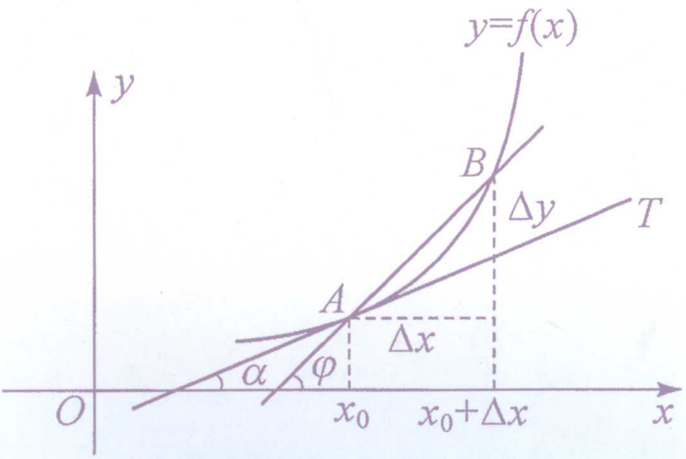
高等医药院校药学专业教材

GAODENG YIYAO YUANXIAO YAOXUE ZHUANYE JIAOCAI

Gaodeng Shuxue

高等数学

顾 强 主编



東南大學 出版社

高 等 数 学

主 编 顾 强
副主编 蒋秋浩 盛海林

东南大学出版社
南 京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/顾强主编. —南京:东南大学出版社,2004.10

ISBN 7-81089-736-5

Ⅰ.高... Ⅱ.顾... Ⅲ.高等数学—医药院校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 098014 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 溧阳市晨明印刷有限公司印刷

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:18.25 字数:433 千字

2004 年 10 月第 1 版 2004 年 10 月第 1 次印刷

印数:1～10500 定价:28.00

前　言

近年来，成人高等教育事业得到了迅速发展，多种层次的成人学历教育满足了各种人才的学习需要。为了满足成人教育专科、高中起点本科的“高等数学”的教学需要，也为了满足专科起点升本科参加成人高等学校招生“高等数学”统一考试的应试需要，我们参照教育部修订的“高等数学”教学大纲的要求（主要依据“高等数学”（一）的大纲，兼顾“高等数学”（二）），精心组织编写了本教材。

在本教材的编写过程中，力求以通俗的语言介绍“高等数学”中最基础的、也是最主要的知识点，期望读者通过学习能在较短时间内掌握“高等数学”的基本概念、基本原理、基本技能，从而为将来进一步学习其他课程打下必要的基础，也为需要参加各种“高等数学”考试的读者提供必要的指导。

在具体内容编排上，为了便于读者掌握本教材的主要内容，在每章内容后都归纳了本章重点，并精选例题给出了解题指导，希望读者能在解题能力上有所提高。在每章的习题编排上，也兼顾到应试的需要，选择了多种题型的习题供读者训练，并在书后给出了习题答案，便于读者自学。另外，针对专升本考试的需要，我们在书后增加了成人高等学校全国统一招生考试专科升本科的“高等数学”（一）的教学大纲（“高等数学”（二）可参照“高等数学”（一）作适当删减），并精选了两套模拟试卷和两套全真试卷及其参考答案供读者练习、自我检查。

另外，徐畅、王菲、李雪玲、居白、曹荣美、沈浩等老师参与了本教材的部分编写工作，张慧、张望松老师对本教材的编排、出版提出了许多宝贵建议，在此深表谢意。

由于编写时间仓促，编者水平有限，如有不当之处请予赐教。

编　者

2004.9

目　　录

第 8 章　无穷级数

第 9 章　微分方程

第 1 章　函数与极限

客观世界中的各种变量之间往往存在着相互依赖的关系.函数是对这种依赖关系的一种抽象反映,它是高等数学中最重要的概念之一.本章将介绍函数、函数的极限和函数的连续性等基本概念以及它们的简单性质.

1.1 函　数

1.1.1 集合

1) 集合的概念

所谓集合,就是指具有某个共同属性的一些对象的全体.构成集合的每一个对象称为该集合的元素.

下面举几个集合的例子:

(1) 某班级的全体同学.

