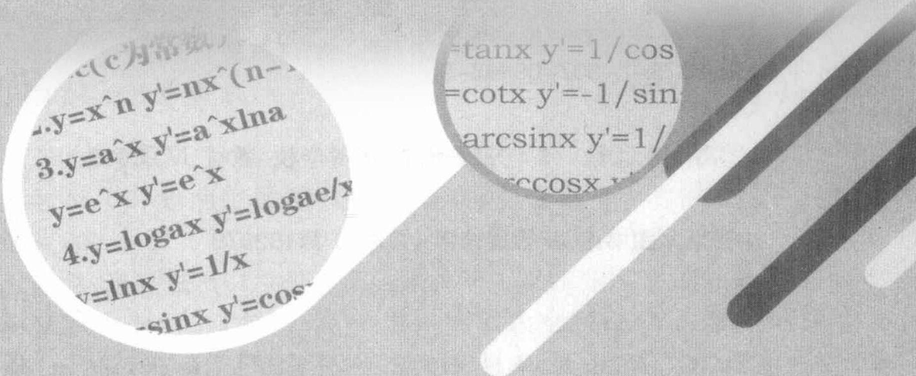
普通高等学校规划教材

Advanced Algebra

高等代数选讲

徐清舟　主编

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社



Advanced Algebra

高等代数选讲

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等代数选讲/徐清舟主编.—武汉：武汉大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-307-09168-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①徐… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第182876

高等代数选讲
徐清舟 主编

策　　划：大春文化
执　　行：杭州沃尔德教育信息咨询有限公司
责任编辑：张歆婕
封面设计：祁睿一
责任校对：汪志鸿
版式设计：袁思敏
出　　版：武汉大学出版社
印　　刷：浙江良渚印刷厂
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：16.5
字　　数：361千字
版 印 次：2011年8月第1版　2011年8月第1次印刷
I S B N：978-7-307-09168-9/O·458
定　　价：30.00元

前　言

本书是许昌学院教材建设立项之一，它是作者多年来在许昌学院数学与统计学院数学与应用数学专业和统计学专业本科“高等代数选讲”课程教学的基础上，并依据教育部制订的高等师范院校“高等代数”本科课程教学大纲编写的，本教材力求反映“高等代数”课程主要内容和要求，并从新的角度和高度对高等代数的内容进行了汇总和提升。作者在编写过程中查阅并分析汇总了近年来全国具有代表性的部分高等院校和研究生入学考试试卷，并以这些试题为范例给考研学生讲解辅导。学生普遍反映受益匪浅。

本书有以下特点。

(1) 本书按照北京大学数学系几何代数教研室前代数小组编写的《高等代数》顺序，将全书分为 9 章，每一章首先简要地复习概念，然后从历年各高校考研高等代数试题中精选例题，详细解答并分析解题思路。

(2) 注重基本概念、基本理论，对典型问题及其方法进行归类，系列知识点前后呼应，解决问题的方法尽量简明易懂。

(3) 注重在“高等代数”课程基本知识的基础上，全面系统地引导和培养学生的解题思路与方法，让学生对该课程内容有更深入的理解和掌握，对所学知识力争达到融会贯通，进而提高独立思考、灵活运用所学知识解决问题的能力。

本书初稿已经连续使用了 7 届，使用该讲义的老师在使用中不断修改和补充。尤其是北京师范大学博士生导师陈公宁教授在本院兼职讲授该课的过程中，提出了许多宝贵意见并补充了很多更好的解题方法与注释，这在很大程度上减少了原稿中出现的错误。在此，我们表示衷心感谢！

本书可作为数学相关专业的教材和考研参考书，也可供从事相关专业教学的教师参考。

需要指出的是，本书例题中的命题严格地按照原考题，因而不可避免地造成记号、用语上的不一致性，以及某些内容的重复，阅读时请务必注意这些问题。另外，鉴于考题的解答有别于通常课程的习题的演练，经常可以不拘章节顺序，并且，只要不出现逻辑上的错误，尽量用最简易的综合方法。必要时还在例题后加以注释，帮助读者理解本例的内容与解法或证法。

本书编写分工如下：徐清舟编写第 7 章和第 8 章，牛裕琪编写第 1 章和第 3 章，岳晓鹏编写第 2 章和第 9 章，贺勤编写第 4 章和第 5 章，陶西甫编写第 6 章，全书由陈公宁负责主审，徐清舟负责统稿。

