李子平　李爱民◎著

约束系统的量子对称性质

北京工业大学出版社

约束系统的量子对称性质

李子平　李爱民　著

北京工业大学出版社

内 容 简 介

本书在扼要介绍约束系统的经典和量子理论的基础上，着重论述了该系统的量子对称性. 书中对作者及合作者等的论文作了系统的归纳整理，特别是对作者通过完成多项自然科学基金项目研究，开创的约束系统的量子正则对称性质，作了较系统、全面、深入的阐述，并以杨-Mills 理论和 Chern-Simons(分数自旋)理论等为例作了较深入的分析.

本书还论述了含附加约束的奇异 Lagrange 量系统的基本理论和对称性. 本书学术思想新颖，内容范围集中，结构系统严谨.

本书不仅适合大学物理专业高年级本科生和研究生使用，还适合从事理论物理、数学物理、场和粒子物理理论、凝聚态物理理论，以及数学、力学等相关专业的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

约束系统的量子对称性质/李子平，李爱民著. —北京：北京工业大学出版社，2011.6
ISBN 978-7-5639-2757-9

Ⅰ.①约… Ⅱ.①李… ②李… Ⅲ.①量子力学-约束条件-研究 Ⅳ.①O413

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 099763 号

约束系统的量子对称性质

著　　者：李子平　李爱民
责任编辑：吕小红　刘津瑜　刘鹏飞
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　100124）
010—67391722（传真）bgdcbs@sina.com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国各地新华书店
承印单位：徐水宏远印刷有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：25.5
字　　数：458 千字
版　　次：2011 年 6 月第 1 版
印　　次：2011 年 6 月第 1 次印刷
标准书号：ISBN 978-7-5639-2757-9
定　　价：45.00 元

前　言

关于物理系统对称性的分析在众多领域中均有重要意义，特别是在微观粒子的性质及其运动规律的探索中尤为突出（描述微观高速运动粒子的基本理论是量子场论）．对称性是现代量子场论中的基本概念，物理学从经典理论发展到量子理论，对称性的研究也从连续对称扩展到分立对称．系统具有某种对称性与系统相应的守恒律紧密相关，传统的经典 Noether 理论涉及的是系统在位形空间中的连续对称性，并且系统不含约束情形（约束是指系统的运动中所受的某些条件的限制，这些条件称为约束条件）．约束条件分为两类：一类是位形空间描述时的附加条件，例如，力学中的完整约束和非完整约束，场论中的场量满足的附加条件；另一类是相空间中描述时出现的正则约束，例如，由奇异 Lagrange 量描述的系统，尽管在位形空间中的 Lagrange 体制描述时，不存在附加约束，但由 Legendre 变换过渡到相空间中 Hamilton 体制描述时，其正则变量之间存在着某些正则约束关系，该系统称为约束正则系统或约束 Hamilton 系统，所有规范理论（规范不变系统）均属于此种情形．

系统的量子化通常是由相空间中的正则变量来表达的，但由于系统存在约束，初等量子力学中的量子化方案已不适用，并且约束系统的量子理论也出现许多新问题，长期以来一直受到人们广泛地关注，因此约束系统的基本理论在现代量子场论中占有十分重要的地位．约束系统的经典和量子正则对称性，此前在国内外尚无人从事研究．

本书作者多年对约束系统（包括附加约束和正则约束）的经典和量子基本理论以及对称性质进行了研究，深感相空间中对称性的分析具有更基本的意义，进而系统、深入地研究了约束系统在相空间中的经典和量子正则对称性，并主持完成了多项自然科学基金项目，同时在国内外发表学术论文百余篇，在国内外取得了一系列开创性的理论研究成果．关于约束系统的经典对称性 10 多年前作者曾出版了专著总结其研究成果，其中仅部分涉及量子对称性，而关于约束系统的量子对称性的研究，目前仅散见于国内外学术期刊上，至今尚未见到国内外有这方面的专著出版．本书将在扼

要介绍约束系统基本理论的基础上，着重论述约束系统的量子对称性（特别是量子正则对称性），并将散见在杂志文献中的关于约束系统量子对称性的论文作了全面系统的整理和论述，特别是汇集了10余年来作者及其合作者在约束系统的量子对称性方面的研究成果，可以说本书的撰写是作者早先出版的相关专著的继续扩充和发展.

