知道了许多数学事实。例如，等腰三角形的底角相等；圆被其任意一条直径二等分；内接于半圆的角必为直角等等。这些结果都不难依据直观和实验的方法得到。泰勒斯受当时西方唯理论思想的影响，不满足于以经验为根据的方法，而采用了某种逻辑推理的方法对几何事实予以证明，成为演绎方法的最初倡导者之一。在数学方面的功绩在于开始把几何学从经验的概括变成了一种自觉的、审慎的智力活动。这样也更便于把几何知识条理化，从而把数学结果的建立由“实验室”搬进了“书斋”，其思想上的价值，不愧称为数学发展史上的一个里程碑。

泰勒斯是公元前六世纪前半期的人，生于小亚西亚西南海岸的米利都，米利都是当时新兴的商业城市之一。泰勒斯早年经商，在他赚取厂足够的钱财之后，开始了他的研究和旅行生活。关于他，有许多有趣的传说反映出他的个人秉性和特点。据说，有一匹骡子，每当驮盐过河时发现在水中打滚能减轻负载，这使得盐商遭受损失。为了改变这种令人讨厌的习性，泰勒斯就让它驮海绵。由于海绵能汲附河水，在河中打滚反而增加了重量，从而治住了这匹难对付的骡子。有一次，泰勒斯在观察星辰时不小心掉在沟里。一个色雷斯女奴隶笑他说：想要知道天上发生的事，可是连自己脚边上有什么也看不见。其实，

泰勒斯的眼睛并不总是盯着天上，也不属于书呆子类型的人物，比如他就很会做买卖。一次，他炫耀自己致富是何等地容易。当时，他预见到橄榄油将获得丰收，就买下了该地区所有的榨油设备，然后找准时机再把它们租出去，获得了可观的利润。还有一次梭伦问他为什么一辈子不结婚？泰勒斯并不作正面答复，而作出惊人之举。他在第二天派人给梭伦送去一个假消息，说梭伦心爱的儿子遇到了意外，突然被人杀死了。正在梭伦为儿子惨遭不幸而异常伤心的时候，泰勒斯才向梭伦讲明原委。他说：我只不过是想告诉你我为什么一辈子不打算结婚。当别人问起，怎样才能引导更多的人正直地生活时，他劝告说：每个人都别做自己讨厌别人做的事。有趣的是，泰勒斯的思想正与中国古训“己所不欲，勿施于人”相合。由于泰勒斯游历过许多地方，见多识广，别人问他曾见过最稀奇的东西是什么？他答道：寿命长的暴君。

当时，位于现在伊朗、阿富汗北部和土耳其东部的米太国和位于现今土耳其西部的吕地亚国发生一场剧烈的战争，战争延续了五年还难见胜负，死伤很多人，百姓生活十分痛苦，怨声载道。传说泰勒斯推算出某日将有日蚀发生，便传扬“上天反对这场战争”，预言将在某月某日用日蚀作出警告。果然到了那一天，两军正相互厮杀酣战不止，突然太阳失去光辉，群鸟归林，顿时白昼变成了黑夜，天空中明星闪烁。这使交战双方的将领大为惊恐，于是赶紧停战和好，后来两国还互通嫁娶成为友好国家。据推算，这次日蚀发生在公元前 585 年 5 月 28 日。历史学家们往往利用日蚀发生的时间反过来推断这次战争的年代。

泰勒斯曾游历过巴比伦、埃及等地，他在埃及的时候曾利用日影来计算金字塔的高度，这件事使埃及法老阿美西斯都感

到十分惊奇。关于测算金字塔高度的方法有两种传说，较早的说法是由亚里士多德的学生希罗尼穆斯提出的。他说：泰勒斯在他的影子和自己身高一样长的时候记下金字塔影子的长，从而直接推断出金字塔的高度就是塔影的长度。另一个说法来自希腊历史学家普鲁塔克的记载，据称泰勒斯把一根长杆垂直竖立在平地上，利用塔影长与杆影长的比等于塔高与杆长的比，即

(塔高?)：杆长＝塔影长：杆影长

可以算出金字塔的高度。事实上，这两种具体测算的说法都存在一个共同的疑点，就是金字塔不像一根杆子那样，它有很大的底座，由于人们无法直接到达底座中心处，塔影的长度究竟怎样测量出来，确实是个问题。丹齐克指出了这一点，并提出几种可能的测算办法。例如，作两次观测，再利用相似形的关系不难算出塔高。有兴趣的读者不妨动手试算一下。虽然对泰勒斯具体测算的方法没能考据清楚，但是从他所证明过的几何命题来看，泰勒斯是懂得比例知识的，可以相信他确曾测算出金字塔的高度。