由于编者水平所限，缺点、错误在所难免，恳请读者批评指正。

编　者

2011 年 4 月

内 容 简 介

本书旨在提高学生综合分析问题、利用代数知识解决实际问题的能力。通过对该课程的学习，使学生对高等代数的基本理论体系、基本思想方法、解题技巧有更全面、更深入的体会和准确的理解。进一步提高学生的数学修养、科学思维、逻辑推理能力，提高学生的理解和认识问题的能力以及计算能力。主要内容包括多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ－矩阵和欧氏空间等知识。

本书可作为数学专业及其他相关专业“高等代数选讲”课程的教材或教学参考书。也可作为数学及相关专业硕士研究生入学考试的复习资料。其中第 2～5 章的线性代数部分是相对独立的线性代数内容，也适合学习及备考线性代数的理工及管理类相关专业的学生使用。另外，本书也可以供高校教师和工程技术人员作为深入了解高等代数或线性代数的参考书。

目　录

第 1 章　多　项　式

1.1　多项式的次数

1. 多项式的定义

设 x 是一个变量，n 为非负整数，P 是一个数域，$a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，则形式表达式

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1.1}$$

称为数域 P 上文字 x 的多项式或一元多项式，简称多项式. 这样的多项式的集合记为 $P[x]$.

2. 多项式的次数

如果式(1.1)中 $a_n\neq0$，称它为 n 次多项式. 零多项式不定义次数. 多项式 $f(x)$ 的次数记为$\partial(f(x))$或 $\deg(f(x))$等.

定理 1.1.1(次数定理)　设 $f(x),g(x)$是数域 P 上两个非零多项式，则

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq0$ 时，有$\partial(f(x)+g(x))\leqslant\max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$；

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

例 1.1　设 $f_n(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})$，$n\in\mathbf{N}$. 证明：

(1) $\partial(f_n(x))=2^{n+1}-1$；　(2) $f_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{2^{n+1}-1}$.

证　(1) 由定理 1.1.1(2)知，$\partial(f_n(x))=1+2+2^2+\cdots+2^n=2^{n+1}-1$.

(2) 用数学归纳法证之.

当 $n=0$ 时，$f_0(x)=1+x=1+x^{2^{0+1}-1}$.

假定当 $n=k$ 时命题成立，即 $f_k(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{2^{k+1}-1}$.

那么，当 $n=k+1$ 时，$f_{k+1}(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{2^{k+1}-1})(1+x^{2^{k+1}})=1+x+x^2+\cdots+x^{2^{k+2}-1}$，命题成立.

综上所述，对任意 n，命题成立.

例 1.2　设 $f(x)$为非零的复系数多项式，且 $f(f(x))=(f(x))^n$，n 为正整数.

(1) 证明：若$\partial(f(x))=0$，则 $f(x)=\omega$，ω 为 $n-1$ 次单位根.

(2) 证明：若$\partial(f(x))>0$，则$\partial(f(x))=n$.

(3) 求当$\partial(f(x))>0$ 时的 $f(x)$.

证　(1) 当$\partial(f(x))=0$ 时，设 $f(x)=c$ $(c\neq0)$，则 $c^n=c$，因而 $c^{n-1}=1$，即 $c=\omega$ 为 $n-1$ 次单位根.

因此 $f(x)=\omega$，其中 ω 为 $n-1$ 次单位根.

(2) 当$\partial(f(x))>0$时，不妨设$\partial(f(x))=m, m\in \mathbf{N}_+$（正整数集），且设

$$f(x)=a_m x^m+\cdots+a_1x+a_0,$$

由题设 $f(f(x))=(f(x))^n$ 知，

$$\begin{aligned}&a_m(a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0)^m+\cdots+a_1(a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0)+a_0\\&=(a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0)^n,\end{aligned}$$

又由定理 1.1.1(1)知，$m^2=mn$. 因 $m\neq 0$，所以 $m=n$，即$\partial(f(x))=n$.

(3) 由(2)的假设及题设知，

$$a_nf^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=f^n(x),$$

所以

$$(a_n-1)f^n(x)+a_{n-1}f^{n-1}(x)+\cdots+a_1f(x)+a_0=0,$$

从而 $a_n=1, a_{n-1}=0, \cdots, a_1=0, a_0=0$（用到 $f^n(x), f^{n-1}(x), \cdots, f(x), 1$ 的线性无关性）.

