大学高等数学类规划教材
丛书主编 王立冬

经管类

微积分（上册）

CALCULUS

主 编 王立冬 齐淑华
副主编 周文书 王金芝

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

经管类

微积分（上册）

CALCULUS

主　编　王立冬　齐淑华

副主编　周文书　王金芝

图书在版编目(CIP)数据

微积分.上册/王立冬,齐淑华主编.一大连:大连理工大学出版社,2011.8

ISBN 978-7-5611-6475-4

Ⅰ.①微… Ⅱ.①王… ②齐… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172057 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

电话:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:http://www.dutp.cn

大连美跃彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:170mm×240mm 印张:16.75 字数:292 千字

2011 年 8 月第 1 版 2011 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王 伟 责任校对:小 墨

封面设计:齐冰洁

ISBN 978-7-5611-6475-4 定 价:35.00 元

序

21 世纪已出现了高等教育向大众化教育转化的趋势.我国高等教育也开始呈现出了多层次与多样性的特点.这些特点正是反映了现代科技与文化教育发展形势的客观要求.

上述发展形势的启示下,具有多科性的大连民族学院的数学教师们,近年来一直致力于数学教材的建设,已相继编写出高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门基础课讲义,这三门课曾分别被评选为省级精品课与校级精品课.

在上述讲义的基础上,进行改进和修订后产生的这套"大学高等数学类规划教材"丛书,可以作为普通高校理工科与经济及管理学科各专业的通用教材或教学参考书.

这套教材并不以"英才教育"为特殊目标,其根本旨趣是要力求反映高校大众化数学教育的基本要求,并希望教材中能渗透人文素质教育的精神.因此简要说来,这套教材希冀和呈现的主要特点,约有下列三点.

一、尽可能从实践经验与直观背景出发,提出数学问题,以便于学生了解数学知识的源流与背景.

二、教材内容的安排与表述方式上,力求深入浅出、易教易学、简明实用.注重讲清基本概念,适度淡化理论证明,并适当反映数学所蕴含的素质教育与美育教育.

三、例习题的选取与安排力求体现理论联系实践的原则,多数例题选自实践、应用与生活.

凡是具有生命力的教材，总是处于不断适应客观要求和不断更新改进的过程中，这套教材丛书自然也不例外. 我为本书作序，诚挚希望本教程使用者与读者的任何指正或改进建议，将能直接函告丛书主编或教材编著者为幸.

徐利治

2009 年 8 月于大连

前 言

微积分是高等院校为非数学专业本科生开设的一门重要基础课程。根据不同专业的需要，该课程的内容和深度有所不同。从内容和深度上看，理工类专业要求较高，其次是经管类专业，然后是其他文科类专业，但数学教育本质上是一种素质教育，学习数学的目的，不仅在于学到一些数学概念、公式和结论，更重要的是了解数学的思想方法和精神实质。在这些方面，理工类、经管类和其他文科类专业学生的要求应该是一样的。

本书是依据高等学校本科微积分课程教学基本要求专为经管类本科生编写的，在编写过程中我们努力体现下述特色：

(1)遵循经管类专业教育的教学规律，考虑经管类教育的特色，强调了“必需”、“够用”，加强学生素质的培养。

(2)贯彻“掌握概念，强化应用”的教学原则。掌握概念落实到使学生能用数学思想考虑问题；强化应用落实到使学生能用所学的数学方法解决实际问题。

(3)在教学内容上注意对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、将复杂问题归纳为简单规律和步骤的能力的培养。

(4)力求将数学思维方法与数学学习相结合，使学生能够认

识、理解和运用数学思想方法，提高数学学习效果，增强思维品质。

(5)例题典型多样，难度上层次分明，注意解题方法的总结。

(6)为了配合双语教学，给出了一些重要词汇的英文翻译。

参加本书编写工作的有焦佳、刘满、刘延涛、刘红梅、刘强、梁学忠、马玉梅、王金芝、周庆健、周文书等。

由于编者水平有限，书中的错误在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 8 月

目 录

第 1 章　函数与极限
Function and Limit

微积分研究的主要对象是函数.研究函数通常有两种方法:一种是代数方法和几何方法的综合.这种方法常常只能用来研究函数的简单性质,有的做起来还很复杂.初等数学中就是用这种方法来研究函数的单调性、奇偶性和周期性的;另一种是微积分的方法,或者说是极限的方法.这种方法能够用来研究函数的许多深刻性质,并且做起来相对简单.微积分就是用极限的方法研究函数的一门学问.在介绍微积分之前,有必要先介绍函数的概念和有关知识.