(2) 方程 $x^2-5x+6=0$ 的一切根.

(3) 全体奇数.

一般地,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合,而用小写字母表示集合中的元素.若 x 是集合 A 的元素,则记为 $x\in A$,读作"x 属于 A";若 x 不是集合 A 的元素,则记为 $x\notin A$,读作"x 不属于 A".

每个元素都是数的集合,称为数集.例如,全体自然数的集合记为 $\mathbf{N}$,全体整数的集合记为 $\mathbf{Z}$,全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$ 等.以后用到的集合主要是数集.

不含任何元素的集合称为空集,记为 $\varnothing$.

2) 集合的表示法

(1) 列举法　是指按任意顺序列出集合中的所有元素,并用{ }括起来.如由 2,4,6,8 所组成的集合,可表示为 $A=\{2,4,6,8\}$ 或 $A=\{4,8,2,6\}$ 等.

(2) 描述法　是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用

$$A=\{x\mid x\text{ 具有的共同属性}\}$$

表示.如 $A=\{x\mid 1\leqslant x<3,x\in\mathbf{R}\}$ 表示所有元素都具有大于或等于 1 且小于 3 的共同属性.

3) 子集、集合的相等

设有两个集合 A,B,如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素,那么集合 A 叫做集合 B 的子集,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

显然,任何一个集合都是它自身的子集,即 $A\subset A$.空集是任何一个集合的子集,即 $\varnothing\subset A$.

设有两个集合 A,B,如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

4) 集合的运算

(1) 集合的并　由集合 A 与集合 B 中所有元素汇总构成的集合称为集合 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$.

如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,7,8\}$，则 $A \cup B=\{1,2,3,4,7,8\}$.

(2) 集合的交　由既属于集合 A 又属于集合 B 的共同元素汇总构成的集合称为 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$.

如 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{a,c,e,f\}$，则 $A \cap B=\{a,c,e\}$.

集合的运算可用图 1－1 中的阴影部分表示.

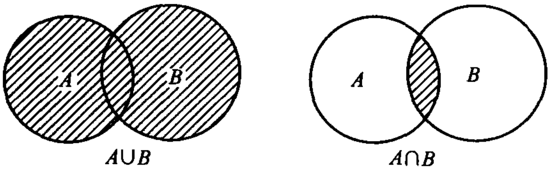


图 1－1

1.1.2　区间、邻域

在实际问题中，一个变量根据所研究问题的条件，一般有着一定的变化范围. 如果超出这个范围，就会使研究的问题失去意义. 在数学中常用区间表示一个变量的变化范围，下面介绍一些常用的区间记号.

(1) 开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$ 表示满足不等式 $a<x<b$ 的全体实数 x 的集合.

(2) 闭区间　$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 表示满足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全体实数 x 的集合.

(3) 半开半闭区间　$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 表示满足不等式 $a \leqslant x<b$ 的全体实数 x 的集合；类似地，$(a,b]=\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 表示满足不等式 $a<x \leqslant b$ 的全体实数 x 的集合.

以上区间都称为有限区间，数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 在数轴上表示见图 1－2.

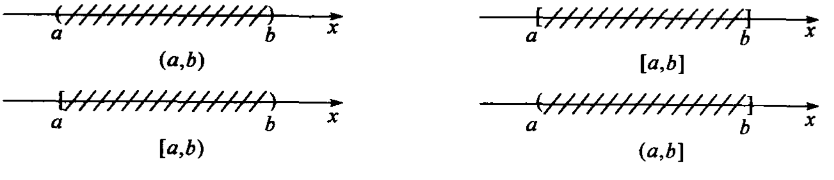


图 1－2

除了上述有限区间外，还有如下五种无穷区间：

(1) $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$.

(2) $[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$.

(3) $(-\infty,a)=\{x \mid x<a\}$.

(4) $(-\infty,a]=\{x \mid x \leqslant a\}$.

(5) $(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$ 表示全体实数.

在数轴上表示见图 1－3.