本书在前两章中简略介绍了正则约束系统（约束 Hamilton 系统）的 Dirac 理论，讨论了 Dirac 猜想是否有效，阐述了 Dirac 括号量子化方案和 Faddeev-Jackiw 量子化方案，论述了此两种正则（算符）量子化的等价性，并在路径积分量子化方案中，阐述了规范系统的 Faddeev-Popov 路径积分量子化、正则约束系统的 Faddeev-Senjanovic 路径积分量子化和 Batalin-Fradkin-Vilkovisky 路径积分量子化方案. 在第三、四章中分别论述了一阶微商和高阶微商奇异 Lagrange 量系统（均为正则约束系统）的量子对称性质，并且分别从位形空间和相空间中的 Green 函数生成泛函出发进行论述，建立了整体变换、定域变换和非定域变换下的 Ward 恒等式，其中包括广义正则 Ward 恒等式. 相空间路径积分比位形空间路径积分更基本，无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分，利用正则 Ward 恒等式，即可导出 Green 函数之间的关系，这比传统的处理具有显著优点和普遍的意义. 此外，还建立了对称性和量子守恒律相关联理论，指出了约束系统经典理论出现量子反常的根源，导出了约束系统的量子 Noether 恒等式和量子 Poincaré-Cartan 积分不变量等，并以杨-Mills理论和 Chern-Simons 理论为例作了深入的分析，论述了 Chern-Simons 理论中存在的分数自旋问题（这些论述是量子场论水平上的）. 本书最后一章论述了含附加约束奇异 Lagrange 量系统（包括一阶微商和高阶微商系统）的对称性质，同时对该系统提出了一种计算相空间约束的修改 Dirac-Bergmann 算法，并试图将该系统纳入正则约束系统（约束 Hamilton 系统）框架，给出了正则约束系统对称性的各种推广。本章还论述了场论中含附加约束奇异 Lagrange 量系统量子水平的变换性质，并给出了“横移效应”中的应用（量子修正）.

采用传统记法，书中对 Dirac γ-矩阵等仍用白体。

本书的内容在硕士研究生和博士研究生的教学中曾多次讲授，撰写本书得到隆正文教授、江金环博士和张莹博士的支持和帮助，责任编辑刘鹏飞、吕小红和刘津瑜对书稿进行了细致校对，作者在此对他们表示衷心的感谢.

李子平

目　　录

第 1 章　奇异 Lagrange 量系统的正则约束 ……………………………… (1)
1-1　对称性原理　约束系统 ……………………………………………… (1)
1-2　约束 Hamilton 系统 ………………………………………………… (4)
1-3　Dirac-Bergmann 算法　约束分类 ………………………………… (9)
1-4　Dirac 括号 …………………………………………………………… (10)
1-5　第一类约束和规范变换 ……………………………………………… (12)
1-6　整体正则对称性　正则 Noether 定理 …………………………… (15)
1-7　定域正则变换　正则 Noether 恒等式 …………………………… (19)
1-8　不变性和 Dirac 约束 ……………………………………………… (20)
1-9　关于 Dirac 猜想 …………………………………………………… (22)
1-9-1　约束乘子的任意性问题 ………………………………………… (23)
1-9-2　Dirac 猜想的反例 ……………………………………………… (25)
1-10　场论中的奇异 Lagrange 量系统 ………………………………… (28)
1-11　电磁场　标量电动力学 …………………………………………… (32)
1-11-1　电磁场 ………………………………………………………… (32)
1-11-2　标量电动力学 ………………………………………………… (33)
1-12　非 Abel 规范场 …………………………………………………… (34)
参考文献 ……………………………………………………………………… (36)
第 2 章　约束系统的量子化 ……………………………………………… (39)
2-1　Dirac 量子化 ………………………………………………………… (39)
2-2　含 Fermi 变量的系统 ……………………………………………… (43)
2-3　电磁场的量子化 ……………………………………………………… (47)
2-4　光孤子约束系统 ……………………………………………………… (50)
2-5　Faddeev-Jackiw（FJ）量子化 ……………………………………… (53)
2-5-1　辛矩阵正规 ……………………………………………………… (53)
2-5-2　辛矩阵非正规 …………………………………………………… (55)