因此 $f(x)=x^n$. 易知 $f(f(x))=(x^n)^n=(f(x))^n$ 符合题意.

例 1.3 设 $f(x)\in P[x]$，证明：若 $f(x^2)=f^2(x)$，则 $f(x)=0$ 或 1 或 x^i（x 的单项式）.

证 (1) 若 $f(x)$为零多项式或零次多项式，则 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

(2) 设$\partial(f(x))=n>0$，且 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，其中 $a_n\neq 0$，按条件有 $a_n=1$. 又由条件 $f(0)=f^2(0)$，可得 $a_0=a_0^2$. 若 $a_0\neq 0$，则 $a_0=1$，即 $f(x)=x^n+\cdots+a_1x+1$，由题设有

$$x^{2n}+\cdots+a_1x^2+1=(x^n+\cdots+a_1x+1)^2.$$

因此 $2a_1=0, 2a_{n-1}=0$，因而 $a_1=0, a_{n-1}=0$.

同样可证 $a_2=a_3=\cdots=a_{n-2}=0$，于是 $x^{2n}+1=(x^n+1)^2$，产生矛盾，故必有 $a_0=0$，即有

$$f(x)=x^n+\cdots+a_1x.$$

于是由 $x^{2n}+\cdots+a_1x^2=(x^n+\cdots+a_1x)^2$ 可得

$$x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2+a_1=(x^{n-1}+\cdots+a_2x+a_1)^2.$$

类似于以上讨论得，$a_1=0$，则有

$$x^{2n-2}+\cdots+a_2x^2=(x^{n-1}+\cdots+a_2x)^2,$$

因此有 $a_2=0$. 继续以上讨论，最后可得到 $f(x)=x^n$（x 的单项式）.

例 1.4 设 $f(x), g(x), h(x)$均为实系数多项式，证明：若有 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$，则

$$f(x)=g(x)=h(x)=0.$$

证 若 $f(x)\neq 0$，则$\partial(f^2(x))$为偶数，而 $g(x), h(x)$中至少有一个非零. 不妨设 $g(x)\neq 0$ 且$\partial(g(x))\geqslant\partial(h(x))$（若$\partial(h(x))\geqslant\partial(g(x))$，则 $h(x)$为非零多项式，这时可用 $h(x)$代替 $g(x)$），或 $h(x)=0$，则题设中等式右端次数为奇数 $1+\partial(g^2(x))$（这里用到实系数的条件），推出矛盾. 因此 $f(x)=0$，即有 $xg^2(x)+xh^2(x)=0$，因而

$$g^2(x)+h^2(x)=0.$$

但由于 $g(x),h(x)$ 为实系数多项式，故 $g(x)=h(x)=0$.

1.2 多项式的整除性

1. 整除的定义

设 $f(x),g(x)$ 是 $P[x]$ 中的两个多项式，若存在 $P[x]$ 中一个多项式 $h(x)$，使 $f(x)=g(x)h(x)$，则称 $g(x)$ 整除 $f(x)$，记为 $g(x)\mid f(x)$，否则记为 $g(x)\nmid f(x)$.

若 $g(x)\mid f(x)$，则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一个因式，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的一个倍式.

2. 整除的性质

设以下多项式均属于 $P[x]$（若无特殊声明），则有下述性质.

(1) 任一多项式 $g(x)$ 都能整除零多项式，而零多项式只能整除零多项式.

(2) 零次多项式（即非零常数）$c\in P$ 能整除任意一个多项式 $f(x)$.

(3) $f(x)\mid g(x)$ 与 $g(x)\mid f(x)$ 的充要条件是 $f(x)=cg(x)$，其中 $c\in P$ 为非零常数.

(4) 若 $f(x)\mid g(x)$ 与 $g(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid h(x)$（整除的传递性）.

(5) 若 $f(x)\mid g(x)$ 与 $f(x)\mid h(x)$，则 $f(x)\mid g(x)\pm h(x)$.

(6) 若 $f(x)\mid g(x)$，则对于任意的 $h(x)\in P[x]$，有 $f(x)\mid g(x)h(x)$.