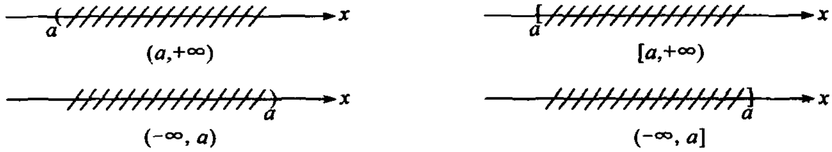


图 1－3

下面引入某点的邻域的概念.

所谓点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$,其中 $\delta>0$. 即满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的全体实数组成的集合,记为 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径. 在数轴上表示见图 1－4.

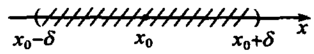


图 1－4

如 $U\left(4,\frac{1}{4}\right)$ 表示开区间 $\left(4-\frac{1}{4},4+\frac{1}{4}\right)$,即为 $(3.75,4.25)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. $U(x_0,\delta)$ 去掉中心 x_0 后,称为点 x_0 的 δ 去心邻域,记为 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$. 显然 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,这里 $0<|x-x_0|$ 就表示 $x\neq x_0$.

1.1.3 函数的概念

1) 函数的定义

在实际问题中,往往同时有几个变量在变化着,它们通常是相互依赖并遵循着一定的规律而变化. 如圆的面积 A 与它的半径 r 之间有如下依赖关系:

$$A=\pi r^2$$

当半径 r 取定某一正数值时,圆面积就有确定的数值和它对应.

一般地,可抽象出函数的定义.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的一个数集. 如果对于每个数 $x\in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域,x 叫做自变量,y 叫做因变量.

当 x 取某一数值 $x_0\in D$ 时,与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 任取 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集

$$W=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应法则的记号"f"也可用其他字母,如 φ,Ψ,F 等表示,这时函数就分别记作 $y=\varphi(x)$,$y=\Psi(x)$,$y=F(x)$ 等.

如果对于定义域中的每一点 x,对应的函数值 y 只有一个,这样的函数叫做单值函数,否则叫做多值函数. 我们通常讨论单值函数. 以后,如不作特殊说明,函数都是指单值函数.

2）函数定义域的确定

在实际问题中，函数的定义域要根据问题的实际意义来确定. 如圆面积公式 $A=\pi r^2$，要求半径 r 应取正数.

在数学中，若只给出函数的表达式，而没有说明函数的实际意义，函数的定义域就是指使得表达式有意义的自变量所能取的一切实数.

例 1 求函数 $y=\ln\dfrac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$ 的定义域.

解 要使所给定的函数表达式有意义，必须

$$\frac{1}{1-x}>0 \quad 且 \quad x+2\geqslant 0$$

即 $x<1$ 且 $x\geqslant -2$. 从而，该函数的定义域为 $[-2,1)$.

注 如果两个函数的对应法则 f 和定义域 D 都相同，则称这两个函数是相同的，否则就是不同的. 至于自变量或因变量用什么记号表示，则无关紧要.

例 2 下列各对函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\dfrac{x}{x}$，$g(x)=1$.

(2) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 (1) 不相同. 因为定义域不同，$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

(2) 相同. 因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的对应法则相同，且定义域均为 $(-\infty,+\infty)$.

3）函数的表示法

函数通常可用表达式、图像法或列表法等表示出来.

例 3 函数 $y=\log_2(5x-4)$.（表达式）

例 4 某气象站用自动温度记录仪记下了一昼夜气温变化如图 1-5 所示. 由图可见对于每一时刻 t，都有唯一确定的温度 T 与之对应，因而这种曲线在区间 $0\leqslant t\leqslant 24$ 上确定了一个函数.（图像法）

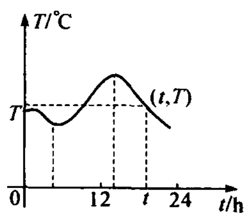


图 1-5

例 5 某水文站统计了某河流在 40 年内的平均月流量 V 如表 1-1 所示。

表 1-1

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
平均月流量 V/亿 m^3	0.39	0.30	0.75	0.44	0.35	0.72	4.3	4.4	1.8	1.0	0.72	0.50

由表 1-1 可看出，在 V 与 t 之间建立了明确的对应关系，即当 t 每取一个值，由表 1-1 即可得 V 有唯一的一个对应值，因而也确定了一个函数.（列表法）

在数学中，函数主要是用表达式来表示的. 下面介绍几种常用函数.