2-5-3 辛矩阵正规时 FJ 方案与 Dirac 方案的关系 …………………… (56)
2-6 Chern-Simons（CS）项与复标量场的耦合 …………………… (58)
2-7 Dirac 量子化与 Faddeev-Jackiw（FJ）量子化的关系 ………… (64)
2-8 路径积分量子化 ………………………………………………… (69)
2-9 场论中的路径积分 Green 函数的生成泛函 …………………… (77)
2-10 Faddeev-Popov（FP）量子化 ………………………………… (80)
2-11 仅含第一类约束系统的 Faddeev 量子化 ……………………… (85)
2-12 同时含第一类约束和第二类约束系统的量子化 ……………… (88)
2-13 杨-Mills 场的路径积分量子化 ………………………………… (91)
2-14 BFV 路径积分量子化 …………………………………………… (94)
2-15 含 CS 项的标量电动力学 ……………………………………… (101)
参考文献 ……………………………………………………………… (105)
第 3 章 约束系统的量子对称性质 …………………………………… (108)
3-1 相空间中定域变换 正则 Ward 恒等式 ………………………… (108)
3-1-1 规范变换的生成元 ………………………………………… (109)
3-1-2 正则 Ward 恒等式 ………………………………………… (112)
3-2 含 CS 项的旋量电动力学 ……………………………………… (114)
3-3 正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论中动力学质量产生 ……… (117)
3-3-1 Cornwall-Norton 模型 ……………………………………… (118)
3-3-2 Jackiw-Johnson 模型 ……………………………………… (123)
3-4 杨-Mills 场论中的应用 ………………………………………… (126)
3-5 广义正则 Ward 恒等式 ………………………………………… (135)
3-6 非定域正则 Ward 恒等式 ……………………………………… (139)
3-6-1 非定域正则 Ward 恒等式 ………………………………… (140)
3-6-2 非 Abel CS 场论中的应用 ………………………………… (143)
3-7 整体变换的广义正则 Ward 恒等式 …………………………… (147)
3-8 整体正则对称性和量子守恒律 ………………………………… (150)
3-9 CS 物质场 分数自旋 …………………………………………… (157)
3-10 电子-声子系统 ………………………………………………… (162)
3-11 CS 项与极化子耦合系统 ……………………………………… (165)
3-11-1 分数自旋与分数统计 ……………………………………… (167)
3-11-2 含 Maxwell 项和 CS 项与极化子耦合的系统 …………… (169)
3-12 非 Abel CS 理论中的量子守恒荷 …………………………… (170)

3-13　规范系统量子水平的变换性质 …………………………… (174)
3-13-1　量子水平场的变换性质方程 …………………………… (174)
3-13-2　非 Abel CS 理论 …………………………… (178)
3-13-3　有限自由度系统 …………………………… (180)
3-14　位形空间非定域 Ward 恒等式 …………………………… (182)
3-14-1　位形空间非定域 Ward 恒等式 …………………………… (182)
3-14-2　非 Abel CS 项与旋量场耦合 …………………………… (185)
3-15　量子水平的 Noether 恒等式 …………………………… (187)
3-15-1　相空间形式 …………………………… (188)
3-15-2　位形空间形式 …………………………… (192)
3-15-3　非 Abel CS 物质场 …………………………… (194)
3-16　量子 Poincaré-Cartan（PC）积分不变量 …………………………… (196)
3-16-1　量子 PC 积分不变量 …………………………… (196)
3-16-2　量子 PC 积分不变量和量子正则方程 …………………………… (201)
3-16-3　量子 PC 积分不变量和正则变换 …………………………… (202)
参考文献 …………………………… (203)
第 4 章　高阶微商约束系统的量子对称性质 …………………………… (206)
4-1　高阶微商系统 …………………………… (206)
4-2　高阶微商奇异 Lagrange 量系统的正则形式 …………………………… (212)
4-2-1　正则约束　广义正则方程 …………………………… (213)
4-2-2　规范生成元　Dirac 猜想 …………………………… (217)
4-3　高阶微商系统 Green 函数的生成泛函 …………………………… (221)
4-4　高阶微商场论中奇异 Lagrange 量系统的定域量子正则对称性质 …………………………… (224)
4-4-1　高阶微商奇异 Lagrange 量系统规范生成元的构成 …………………………… (224)
4-4-2　高阶微商奇异 Lagrange 量系统正则形式的 Ward 恒等式 …………………………… (227)
4-4-3　高阶微商系统规范不变有质量矢量场 …………………………… (230)
4-5　高阶微商系统非定域变换的广义 Ward 恒等式 …………………………… (233)
4-5-1　非定域广义正则 Ward 恒等式 …………………………… (233)
4-5-2　规范不变系统 …………………………… (235)
4-5-3　高阶微商非 Abel CS 旋量场 …………………………… (237)
4-6　高阶微商系统正则 Ward 恒等式和 Abel 规范理论