1.1　函数的概念及其基本性质

1.1.1　集合及其运算

自从德国数学家康托(Georg Cantor,1845 ~ 1918)在19世纪末创立集合论以来,集合论的概念和方法已渗透到数学的各个分支,成为现代数学的语言和基础.一般地,所谓集合(set)是指具有某种确定性质的对象的全体.组成集合的各个对象称为该集合的元素.

习惯上,用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示集合,用小写字母 $a,b,\cdots$ 表示集合中的元素.用 $a \in A$ 表示 a 是集合 A 中的元素,读作"a 属于 A";用 $a \overline{\in} A$(或 $a \notin A$)表示 a 不是集合 A 中的元素,读作"a 不属于 A".含有有限多个元素的集合称为有限集;含有无限多个元素的集合称为无限集;不含有任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.

集合的表示方法有两种：列举法和描述法. 列举法就是把集合中的所有元素一一列举出来，写在一个花括号内，如 $A=\{-1,1\}$，$B=\{0,1,2\}$ 等. 描述法就是在花括号内指明该集合中的元素所具有的确定性质，如 $C=\{x\mid x^2-1\geqslant 0\}$，$D=\{x\mid \sin x=0\}$ 等.

习惯上，用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集，用 $\mathbf{Z}$ 表示整数集，用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集.

对于集合 A 和 B，若集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，即若 $a\in A$，则 $a\in B$，这时就称 A 是 B 的一个子集，记作 $A\subset B$，读作"A 含于 B"（或"B 包含 A"）. 若 $A\subset B$，且存在 $b\in B$，使得 $b\notin A$，则称 A 是 B 的一个真子集.

规定 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集，即 $\varnothing\subset A$.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A、B 相等，记作 $A=B$. 此时，A 中的元素都是 B 中的元素，反过来，B 中的元素也都是 A 中的元素，即 A、B 中的元素完全一样.

设 A、B 是两个集合，称 $\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的并集，记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$. 它是由 A 与 B 的全部元素合起来构成的一个集合.

称 $\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$ 为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$. 它是由 A 与 B 的公共元素构成的一个集合.

称 $\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$ 为 A 与 B 的差集，记作 $A-B$，即 $A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 它是由 A 中那些属于 A 但不属于 B 的元素构成的一个集合.

集合的运算满足下述基本法则：

定理 1　设 A、B、C 为三个集合，则

(1) $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；（交换律）

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；（结合律）

(3) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$，

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C)$；（分配律）

(4) $A\cup A=A$，$A\cap A=A$；（幂等律）

(5) $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$；

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.（吸收律）

特别地,由于 $A\cap B\subset A\subset A\cup B$,因而 $A\cup(A\cap B)=A$,$A\cap(A\cup B)=A$.

1.1.2 区间与邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,记 $(a,b)=\{x\mid a<x<b,x\in\mathbf{R}\}$,称为开区间(open interval);记 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,称为闭区间(closed interval);记 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b,x\in\mathbf{R}\}$,称为左闭右开区间;记 $(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b,x\in\mathbf{R}\}$,称为左开右闭区间. a,b 分别称为区间的左端点和右端点.

另外,还记 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b,x\in\mathbf{R}\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid a<x,x\in\mathbf{R}\}$ 等.

设 $x_0\in\mathbf{R}$,$\delta>0$,记 $U_\delta(x_0)=\{x\mid |x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}$,称为 x_0 的 δ 邻域(neighborhood),其中,x_0 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径. 不难得出

$$U_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$$

记 $\mathring{U}_\delta(x_0)=U_\delta(x_0)-\{x_0\}=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta,x\in\mathbf{R}\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$,称为 x_0 的去心 δ 邻域.

1.1.3 函数的概念

定义 1 设 D 为非空实数集,若存在对应规则 f,使得对任意的 $x\in D$,按照对应规则 f,都有唯一确定的 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个一元函数,简称函数,D 称为 f 的定义域,函数 f 的定义域常记作 D_f(或 $D(f)$). 对于任意的 $x\in D_f$,称其对应值 y 为函数 f 在点 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$. 全体函数值所构成的集合称为 f 的值域,记作 $f(D)$、R_f(或 $R(f)$),即

$$R_f=\{f(x)\mid x\in D_f\}$$

应该注意,在定义 1 中,函数 f 是一个对应规则,规定了 D_f 中的 x 对应于哪个实数 y,而 $f(x)$(即 y)则是函数值,是在对应规则 f 下,x 所对应的值 y,这两者在概念上是不一样的. 但由于历史的原因,习惯上也把 $f(x)$(或 y)称为 x 的函数,称 x 为自变量,y 为因变量.