例 6 数 x 的绝对值记为 $|x|$. 如果把 x 看作变量，则有函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

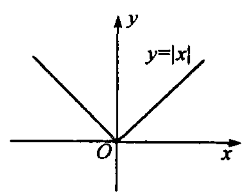


图 1-6

该函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-6 所示.

例 7　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-7 所示.

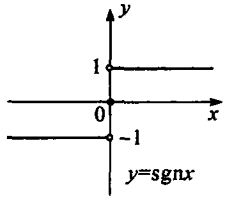


图 1-7

显然，对于任何实数 x，下列关系式成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例如，$\operatorname{sgn}(-3)\cdot|-3|=(-1)\cdot 3=-3$.

例 8　设 x 为任一实数. 取不超过 x 的最大整数称为 x 的取整函数，记作 $[x]$. 例如 $\left[\frac{5}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 把 x 看作自变量，则函数

$$f(x)=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 W 为全体整数. 它的图形如图 1-8 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

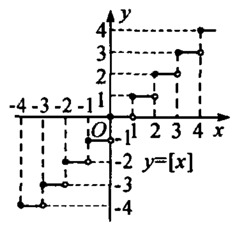


图 1-8

从例 6 和例 7 中看到，有时一个函数是用几个式子来表示的. 这种在不同范围中用不同式子表示的函数，通常称为分段函数.

例 9　已知函数

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

求 $f(-\frac{1}{2})$，$f(0)$，$f(\frac{1}{2})$.

解　$x=-\frac{1}{2}<0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=(x+1)\Big|_{x=-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$；

$x=0$，$f(0)=0$；

$x=\frac{1}{2}>0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=(x-1)\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

1.1.4　函数的性质

1）单调性

定义 2　设有函数 $y=f(x)$，$x\in D$，若对任意两点 $x_1,x_2\in D$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内严格单调增加；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内严格单调减少.

下面统称这两类函数为单调函数.

在几何上，严格单调增加的函数，它的图形是随着 x 的增加而上升的曲线；严格单调减少的函数，它的图形是随着 x 的增加而下降的曲线.

例 10 函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$内是严格单调增加的,因为对$[0,+\infty)$内的任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1)=x_1^2<x_2^2=f(x_2)$$

同理,$f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,0]$内是严格单调减少的. 但 $f(x)=x^2$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内却不是单调函数(见图 1-9).

例 11 证明:函数 $f(x)=x^3$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的.

证明 设 x_1,x_2 是$(-\infty,+\infty)$内任意两点,当 $x_1<x_2$ 时,根据定义需要证

$$f(x_1)=x_1^3<x_2^3=f(x_2)$$

即证 $x_1^3-x_2^3<0$.

由于

$$x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$$

而 $x_1-x_2<0$ 及

$$x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$$

所以 $x_1^3-x_2^3<0$,即 $x_1^3<x_2^3$(见图 1-10).

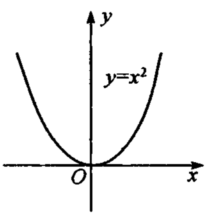


图 1-9

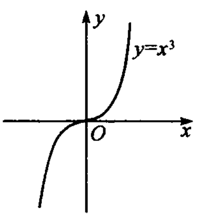


图 1-10

2) 有界性

定义 3 设有函数 $y=f(x),x\in D$,若存在一个正数 M,使得对于任意 $x\in D$,都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立,则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 否则就称它在 D 上无界.

例如:函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界,因为恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,可取 $M=1$.

又如:函数 $y=\frac{1}{x}$ 在$(0,+\infty)$内无界,因为任取正数 M,总有 $x_0=\frac{1}{M+1}$ 在$(0,+\infty)$内,使得 $y(x_0)=M+1>M$,从而无界.

如果函数 $f(x)$ 在 D 上有界,则在 D 上的函数图形介于两条水平直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

3) 奇偶性

定义 4 设有函数 $y=f(x)$,其定义域 D 关于原点 O 对称,那么:

(1) 若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称函数为偶函数.

(2) 若对任何 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数为奇函数.