据传，泰勒斯曾用数学方法计算一条船与岸之间的距离。所用到的知识是：两个三角形，它们的两个角及所夹边对应相等，则这两个三角形全等。可见，今天初中平面几何中的许多知识已被二千五百多年前的人所掌握。泰勒斯不满足于知其然，还要深究其中道理，开始了命题的证明。证明命题是希腊几何学的基本精神，泰勒斯是希腊几何学的先驱者。

泰勒斯是一位有多方面才华的学者，他享有政治家、律师、工程师、实业家、数学家和天文学家的声誉。他还是一位哲学

家，是爱奥尼亚哲学学派的创始人，还被称为古代七贤之首。虽然他有很大成就，当别人问他：你对自己的发现愿拿多少报酬？他回答说：当你把它（指他的发现）告给别人时，不说是你的发现而说是我的发现，这就是对我的最大酬谢。

（张国栋）

带有神秘色彩的学派

提起毕达哥拉斯的名字，人们很容易与大家熟知的“勾股定理”联系起来，西方数学界就把这个定理叫做“毕达哥拉斯定理”。据本世纪对于在美索不达米亚出土的楔形文字泥板书进行的研究，人们发现早在毕达哥拉斯以前一千多年的古代巴比伦人就已经知道了这个定理。而且在中国的《周髀算经》中记述了约在公元前一千年时，商高对周公姬旦的回答已明确提出“勾三、股四、弦五”。不过“勾股定理”的证明，大概还应当归功于毕达哥拉斯。传说，他们在得到此定理时曾宰杀了一百头牛来祭缪斯女神，以酬谢神的默示。缪斯是神话中掌管文艺、科学的女神。

毕达哥拉斯是科学史上最重要的人物之一，他的思想不仅影响了柏拉图，而且还一直影响到文艺复兴时期的一些哲学家和科学家。

毕达哥拉斯曾旅居埃及，后来又到各地漫游，很可能还去过印度。在他的游历生活中，他受到了当地文化的影响，了解了许多神秘的宗教仪式。还熟悉了它们与数的知识及几何规则

之间的联系。旅行结束后，返回家乡撒摩斯岛。由于政治的原因，他迁往位于南意大利的希腊海港克罗托内居住。在这里他创办了一个研究哲学、数学和自然科学的团体，后来发展成为一个有秘密仪式和严格戒律的宗教性学派组织。

毕氏学派相信，对几何形式和数字关系的沉思能达到精神的解脱。而音乐被看作是净化灵魂达到解脱的手段。

有许多关于毕达哥拉斯的神奇传说。如，他在同一时间出现在两个不同的地方，被不同的人看到；据传说，当他过河时，河神站起身来向他问候："你好啊，毕达哥拉斯"；还有人说，他的一条腿的腿肚子是金子做的。毕达哥拉斯相信人的灵魂可以转生，有人为了嘲弄他的宗教教义而传说，一次他看到一只狗正遭人打，他便说：别打，我从他的声音中队出；我的朋友的灵魂附在了这条狗身上。

要想加入毕氏团体，需要接受一段考验的时期，经过挑选后才被允许去听坐百帘子后面的华达哥拉斯的说教。只有再过若干年后当他们的灵魂由于受音乐的不断熏陶和经历贞洁的生活而变得更加纯净时，才允许见到毕达哥拉斯本人。他们认为，经过纯化并进入和谐及数的神秘境界，可以使灵魂趋近神圣而从轮回转生中解脱。

毕氏学派企图用数来解释一切，不仅万物都包含数，而且认为万物都是数。他们发现，数是音乐和谐的基础。当一根琴弦被缩短到原来长度的一半时，拨动琴弦，音调将提高 8 度；比率为 3 比 2 和 4 比 3 时，相对应的是高 5 度和高 4 度的和声。和声就是由这样一些不同的部分组成的整体。他们认为，正是各种事物的数值比确定了它们各是什么，并显示出彼此的关系。

毕氏学派在哲学上与印度古代哲学有类似之处。都把整数看作是人和物的各种性质的起因，整数不仅从量的方面而且在

质的方面支配着宇宙万物。他们对数的这种认识和推崇，促使他们热衷于研究和揭示整数的各种复杂性质，企望以此来左右和改善自己的命运。

他们对整数进行分类。如整数中有奇数、偶数、质数、亲和数及完全数等等。

注意到整数 48 可以被 2、3、4、6、8、12、16、24 整除，这 8 个数都是 48 的因子，这些因子的和是 75；奇妙的是 75 的因子有 3、5、15、25，它们的和恰好是 48。48 与 75 这一对数叫做“半亲和数”。不难验算 140 与 195 也是一对半亲和数。考虑到 1 是每个整数的因子，把除去整数本身之外的所有因子叫做这个数的“真因子”。如果两个整数，其中每一个数的真因子的和都恰好等于另一个数，这两个数就构成一对“亲和数”。