由定义 1 可知,确定一个函数需确定其定义域和对应规则,因此,称定义域和

对应规则为确定函数的两个要素. 如果两个函数 f 和 g 的定义域和对应规则都相同,则称这两个函数相同.

函数的表示法一般有三种:表格法、图象法和解析法. 这三种方法各有特点,表格法一目了然;图象法形象直观;解析法便于计算和推导. 在实际中可结合使用这三种方法.

【例 1】 求 $\varphi(x) = \ln(\arcsin x)^2$ 和 $g(x) = 2\ln \arcsin x$ 的定义域,并判断它们是否为同一个函数.

解 对于用解析式表示的函数 $f(x)$,若其定义域未给出,则认为其定义域为使该函数式 $f(x)$ 有意义的实数的全体. 因此,要使 $\varphi(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \arcsin x \neq 0 \end{cases}, \quad 即\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

故 $D(\varphi) = [-1,0) \cup (0,1]$.

要使 $g(x)$ 有意义,x 必须满足

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \arcsin x > 0 \end{cases}, \quad 即\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 < x \end{cases}$$

故 $D(g) = (0,1]$.

由于 $D(\varphi) \neq D(g)$,所以 $\varphi(x)$ 和 $g(x)$ 不是同一个函数.

【例 2】 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0 \\ x^2+1, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(2)$,并作函数图形.

解 这是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 内的一个函数,在定义域的不同区间上,函数的表达式不同,这种函数称为分段函数. 当 $x < 0$ 时,对应的函数值 $f(x) = x-1$(即用 $x-1$ 来计算 $f(x)$),而当 $x \geqslant 0$ 时,对应的函数值 $f(x) = x^2+1$(即用 x^2+1 来计算 $f(x)$),所以

$$f(-1) = (-1) - 1 = -2$$

$$f(0) = 0^2 + 1 = 1$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

函数图形可分段描绘,并注意空心点和实心点的区别(图 1-1).

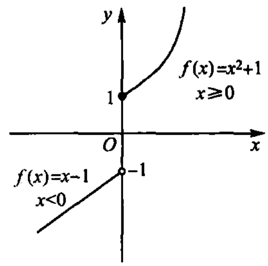

图 1-1

1.1.4 复合函数和反函数

1. 复合函数(composite function)

设 $y = f(u), u \in U$,而 $u = \varphi(x), x \in X$,此时 y 常常能通过变量 u 成为 x 的函数. 这是因为任取 $x \in X$,由于 u 是 x 的函数,由这个 x 可确定唯一的 u 与之对应,又由于 y 是 u 的函数,对这个由 x 所确定的 u(当 $u \in U$ 时),又可确定唯一的 y 与之对应,即 $x \xrightarrow{\varphi} u \xrightarrow{f} y$,由函数定义知,$y$ 是 x 的函数. 其函数式可通过代入运算得到:将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中,得 $y = f[\varphi(x)]$,称之为由 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 构成的复合函数.

【例 3】 设 $y = f(u) = \ln(u^2 + 1), u = \varphi(x) = \sin x$,则构成的复合函数为 $y = f[\varphi(x)] = \ln(\sin^2 x + 1)$.

可见,若给出两个函数 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$,要求复合函数只需作代入运算即可. 但应注意,并非任何两个函数都能构成复合函数.

【例 4】 设 $y = f(u) = \ln(u - 2), u = \varphi(x) = \sin x$,问 $f(u)$ 和 $\varphi(x)$ 能否构成复合函数 $f[\varphi(x)]$?

解 将 $u = \sin x$ 代入到 $y = \ln(u - 2)$ 中,得 $y = \ln(\sin x - 2)$,由于 $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \sin x - 2 < 0$,故函数的定义域为空集,所以不能构成复合函数.

研究例 3、例 4 可以发现,要使 $y = f(u)$ 和 $u = \varphi(x)$ 能够构成复合函数 $f[\varphi(x)]$,关键是要保证代入后的函数式有意义,或者说要保证 $u = \varphi(x)$ 的值域全部或部分落在 $y = f(u)$ 的定义域内,于是,就得到复合函数的定义.

定义 2 若 $y = f(u)$ 的定义域为 U,而 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 X,值域为 U^*,