也就是说,当把自变量 x 换为 $-x$ 时,如果函数值不变,则为偶函数;如果函数值与原来的函数值仅相差一个符号,则为奇函数.

在几何上,对于偶函数,由于在 x 和 $-x$ 处函数值相等,故其函数图形关于 y 轴对称(见

图 1-11). 对于奇函数,由于在 x 和 $-x$ 处函数值仅差一个符号,其函数图形关于原点对称,即当把右半平面的图形绕原点旋转 180° 后恰与左半平面的图形重合(见图 1-12).

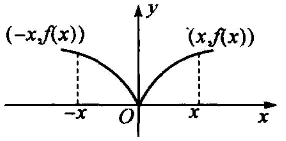


图 1-11

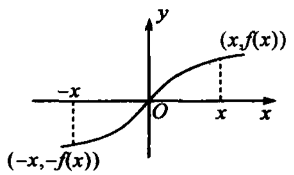


图 1-12

例如:函数 $y=x^2$ 是偶函数;函数 $y=x^3$ 是奇函数;而函数 $y=x^2+x^3$ 是非奇非偶函数.

4) 周期性

定义 5 设有函数 $y=f(x)$,其定义域为 D. 如果存在一个不为零的常数 l,使得一切 $x\in D$,有 $x+l\in D$,且有

$$f(x+l)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为这个函数的周期.

显然,如果函数 $y=f(x)$ 以 l 为周期,则 $kl(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 也是它的周期. 通常,我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如:函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 12 证明:函数 $y=\sin pt$ 是以 $\frac{2\pi}{p}$ 为周期的函数.

证明 由周期函数的定义,要找 l 使得

$$f(t+l)=f(t)$$

即

$$\sin p(t+l)=\sin(pt+pl)=\sin pt$$

即要 $pl=2\pi$,从而 $l=\frac{2\pi}{p}$.

1.1.5 复合函数与反函数

1) 复合函数

先举一个例子. 设 $y=\sqrt{u}$,而 $u=1-x^2$,以 $1-x^2$ 代替第一式的 u,得 $y=\sqrt{1-x^2}$. 该函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成是由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的复合函数.

一般地,若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2,值域为 W_2,并且 $W_2\subset D_1$. 那么对于每个数值 $x\in D_2$,有确定的数值 $u\in W_2$ 与值 x 对应. 由于 $W_2\subset D_1$,值 u 也属于函数 $y=f(u)$ 的定义域 D_1,因此有确定的值 y 与值 u 对应. 这样,对于每个数值 $x\in D_2$,通过 u 有确定的数值 y 与 x 对应,从而得到一个以 x 为自变量 y 为因变量的函数,称为由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,记作

$$y=f[\varphi(x)] \qquad (u\text{ 称为中间变量})$$

例如:函数 $y=\arctan x^2$ 可看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成. 该函数的定义域为

$(-\infty, +\infty)$，它也是 $u = x^2$ 的定义域. 又如：函数 $y = \sqrt{x^2}$ 可看作由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = x^2$ 复合而成，该函数实际上就是函数 $y = |x|$.

注 不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如：$y = \arcsin u$ 及 $u = 2 + x^2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u = 2 + x^2$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[2, +\infty)$，而 $y = \arcsin u$ 的定义域为 $[-1, 1]$，因而不能使 $y = \arcsin u$ 有意义.

复合函数也可以由两个以上的简单函数经过复合而构成.

例如：设 $y = \sqrt{u}, u = \cot v, v = \dfrac{x}{2}$，则得复合函数 $y = \sqrt{\cot \dfrac{x}{2}}$，这里 u 及 v 都是中间变量.

一般地，研究复合函数，有两个基本问题：

(1) 由简单函数形成复合函数.

(2) 将复合函数分解成几个简单函数.

例 13 将函数 $y = \ln\sqrt{2 + x^2}$ 进行分解.

解 函数 $y = \ln\sqrt{2 + x^2}$ 可看成由 $y = \ln u, u = \sqrt{v}, v = 2 + x^2$ 三个简单函数复合而成.