220 与 284 是毕达哥拉斯最早提出来的一对亲和数，也是最小的一对亲和数。因为 220 的真因子是 1、2、4、5、10、11、20、22、44、55、110，它们的和是 284。284 的真因子是 1、2、4、71、142，其和恰为 220。有人曾经把亲和数用于魔术、法术、占星学和占卦上，使它带有迷信和神秘的色彩。如认为两个人都佩带上分别写着这两个数的护符，就一定能保持良好的友谊，这当然是十分滑稽可笑的。

有趣的是，后来人们总保持对亲和数研究的兴趣。1636 年，法国数学家费马发现了第二对亲和数，它们是 17926 与 18416。两年后笛卡儿给出了第三对亲和数。瑞士大数学家欧拉曾系统地寻找亲和数，1747 年他一下子给出了 30 对，三年后他又把亲和数增加到了 60 对。令人惊奇的是，除去 220 与 284 之外最小的一对亲和数 1184 与 1210 竟被这些数学大师们漏掉了。它被一个 16 岁的意大利男孩帕加尼尼在 1886 年发现。至今，已经知道的亲和数已有一千对以上。

有趣的是人们发现了亲和链：

2115324，3317740；

3649556，2797612。由于第一个数的因子之和是第二个数，第二个数的因子之和是第三个数，……，第四个数的因子和恰好是第一个数，它们是一个四环亲和链。一些构成亲和链的数，只要给出其中的一个，便可以计算出其他的数。如 12496 与其他四个数构成一个五环亲和链。有计算器的读者不妨试算一下，补上其余四个数。

其他与占卦臆测有联系的是完全数。完全数的真因子之和是它自己，好像自己和自己是“一对”亲和数。最小的完全数是 $6=1+2+3$。毕氏信徒认为，数有象征性的含义。例如，4 是公正或报应的数，表示不偏不倚。上帝 6 天创造世界，6 就是个完全数。整个人类是诺亚方舟上的神灵下凡，这一创造是不完善的，因为 8 不是完全数，它大于它的真因子和：$1+2+4$。像 4、8 这样的数叫做亏数。相反，凡小于其真因子和的整数叫做盈数。

最小的三个完全数是 6，28，496。直到 1952 年人们才知道 12 个完全数。欧几里德《原本》第九卷的最后一个命题是，证明：如果 2^{n-1}是一个质数，则 2^{n-1}（2^n-1）是一个完全数。由这个公式所给出的完全数都是偶数。后来大数学家欧拉证明了每一个偶完全数必定是这种形式的。人们自然会问，是否还有其他的完全数？即有没有奇完全数？至今还没有人能回答这个问题。

1952 年，借助 SWAC 数字计算机。又发现了五个完全数；1957 年用瑞士的 BESK 计算机发现了另一个；后来有人用 IBM7090 计算机再发现了两个。至今已知道的完全数已有 27 个。

毕氏学派是一个带有神秘色彩的宗教性组织，但是他们对

于数学的研究确实作出重大贡献。由于毕达哥拉斯的讲授都是口头的，按照他们的习惯，对于各种发现或发明都不属个人姓名，而是都归功于其尊敬的领导者，所以很难辨别他们研究成果是由谁完成的。毕氏学派后来在政治斗争中遭受失败，毕达哥拉斯逃到他林敦后，终被杀害。他死后。他的学派的影响仍然很大，其学派义继续了二百年之久。

（张国栋）

趣话勾股定理

勾股定理，即直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方。这是平面几何中一个最基本，最重要的定理，国外称为毕达哥拉斯定理（约公元前580—500）。可是，我国周朝初年（约公元前1100年）的数学家商高早就讲到过“勾广三，股修四，径隅五”，这实际就是勾股定理的一个特例。据我国史书记载，早在公元前五、六世纪，就用过勾方加股方等于弦方的公式，不过没有给出证明。我国对勾股定理认识的大发展是在西汉时期。这一时期的研究既有理论又有应用，《九章算术》有详细记载。而定理证明，三国时期（公元三世纪）赵爽所著的《勾股圆方图注》进行了详细记述。

赵爽在这本书中，画了一个弦图（图1）两个全等的直角三角形（三角形涂上朱色，它的面积叫做“朱实”）合起来成一个矩形，四个这样的矩形合成一个正方形，中间留出一个正方形的空格（涂上黄色，其面积叫做“中黄实”，也叫“差实”）。