中动力学质量的产生 …………………………………………………… (239)
4-6-1 含高阶微商项的 Cornwall-Norton 模型……………………………… (240)
4-6-2 含高阶微商项的 Jackiw-Johnson 模型 …………………………… (244)
4-7 广义量子色动力学（QCD）中的正则 Ward 恒等式 ………… (247)
4-7-1 广义 QCD 中规范场-鬼场正规顶角 ………………………… (249)
4-7-2 广义 QCD 中的 PCAC 和 AVV 顶角 ……………………………… (251)
4-8 高阶微商奇异 Lagrange 量系统的整体量子对称性质 ………… (253)
4-9 高阶微商杨-Mills 场论中的量子守恒律 ………………………… (258)
4-10 高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 理论中的量子 BRS 守恒荷 … (259)
4-11 高阶微商规范不变系统的整体对称性和量子守恒律………… (263)
4-11-1 位形空间中的整体对称性和量子守恒律 …………………… (264)
4-11-2 相空间中的整体对称性和量子守恒律 ……………………… (266)
4-11-3 高阶微商 Maxwell 非 Abel CS 标量场…………………… (267)
4-12 非定域量子 Noether 恒等式及其应用 ………………………… (270)
4-12-1 非定域量子正则 Noether 恒等式 ………………………… (271)
4-12-2 规范不变系统 ……………………………………………… (274)
4-12-3 量子守恒律 ………………………………………………… (276)
4-12-4 高阶微商非 Abel CS 理论 ………………………………… (277)
4-13 高阶微商系统的量子 Poincaré-Cartan（PC）积分不变量 … (280)
4-13-1 量子 PC 积分不变量 ……………………………………… (280)
4-13-2 量子 PC 积分不变量和量子正则方程 …………………… (285)
4-13-3 量子 PC 积分不变量和正则变换 ………………………… (286)
4-13-4 量子 PC 积分不变量和 Hamilton-Jacobi 方程[29] ……… (287)
4-14 高阶微商场论中规范系统的量子变换性质………………………… (288)
4-14-1 量子变换性质方程 ………………………………………… (290)
4-14-2 高阶微商非 Abel CS 理论中的 BRST 量子守恒荷 ……… (293)
参考文献 ……………………………………………………………… (298)
第 5 章 附加约束奇异 Lagrange 量系统 ……………………… (300)
5-1 完整约束奇异系统的正则对称性 ………………………………… (300)
5-1-1 正则方程 ……………………………………………………… (301)
5-1-2 正则 Noether 定理 ………………………………………… (304)
5-1-3 PC 积分不变量 ……………………………………………… (305)
5-2 完整约束高阶微商奇异系统的正则对称性 ……………………… (309)

5-2-1 广义正则方程 …………………………………………………… (310)
5-2-2 广义正则 Noether 定理 ……………………………………… (311)
5-2-3 广义正则 Noether 定理的逆定理 ………………………… (313)
5-2-4 广义 PC 积分不变量…………………………………………… (314)
5-3 非完整约束奇异系统的正则对称性 ……………………………… (317)
5-3-1 正则方程 ……………………………………………………… (318)
5-3-2 正则 Noether 定理 …………………………………………… (320)
5-3-3 PC 积分不变量 ………………………………………………… (323)
5-4 非完整约束高阶微商奇异系统的正则对称性 ………………… (324)
5-4-1 广义正则方程 ………………………………………………… (325)
5-4-2 广义正则 Noether 定理 ……………………………………… (327)
5-4-3 广义正则 Noether 定理的逆定理 ………………………… (328)
5-4-4 广义 PC 积分不变量…………………………………………… (330)
5-5 场论中附加约束系统位形空间中的经典对称性质 …………… (332)
5-5-1 位形空间的运动方程 ………………………………………… (333)
5-5-2 位形空间经典水平的变换性质 ……………………………… (335)
5-6 场论中附加约束奇异系统的经典正则对称性质 ……………… (338)
5-6-1 正则方程 修改的 Dirac-Bergmann 算法 ………………… (338)
5-6-2 正则 Noether 定理 …………………………………………… (343)
5-6-3 PC 积分不变量 ………………………………………………… (345)
5-7 电磁波在介质分界面附近的性质 ………………………………… (349)
5-7-1 电磁波在介质分界面附近的变换性质 …………………… (349)
5-7-2 电磁波的经典“横移效应” ………………………………… (350)
5-8 场论中含附加约束的高阶微商奇异系统 ……………………… (351)
5-8-1 2 阶微商系统位形空间经典水平的变换性质……………… (352)
5-8-2 2 阶微商奇异系统的正则方程……………………………… (354)
5-8-3 2 阶微商奇异系统的正则 Noether 定理………………… (356)
5-8-4 2 阶微商奇异系统的 PC 积分不变量 …………………… (358)
5-9 附加约束奇异系统的量子理论 ………………………………… (360)
5-10 场论中附加约束奇异系统量子正则变换性质………………… (368)
5-11 含 Hopf 项和 Maxwell-Chern-Simons（MCS）项 O（3）
非线性 σ-模型的分数自旋………………………………………… (375)
5-11-1 O（3）非线性 σ-模型的 FS 路径积分量子化 ………… (375)