2) *反函数*

如果函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 一方面，对于任一 $x_0 \in D$，有确定的函数值 $y_0 = f(x_0)$ 与之对应；另一方面，对于任一 $y_0 \in W$，也必有 $x_0 \in D$，使得 $f(x_0) = y_0$ 成立. 按照函数的定义，把 y 看成自变量，则形成 x 关于 y 的函数，即 $x = \varphi(y)$. 其定义域为 W，值域为 D. 它是由函数 $y = f(x)$ 产生的，称为函数 $y = f(x)$ 的反函数.

一般地，已知函数 $y = f(x)$，如果由表达式 $y = f(x)$ 中能解出 x 来，则把 x 看成 y 的函数，即 $x = \varphi(y)$（或记为 $x = f^{-1}(y)$），叫做 $y = f(x)$ 的反函数. 相对于反函数 $x = \varphi(y)$ 来说，原来的函数 $y = f(x)$ 叫做直接函数.

例如：函数 $y = 2x + 1$ 的反函数为 $x = \dfrac{y - 1}{2}$.

值得注意的是，即使函数 $y = f(x)$ 是单值的，其反函数 $x = \varphi(y)$ 也不一定是单值的.

例如：函数 $y = x^2$ 的反函数 $x = \varphi(y) = \pm\sqrt{y}$ 就是多值函数. 为了避免函数的多值性，多值函数常可分为若干个单值分支. 这里，若把 x 限制在 $[0, +\infty)$ 上，则 $y = x^2$ 的反函数是单值的，即 $x = \sqrt{y}$. 它称为函数 $y = x^2$ 的反函数的一个单值分支. 类似地，另一个单值分支为 $x = -\sqrt{y}$.

一般地，如果函数 $y = f(x)$ 是单值单调函数，那么就能保证存在反函数 $x = \varphi(y)$ 是单值单调的.

习惯上，常将函数 $y = f(x)$ 的反函数 $x = \varphi(y)$ 改记为 $y = \varphi(x)$.

如上例 $y = 2x + 1$ 的反函数可记为 $y = \dfrac{x - 1}{2}$.

若把直接函数 $y = f(x)$ 和反函数 $y = \varphi(x)$ 的图形画在同一个坐标平面上，那么这两个图形关于直线 $y = x$ 是对称的.

例 14 函数 $y=\sin x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为闭区间 $[-1,1]$. 函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调函数，它的反函数 $y=\mathrm{Arcsin}x$ 是多值的. 但函数 $y=\sin x$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是单调增加的. 因此，若把 $y=\sin x$ 的自变量 x 限制在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，这时反函数是单值的，记为 $y=\arcsin x$. 函数 $y=\arcsin x$ 的定义域为闭区间 $[-1,1]$，值域为闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. $\arcsin x$ 称为 $\mathrm{Arcsin}x$ 的主值函数. 以后称 $y=\arcsin x$ 为反正弦函数. (见图 1-13)

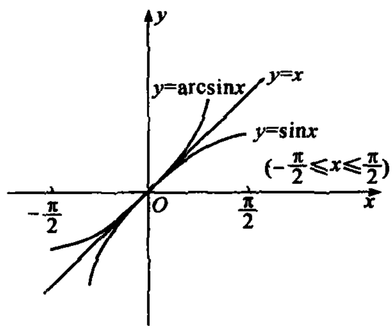


图 1-13

类似地，可对三角函数 $y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 进行讨论而得相应的反三角主值函数 $y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}x$.

1.1.6 初等函数

1) *基本初等函数*

(1) 幂函数　$y=x^a$ (a 为任何实数).

(2) 指数函数　$y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$，特殊地，$y=\mathrm{e}^x$.

(3) 对数函数　$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$，特殊地，$y=\ln x$.

(4) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x\left(=\frac{\sin x}{\cos x}\right)$，$y=\cot x\left(=\frac{\cos x}{\sin x}\right)$，$y=\sec x\left(=\frac{1}{\cos x}\right)$，$y=\csc x\left(=\frac{1}{\sin x}\right)$.

(5) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}x$.

具体讨论如下：

(1) 幂函数 $y=x^a$ (a 为任何实数)

当 a 为不同实数时，幂函数的定义域及性质也随之变化，因而情况比较复杂. 但不论 a 为何值，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，而且图形都经过 $(1,1)$ 点.