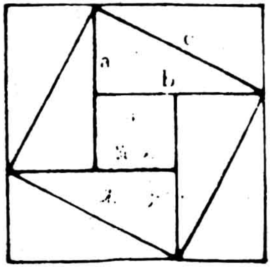

图 1

赵爽注道："色股各自乘，并之为弦实，开方除之即弦。"开方除之是当时开方运算的术语。上面这句话实际上就是勾股定理：$a^2+b^2=c^2$。他又给出了巧妙的证明："按弦图，又可以勾股乘朱实二，信之为朱实四，以勾股之差自相乘中黄实。加差实亦成弦实。"

即　$2ab+(b-a)^2=c^2$

化简便得　$a^2+b^2=c^2$

这个证明不但是勾股定理最早的严谨证明，而且也是有史以来勾股定理证明中最巧妙的一个。

勾股定理作为几何学中一条重要定理，古往今来，有无数人探索过它的证法。据说，它的证明方法有 500 来种。在 1940 年，一本名为《毕达哥拉斯命题》的书中，就搜集了 367 个不同的证法。其中，最令人感兴趣的证法之一，居然是由一位美国总统作出的！

据当代著名数学科普作家马丁·加德纳报道，1876 年 4 月 1 日，波士顿出版的一本周刊《新英格兰教育杂志》上刊出了勾股定理的一个别开生面的证法，编者注明它是由俄亥俄州共和党议员詹姆士·A·加菲尔德所提供，是他和其他议员一起做数

学游戏时想出来的，并且得到了两党议员的一致同意。后来，加菲尔德当选为美国总统。于是，他的证明也就成为人们津津乐道的一段轶事了（据说这是美国总统对数学的唯一贡献）。

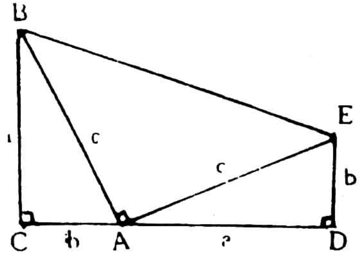

图 2

加菲尔德的证法确实十分干净利落。如图 2 作直角三角形 ABC，设其边长分别为 BA = c 是斜边，AC = b，BC = a。作 AE⊥BA，并使 AE = BA，再延长 CA 到 D，使 AD = BC = a，连 D、E，则四边形 CBED 是梯形，其面积等于

$$\frac{1}{2}DC\ (BC+ED)\ =\frac{1}{2}\ (a+b)^2$$

易证△DAE 与△CBA 是全等三角形，于是△DAE、△CBA 与△ABE 的面积之和等于$\frac{1}{2}c^2+2\cdot\frac{ab}{2}$。

由于图上三个三角形面积之和就是梯形的面积，因而得到等式：

$$\frac{1}{2}\ (a+b)^2=\frac{1}{2}C^2+ab$$

化简后即得：$a^2+b^2=c^2$

于是勾股定理得到证明。

人们在研究勾股定理时还发现一个有趣现象。古巴比伦人就

知道三边为下列各数的一些三角形：

120，	119，	169；
3456，	3367，	4825；
4800，	4601，	6649；
13500，	12709，	18541；
72，	65，	96；
360，	319，	418；
2700，	2291，	3541；
960，	799，	1249；
600，	481，	769；
6480，	4961，	8161；
60，	45，	75；
2400，	1697，	2929；
240，	161，	289；
2700，	1771，	3229；
90，	56，	1060；

以上每个数组中的数，我们称为勾股数。

一般地，如果正整数 X，Y，Z 能满足下列不定方程

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

则它们叫做勾股数。

怎样求出勾股数呢？我们再观察几个简单的直角三角形的

边：

3，	4，	5；	5，	12，	13；
7，	24，	25，	9，	40，	41；
11，	60，	61；	……		

观察这些数，可以现如下规律：

第一个数是奇数，第二个数是第一个数的平方减 1 再除以 2，第三个数是第一个数的平方加 1 再除以 2，即设 m 为奇数，则一般有：

$$m, \qquad \frac{m^2-1}{2}, \qquad \frac{m^2+1}{2}。$$

于是有

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2 \qquad (2)$$

其中 m 为奇数。

但这只是一部分勾股数

(2) 式两边同乘以 4，变形，得：

$$(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2 \qquad (3)$$

显然 (3) 式不论 m 是奇数还是偶数，等式都成立。

只是由 (3) 式仍不能得到全部勾股数。

怎样才能得到全部勾股数呢？在公式 (3) 中，m 为任意自然数，1 是一个特殊的自然数，若它也变成任意自然数，比如变成 n^2，为了使 (3) 式保持恒等，(3) 中的第一项 $(2m)^2$ 应变成 $(2mn)^2$，即有

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)=(m^2+n^2)^2 \qquad (4)$$

其中 $m>n$，$(m, n)=1$ 且 m 除以 n 的余数不等于 2。

可以证明 (4) 式包括了全部勾股数。