5-11-2 分数自旋 …………………………………………………………… (378)
5-12 含 Maxwell-Chern-Simons（MCS）项（2+1）维 CP^1 非线性 σ-模型的分数自旋 …………………………………………………… (380)
5-13 非 Abel Chern-Simons（CS）理论中量子水平的分数自旋性质 ……………………………………………………………… (383)
5-14 附加约束规范系统量子水平的 Euler-Lagrange（EL）方程 ………………………………………………………………… (386)
5-15 规范不变附加约束系统位形空间量子水平的变换性质及应用 ………………………………………………………………… (389)
5-15-1 规范不变系统位形空间量子水平的变换性质 …………… (390)
5-15-2 电磁波在介质分界面处量子水平的“横移”效应 ……… (392)
参考文献 ……………………………………………………………… (396)

第 1 章

奇异 Lagrange 量系统的正则约束

系统所受的约束分内在约束和外在约束两种情形. 用奇异 Lagrange 量描述的系统(包括所有定域规范不变系统),通过 Legendre 变换,从位形空间的 Lagrange 体制过渡到相空间中的 Hamilton 体制描述时,其正则变量间必定存在固有的正则约束(内在约束)——约束 Hamilton(哈密顿)系统或正则约束系统. 本章简要叙述:约束 Hamilton 系统的 Dirac 理论;求奇异 Lagrange 量系统正则约束的 Dirac-Bergmann 算法;约束的分类;第一类约束和规范变换;Dirac 猜想及其反例;正则对称性(正则 Noether 定理和正则 Noether 恒等式);场论中的奇异 Lagrange 量系统;电磁场、标量电动力学和杨-Mills 场的正则约束.

1-1 对称性原理 约束系统

对称性是一个基本概念,它广泛存在于物理学中的众多领域,特别是在现代量子场论中. 物理学各领域中有各种不同的定律和规则,它们是有层次的. 经验性的定律和规则是较低层次的,经典力学中的 Newton 定律和电磁学中的 Maxwell 方程等则是较高层次的,对称性原理则是凌驾于这些基本规律之上的更高层次的法则. 力学中孤立系中的能量守恒、动量守恒、角动量守恒可以从 Newton 定律导出,但也可从时空对称性得到,因而具有普遍意义,这些守恒律在微观粒子运动中也成立.

物理系统所处的状态和运动规律常常以某些对称性质作为其基本特征. 对物理系统所具有的对称性的研究,在物理学的众多领域内都具有重要意义,例如,几何对称性在晶体结构的研究中占有重要地位. 物理规律的对称性研究是对称理论的重要方面. 历史上,力学规律在 Galileo 变换下的不变性,所代表的力学相对性原理,是经典力学的重要支柱. 随着相对论的发展,人们进一步认识到对称性(不变性)原理与物理规律之间存在紧密联系,例如,狭义相对论要求,物理规律应该是 Lorentz 协变的. 量子力学和量子场论的发展,使对称性原理深入到微观物理学领域,成为探索微观粒子运动规律的重要原理之一. 在原子核物理学和粒子物理学中,对称性理论的重要性就更为突出. 在物理学中对称性理论的研究是多方面的,其中一个重要方面是对称性和守

恒律的联系. 物理规律对称性的数学形式体现为系统的运动方程(或作用量)在某种对称群下不变,可导致系统的某种守恒量存在. 连续对称性所联系的守恒律可分为时空对称和内部对称两类. 重要的时空对称群有 Poincaré 群和共形群等. 时空的均匀性和空间各向同性产生能量、动量和角动量守恒,共形对称群也存在相应的守恒量. 重要的内部对称群有 U(1)、SU(2)、SU(3)群等,它们所联系的守恒量有电荷、同位旋和幺旋等. 这些来源于对称性的守恒荷也称为 Noether 荷.