(7) 若 $f(x)\mid g_i(x)\ (i=1,2,\cdots,r)$，则

$$f(x)\mid(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_r(x)g_r(x)),$$

其中 $u_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$ 是数域 P 上任意多项式.

3. 带余除法

设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $P[x]$ 中的两个多项式，且 $g(x)\neq0$，那么在 $P[x]$ 中一定存在唯一的一对多项式 $q(x)$ 与 $r(x)$，使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x),$$

其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或 $r(x)=0$. 称 $q(x)$ 为 $f(x)$ 除以 $g(x)$ 的商，称 $r(x)$ 为余式.

4. 综合除法

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$，若

$$f(x)=(x-c)q(x)+r,$$

其中 $q(x)=b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+b_{n-3}x^{n-3}+\cdots+b_1x+b_0$，则

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\
c & +) & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\
\hline
 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r=f(c)
\end{array}$$

表中，符号“+”通常略去不写.

例 1.5(河南师范大学,1999) 设 d 与 n 为正整数,证明:$x^d-1\mid x^n-1 \Leftrightarrow d\mid n$.

证 先证充分性.

若 $d\mid n$,则 $n=dq$,q 为某正整数,于是

$$x^n-1==x^{dq}-1=(x^d)^q-1=(x^d-1)((x^d)^{q-1}+\cdots+x^d+1),$$

因此,$x^d-1\mid x^n-1$.

再证必要性.

令 $n=dq+r$,其中,q 与 r 分别为正整数与非负整数,$r<d$,则

$$x^n-1=x^{dq+r}-1=x^{dq+r}-x^r+x^r-1=x^r(x^{dq}-1)+(x^r-1).$$

因为 $x^d-1\mid x^n-1$,$x^d-1\mid x^{dq}-1$,所以 $x^d-1\mid x^r-1$. 由于 $r<d$,故 $r=0$,即有 $d\mid n$.

例 1.6 设 $f(x)=(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots+(2x)^k(x+1)^n$,试证

$$x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}.$$

证
$$\begin{aligned}(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}&=(x-1)[(x+1)^{k+n}+(2x)(x+1)^{k+n-1}+\cdots\\&\quad+(2x)^k(x+1)^n]+(x+1)^{k+n+1}\\&=[2x-(x+1)][(x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\\&\quad\cdots+(2x)^k](x+1)^n+(x+1)^{k+n+1}\\&=[(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}](x+1)^n+(x+1)^{k+n+1}\\&=(2x)^{k+1}(x+1)^n-(x+1)^{k+n+1}+(x+1)^{k+n+1}\\&=x^{k+1}[2^{k+1}(x+1)^n],\end{aligned}$$

因此,
$$x^{k+1}\mid(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}.$$

注 $f(x)=((x+1)^k+(2x)(x+1)^{k-1}+\cdots+(2x)^k)(x+1)^n$,于是

$$\begin{aligned}&(x-1)f(x)/(x+1)^n=(2x)^{k+1}-(x+1)^{k+1}\\&\qquad\Rightarrow(x-1)f(x)+(x+1)^{k+n+1}=(2x)^{k+1}(x+1)^n.\end{aligned}$$

例 1.7(中山大学) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,证明:$f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow f^2(x)\mid g^2(x)$.

证一 先证必要性.

设 $f(x)\mid g(x)$,则存在 $q(x)\in P[x]$,使得 $g(x)=f(x)q(x)$. 因此

$$g^2(x)=f^2(x)q^2(x),\quad 即有\quad f^2(x)\mid g^2(x).$$

再证充分性.

设 $f(x)$ 的典型分解式为 $f(x)=ap_1^{l_1}(x)\cdots p_r^{l_r}(x)$,其中 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 为首项系数是 1 的彼此不同的不可约多项式. 由 $f^2(x)\mid g^2(x)$ 知,$g(x)$ 的典型分解式为

$$g(x)=bp_1^{k_1}(x)\cdots p_r^{k_r}(x)p_{r+1}^{k_{r+1}}(x)\cdots p_s^{k_s}(x).$$

于是

$$p_1^{2l_1}(x)\cdots p_r^{2l_r}(x)\mid p_1^{2k_1}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x)p_{r+1}^{2k_{r+1}}(x)\cdots p_s^{2k_s}(x),p_i^{2l_i}(x)\mid p_i^{2k_i}(x),$$

因而 $l_i\leqslant l_i(i=1,2,\cdots,r)$,故 $f(x)\mid g(x)$.