当 a 是正整数或零时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，例如 $y=x$，$y=x^2$ 等(见图 1-14).

当 a 是负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，例如 $y=\frac{1}{x}$ 等(见图 1-15).

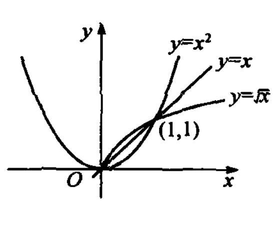


图 1-14

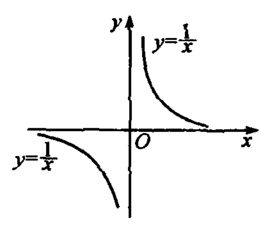


图 1-15

当 a 是有理数 $\frac{q}{p}$ 时，若 $\frac{q}{p}>0$，p 为偶数，则定义域为 $[0,+\infty)$，例如 $y=x^{\frac{1}{2}}$ (见图 1-

14). 若 p 为奇数，定义域为 $(-\infty, +\infty)$，例如 $y = x^{\frac{2}{3}}$（见图 1-16）；若 $\frac{q}{p} < 0$，则还需要去掉 $x = 0$ 的点.

此外，当 a 为偶数时，x^a 为偶函数；当 a 为奇数时，x^a 为奇函数. 在 $[0, +\infty)$ 上，当 $a > 0$ 时，$y = x^a$ 是严格单调增加的；当 $a < 0$ 时，$y = x^a$ 是严格单调减少的.

(2) 指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$

定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$. 无论 a 取何值，函数图形均经过 $(0,1)$ 点. $a > 1$ 时，a^x 是严格单调增加函数；$0 < a < 1$ 时，a^x 是严格单调减少函数（见图 1-17）.

(3) 对数函数 $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$

对数函数是指数函数的反函数，定义域为 $(0, +\infty)$. 当 a 取任何不为 1 的正常数时，函数均经过 $(1,0)$ 点. 当 $a > 1$ 时，函数严格单调增加；当 $0 < a < 1$ 时，函数严格单调减少（见图 1-18）.

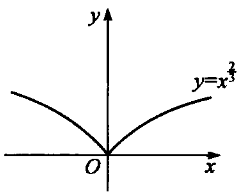


图 1-16

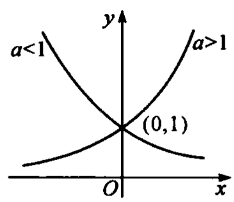


图 1-17

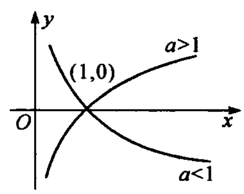


图 1-18

(4) 三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$

$y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，且都是以 2π 为周期的周期函数. $y = \sin x$ 是奇函数，$y = \cos x$ 是偶函数，由 $|\sin x| \leqslant 1$，$|\cos x| \leqslant 1$，它们都是有界函数，图形在直线 $y = \pm 1$ 之间. 曲线 $y = \sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上严格单调上升，曲线 $y = \cos x$ 在 $[0, \pi]$ 上严格单调下降（见图 1-19）.

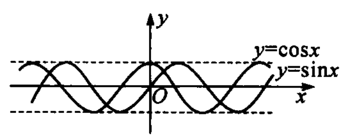


图 1-19

$y = \tan x$ 的定义域为除去 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的全体实数，是以 π 为周期的周期函数. 由于 $\tan(-x) = -\tan x$，故为奇函数（见图 1-20）.

$y = \cot x$ 的定义域为除去 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的全体实数，是以 π 为周期的周期函数，且为奇函数（见图 1-21）.

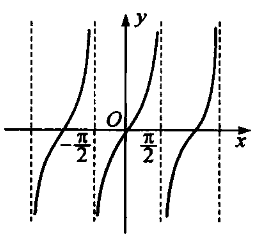


图 1-20

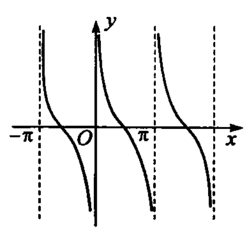


图 1-21

$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$，其定义域为除去 $x = k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 的全体实数，是以