量子力学中,应用群论这种数学工具是处理量子体系对称性的重要工具. 量子体系的好量子数(守恒量)、能级的简并性、具有某种对称性的力学量的矩阵元计算、跃迁概率及选择定则等,都与体系的对称性密切相关. 量子体系的几何对称对于研究原子和分子光谱学(矢量模型、角动量和宇称选择定则等),以及周期场对称性的研究对于了解晶体的导电性等,都具有重要意义. 对于变形原子核的轴对称性和空间反射不变性的研究,使人们对于原子核转动谱及相应的电磁跃迁的认识,深入了一大步. 除了空间几何对称性之外,量子力学中还出现了另外一些新的更重要的对称性. 它们在经典力学中,或者不出现,或者没有多大价值,其中最重要的是全同粒子的置换对称性. 此对称性是由于量子态的描述与经典力学态的描述有根本性差异而造成的,在物理上则反映了微观粒子的波动性.

从量子场论的观点看,所有的(基本)粒子都是相应的场的量子,是场物质的基本形态. 如果对所描写场的场量的对称变换在时空每一点上一齐施行,这样得到的对称性为整体对称性;如果在时空每一点上独立施行对称变换,这样所得到的对称性为定域对称性. 经典理论到量子理论的发展,将连续对称的研究扩充到了分立对称的研究;微观领域规律的深入探索,将整体对称的分析扩充到了定域对称的分析. 系统的整体对称性与系统存在的守恒律有密切联系;规范对称(定域不变性)制约了基本粒子的几种基本相互作用形式;坐标定域变换的不变性导致了广义相对论;Abel 规范对称性导致了电磁学;非 Abel 规范对称性导致了非 Abel 规范场;超对称性导致了 Fermi 子和 Bose 子之间的对称性理论;超对称性的定域化导致了超引力.

对称性分析是极其重要的研究方法. 一方面,对称性与守恒律密切相关,一般来说一种对称性就对应着某种守恒律;另一方面,对称性不仅导致新的理论产生,而且可以使计算简化.

对系统运动守恒量的研究,传统的方法主要有:其一,直接从系统的运动微分方程出发研究 Lie 对称(Lie 对称,不一定导致系统的守恒量);其二,基于对称性所联系的 Noether 理论;其三,在力学中,从力学的微分、变分原理出

发，等等. 在许多情况下，从系统的对称性来求出系统的守恒量是十分有效的方法.

Noether[1]对不变性变分原理的研究证明，相应于每一个使系统泛函（系统作用量）不变的无穷小整体变换，必存在一个系统的守恒量. Noether 定理对于场论的发展有着重要的影响. 对于 Noether 定理的逆定理也已开展研究[1].

对动力学系统的描述有位形空间中的 Lagrange 体制和相空间中的 Hamilton 体制两种形式，后者在量子理论中有更重要的作用. 在对称性分析中，传统的研究是在位形空间中讨论的，且未考虑系统受约束的情况；而实际上，物理系统的运动往往受到约束的限制. 其约束分为两类：一类是位形空间中描述时，系统运动存在的附加条件（外在约束）. 如，力学中的几何约束和运动约束（或完整约束和非完整约束），连续介质力学中的热力学关系，场论中场变量满足的某些附加条件等（如非线性 σ-模型、CP^{N-1} 模型等）. 另一类是相空间中描述时，正则变量间存在的固有约束（内在约束）. 众多的物理系统虽然在位形空间不存在附加约束，但过渡到相空间描述时，正则变量间却存在约束关系. 一般来说，用所谓奇异 Lagrange 量描述的系统（其中包括所有定域规范不变理论，如描述自然界四种基本相互作用的量子电动力学、量子味动力学、量子色动力学和引力理论等），以下简称为奇异系统，过渡到相空间描述时，其正则变量间存在固有约束，为正则约束系统或约束 Hamilton 系统. 在位形空间中，如果描述动力学系统的是正规 Lagrange 量，则称该系统为正规 Lagrange 量系统 . 对正规 Lagrange 量系统，如果受附加约束的限制，则称该系统为附加约束正规 Lagrange 量系统. 如果描述动力学系统的是奇异 Lagrange 量，则称该系统为奇异 Lagrange 量系统 . 对受附加约束限制的奇异 Lagrange 量系统，则称为附加约束奇异 Lagrange 量系统（简称为附加约束奇异系统）. 对上述各种受约束的动力学系统统称为约束系统. 约束 Hamilton 系统的基本理论在现代物理学中，特别是在量子场论中占有十分重要的地位.