证二 必要性同前证一. 下面证充分性.

若 $f(x)=g(x)=0$,则 $f(x)\mid g(x)$. 若 $f(x),g(x)$ 不全为零,则 $f(x)\neq0$. 设 $d(x)=(f(x),g(x))$,则 $d(x)$ 为非零多项式,$f(x)=d(x)f_1(x)$,$g(x)=$

$d(x)g_1(x)$，且$(f_1(x),g_1(x))=1$. 于是

$$f^2(x)=d^2(x)f_1^2(x),\quad g^2(x)=d^2(x)g_1^2(x).$$

由 $f^2(x)\mid g^2(x)$得 $f_1^2(x)\mid g_1^2(x)$，因而 $f_1(x)\mid g_1^2(x)$. 但因为$(f_1(x),g_1(x))=1$，所以 $f_1(x)\mid g_1(x)$，从而

$$f_1(x)=c\neq 0,\quad f(x)=cd(x).$$

又因为 $g(x)=d(x)g_1(x)$，所以 $f(x)\mid g(x)$.

例 1.8 设 $f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}$，证明：$f(x)\mid(f(x)+x^n)^2-x^n$.

证 设 α 为 $f(x)$的根，根据$(1-x)f(x)=1-x^n$，得 $\alpha^n=1$，但 $\alpha\neq 1$ $(f(1)=n\neq 0)$. 这时

$$(f(\alpha)+\alpha^n)^2-\alpha^n=1-1=0,$$

这表明 $f(x)$的根为$(f(x)+x^n)^2-x^n$ 的根. 由于 $f(x)$无重根，故 $f(x)\mid(f(x)+x^n)^2-x^n$.

注 若 α 为 $f(x)$的根，则 $\alpha^n=1,\alpha\neq 1$；反之，若 $\alpha^n=1,\alpha\neq 1$，则 $f(\alpha)=0$. 这说明：除了 1 以外，其他的 $n-1$ 个 n 次单位根为 $f(x)$的所有根.

例 1.9(西南交通大学) 设 $f(x),g(x)\in P[x]$，其中 P 为复数域，且

$$x^2+x+1\mid f(x^3)+xg(x^3),$$

证明：$f(1)=g(1)=0$.

证 设 α_1,α_2 是 x^2+x+1 的两个复根. 因为$(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$，所以 $\alpha_i^3=1$ $(i=1,2)$，但 $\alpha_i\neq 1$. 由题设 $x^2+x+1\mid f(x^3)+xg(x^3)$看出，$\alpha_1,\alpha_2$ 也是 $f(x^3)+xg(x^3)$的根，于是

$$\begin{cases}f(\alpha_1^3)+\alpha_1 g(\alpha_1^3)=0,\\ f(\alpha_2^3)+\alpha_2 g(\alpha_2^3)=0,\end{cases}\quad\text{即}\quad\begin{cases}f(1)+\alpha_1 g(1)=0,\\ f(1)+\alpha_2 g(1)=0.\end{cases}$$

上述关于 $f(1),g(1)$的方程组的系数行列式为 $\begin{vmatrix}1 & \alpha_1\\ 1 & \alpha_2\end{vmatrix}=\alpha_2-\alpha_1\neq 0$，因而该方程组只有零解，即

$$f(1)=g(1)=0.$$

注 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x+1=\dfrac{x^{n-1}-1}{x-1}$ $(x\neq 1)$(当 $x=1$ 时，$f_n(1)=n+1$)，

即
$$(x-1)f_n(x)=x^{n+1}-1,$$

$f_n(x)$有 n 个不同的复根，它们与 1 一起 $n+1$ 等分单位圆周. 例 1.1、例 1.2、例 1.5、例 1.6、例 1.8、例 1.9、例 1.10、例 1.16 等都用到这个结论.

例 1.10 求 $x^2-x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$成立时 m,n,p 的关系.