约束 Hamilton 系统的正则对称性仍可表现在存在某些守恒律和恒等式等多种形式. 系统相空间中的整体对称性（不变性），导致了正则形式的 Noether 定理；系统相空间中的定域不变性，导致了正则形式的 Noether 恒等式. 经典 Noether 定理及其推广的传统方式均是在位形空间中表述的[1]，位形空间 Noether 定理和相空间 Noether 定理的不同特点是：分析该系统在相空间中的对称性质，可由相空间中的 Noether 定理导出其相应的守恒量，而这种相空间中的对称性质，在位形空间中往往又不明显呈现出来[2]. 在经典理论方面，目前已经建立了相空间中正则形式的 Noether 定理和 Poincaré-Cartan

(PC)积分不变量等,并已推广到了高阶微商系统,以及在非定域变换下的广义 Noether 定理和正则 Noether 恒等式等[3-7].

微观粒子的运动是用量子理论来描述的,经典理论的一些重要结果,在量子理论中是否仍然成立,或者在什么条件下仍然成立,是一个值得讨论的问题. 对量子场论系统,其对称性规律一般可表为量子守恒律和 Ward 恒等式(或称 Ward-Takahashi 恒等式)以及量子 PC 积分不变量等. 该恒等式及其推广在现代量子场论中占有重要地位,它是证明理论可重整化的重要工具. 目前已建立了动力学系统的正则 Noether 定理的量子形式表述,相空间中定域、非定域和整体变换下的正则 Ward 恒等式,量子正则 Noether 恒等式和 PC 积分不变量等也已给出,正则量子对称理论已经建立起来(包括高阶微商理论)[8-25]. 该量子对称理论均采用了相空间路径积分量子化方法,其优点在于无须作出相空间生成泛函中对正则动量的路径积分. 相空间路径积分量子化方法出现的是经典的数,这对研究系统的量子对称性质比较方便. 从路径积分导出的量子守恒律,也可以是用位形空间中的变量来表述,但它仅适用于相空间中路径积分关于正则动量的积分为 Gauss 型的情形. 一般对约束 Hamilton 系统要作出对正则动量的路径积分是十分困难的,甚至是不可能的. 相空间中路径积分比位形空间中路径积分更基本,由此所建立的量子正则对称理论也就具有更普遍的意义了.

本书前 4 章阐述不含附加约束的奇异 Lagrange 量描述的系统(约束 Hamilton 系统)的基本理论,着重论述了该系统的量子对称性(特别是量子正则对称性). 第 5 章论述了含附加约束的奇异 Lagrange 量系统的对称性(包括高阶微商理论). 当该系统的附加约束与系统的固有正则约束相容时,提出了一种修改的 Dirac-Bergmann 算法,试图将该系统纳入约束 Hamilton 系统的理论框架进行量子化,进而研究该系统的量子正则对称性.

1-2 约束 Hamilton 系统

对奇异 Lagrange 量系统正则形式的研究始于 Dirac 对动力学齐次变量的早期分析,他从用奇异 Lagrange 量描述系统,过渡到相空间用正则变量描述时,发现其正则变量间存在固有约束,即为约束 Hamilton 系统. 关于这方面早期的工作还有 Bergmann 等人研究,他们阐明了约束和不变性的关系. Dirac 和 Bergmann 等人的工作奠定了约束系统的动力学及其量子化的基础[26-28]. Shanmugadhasan 分析了奇异性对 Lagrange 方程的影响,并给出了相应的 Hamilton 形式;Kamimura 建立了 Lagrange 约束和 Hamilton 约束间

的关系[2];Sudarshan 和 Mukunda 从现代数学观点,详细讨论了 Dirac 括号的结构[29]. 至今已有少量著作较完整地阐述了约束系统及其量子化的基本理论[30-33]. 其他作者的著作中未涉及的,乃是本书着重阐明的约束 Hamilton 系统的量子正则对称性质.

约束 Hamilton 系统的基本理论,在理论物理中,特别是现代量子场论(如规范场论)中占十分重要的地位. 众多的物理系统在相空间描述时,其正则变量间存在固有约束,如相对论粒子满足的"质壳"条件,电磁学和杨-Mills 场论中的 Gauss 约束,广义相对论中的超 Hamilton 量和超动量约束,弦理论中的 Virasor 条件等. 规范理论(具有定域不变性)在描写自然界基本相互作用中占重要地位. 一切定域不变系统的 Lagrange 量均是奇异的(包括描述自然界四种基本相互作用的量子电动力学(QED)、量子味动力学(QFD)、量子色动力学(QCD)、引力理论(GR)),这些系统均属约束 Hamilton 系统. 约束 Hamilton 系统在相空间存在固有约束,传统的无正则约束情况的量子化方法不能直接用于该系统,虽然该系统量子化中的主要问题已解决,但是有关约束 Hamilton 系统理论中的若干基本问题仍在文献中经常讨论[34]. 这里先简略介绍约束 Hamilton 系统的经典理论.

对动力学系统的描述有两种体制:一种是 Lagrange 体制,系统的运动满足 Euler-Lagrange(EL)方程;另一种是 Hamilton 体制,系统的运动满足正则方程. 对正规 Lagrange 量系统,这两种描述是等价的,体系的 Lagrange 形式可以通过 Legendre 变换过渡到 Hamilton 形式,通过量子化从经典理论过渡到量子理论,但是对于含有约束的系统,不能直接按初等量子力学的方法进行量子化. 约束系统的量子化方案有算符形式正则量子化和路径积分形式量子化,这些内容将在下一章中讨论.

设系统的 Lagrange 量为 $L(q^i,\dot{q}^i)$, 其中 $q^i(i=1,2,\cdots,n)$ 为广义坐标, $\dot{q}^i=\mathrm{D}q^i=\dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t}$ 为广义速度. 这里假设 Lagrange 量不显含时间,则系统的作用量

$$I=\int \mathrm{d}t\, L(q^i,\dot{q}^i) \tag{1-2-1}$$

与广义坐标 q^i 相对应的正则共轭动量

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{1-2-2}$$

正则 Hamilton 量

$$H_c=p_i\dot{q}^i-L \tag{1-2-3}$$

式中重复指标代表求和.

定义 Hess 矩阵的矩阵元

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j} \tag{1-2-4}$$

当 $\det|H_{ij}|\neq 0$ 时，Hess 矩阵是非退化的，其 Lagrange 量为正规 Lagrange 量. 按最小作用原理由式(1-2-1)可得 EL 方程

$$\frac{\delta I}{\delta q^i}=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\right)=0 \tag{1-2-5}$$

式(1-2-5)也可以表示为

$$H_{ij}(q^i,\dot{q}^j)\ddot{q}^j=\frac{\partial L}{\partial q^i}-\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\dot{q}^j \tag{1-2-6}$$

此时能解出所有 $\ddot{q}^j$，同时过渡到 Hamilton 描述时，能由式(1-2-2)解出所有 $\dot{q}^i$. 当 $\det|H_{ij}|=0$ 时，Hess 矩阵是退化的. 如果 Hess 矩阵为 n 阶矩阵，设矩阵的秩为 R，那么从式(1-2-2)可解出 R 个 $\dot{q}^\sigma$ 作为 $q^i,p_\sigma,\dot{q}^\rho$ 的函数

$$\dot{q}^\sigma=f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho)$$
$$(\sigma,\alpha=1,2,\cdots,R;\rho=R+1,\cdots,n) \tag{1-2-7}$$

将式(1-2-7)代入式(1-2-2)，则有

$$p_i=g_i(q,\dot{q}^\sigma,\dot{q}^\rho)=g_i[q,f^\sigma(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho),\dot{q}^\rho]=g_i(q,p_\alpha,\dot{q}^\rho) \tag{1-2-8}$$

显然，当 $i=1,2,\cdots,R$ 时，式(1-2-8)为一恒等式. 当 $i=\rho$ 时，其他$n-R$ 个 g_ρ 将不再依赖于 $\dot{q}^\rho$，不然的话，将会解出更多的 $\dot{q}^i$，与原假设矛盾. 这样就得到 $n-R$ 个坐标和动量之间的关系式，即

$$p_\rho=g_\rho(q,p_\alpha)\qquad(\rho=1,2,\cdots,n-R) \tag{1-2-9}$$

或记为

$$\phi_a^0(q,p)=p_a-g_a(q,p_\alpha)=0$$
$$(a=1,2,\cdots,n-R) \tag{1-2-10}$$

式(1-2-9)和式(1-2-10)给出了正则变量的 $n-R$ 个约束关系，它们来源于正则动量的定义式(1-2-2)，并称式(1-2-10)为初级约束. 值得注意的是，在得到初级约束时，并没有利用系统的运动方程，用奇异 Lagrange 量描述的系统，在相空间描述时，正则变量间必存在固有约束，即为约束 Hamilton 系统.

考虑式(1-2-3)的正则 Hamilton 量的变分和式(1-2-5)的 EL 方程，有

$$\delta H_c=p_i\delta\dot{q}^i+\dot{q}^i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i-\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\delta\dot{q}^i=$$
$$\dot{q}^i\delta p_i-\frac{\partial L}{\partial q^i}\delta q^i \tag{1-2-11}$$

这里利用了式(1-2-2). 由式(1-2-3)，有