解 设 α_1,α_2 是 x^2-x+1 的两个不同的复根，则因为$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$，所以

$$\alpha_i^3=-1\quad\text{且}\quad\alpha_i\neq -1\quad(i=1,2).$$

于是本题设条件相当于

$$\alpha_i^{3m}+\alpha_i^{3n+1}+\alpha_i^{3p+2}=0 \quad (i=1,2).$$

因为 $\alpha_i^3=-1$ 且 $\alpha_i\neq-1 \quad (i=1,2)$，所以该条件又等价于

$$\alpha_i^{3m}+\alpha_i^{3n+1}+\alpha_i^{3p+2}=(-1)^m+(-1)^n\alpha_i+(-1)^p\alpha_i^2=0 \quad (i=1,2).$$

上式成立，当且仅当 m,p 的奇偶性相同，且 n 与 m,p 的奇偶性相反.

因此，$x^2-x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 的充要条件是 m,p 的奇偶性相同，且 n 与 m,p 的奇偶性相反.

注 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=(x^3)^m+x(x^3)^n+x^2(x^3)^p$.

例 1.11 求一个多项式 $f(x)$，使 $x^2+1\mid f(x)$，$x^3+x^2+1\mid f(x)+1$.

解 由条件知，待求的 $f(x)$ 应满足

$$f(x)+1=(x^3+x^2+1)g(x)\ (g(x)\text{为合适的多项式}),$$

且 $f(\pm\mathrm{i})=0$ (i 为虚数单位).

由 $f(+\mathrm{i})=0$ 得

$$1=(-\mathrm{i})g(+\mathrm{i}) \Rightarrow g(+\mathrm{i})=+\mathrm{i},$$

再由 $f(-\mathrm{i})=0$

得
$$g(-\mathrm{i})=-\mathrm{i}.$$

反之，当 $g(x)$ 为满足 $g(\pm\mathrm{i})=\pm\mathrm{i}$ 的多项式时，$f(x)=(x^3+x^2+1)\cdot g(x)-1$ 即为所求的多项式. 取 $g(x)=x$，得

$$f(x)=x^4+x^3+x-1=(x^2+1)(x^2-1)+x(x^2+1).$$

显然 $x^2+1\mid f(x)$，$x^3+x^2+1\mid f(x)+1$，所以 $f(x)=x^4+x^3+x-1$ 即为所求.

注 当取 $g(x)=x$ 时，所求的 $f(x)$ 为次数最低的. 所有满足条件的 $f(x)$ 形如

$$(x^3+x^2+1)\cdot g(x)-1,$$

其中 $g(x)$ 为满足条件 $g(\pm\mathrm{i})=\pm\mathrm{i}$ 的任意多项式，即

$$g(x)=x+(x^2+1)p(x), \quad \forall\, p(x)\in P[x].$$

1.3 多项式的根

设 $f(x)$ 是 $P[x]$ 的一个多项式，而 c 是数域 P 中的一个数. 若当 $x=c$ 时，$f(x)$ 的值 $f(c)=0$，则 c 就称为多项式 $f(x)$ 在数域 P 中的一个根.

定理 1.3.1(余式定理) 用一次多项式 $x-c\ (c\in P)$ 除多项式 $f(x)\ (f(x)\in P[x])$ 所得的余式等于 $f(c)$.

定理 1.3.2(因式定理) 数 $c\in P$ 为多项式 $f(x)\ (f(x)\in P[x])$ 的根的充要条件是 $x-c\mid f(x)$.

定理 1.3.3 $P[x]$ 中 n 次多项式 $f(x)$ 在数域 P 中最多有 n 个根(重根按重数计算)(当 $P=\mathbf{C}$ 时，$f(x)$ 有 n 个复数根).

命题 1.3.1 若 $f(x)\mid g(x)$，则 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根. 反之，若 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根，且 $f(x)$ 没有重根，则 $f(x)\mid g(x)$.

例 1.12 设 $f(x)\mid f(x^n)$，其中 $f(x)\in C[x]$. 证明：$f(x)$的根只能是 0 或某次单位根.

证 设 α 是 $f(x)$在复数域上的一个根，则 $x-\alpha\mid f(x)$. 由已知 $x-\alpha\mid f(x^n)$，因而 $f(\alpha^n)=0$，即 α^n 也是 $f(x)$的根. 依此类推，得到 $\alpha,\alpha^n,\alpha^{n^2},\alpha^{n^3},\cdots$都是 $f(x)$的根. 但 $f(x)$的次数有限，其根的个数也有限，因此存在 $k>q$(正整数)，使得 $\alpha^{n^k}=\alpha^{n^q}$，即 $(\alpha^{n^k-n^q}-1)\alpha^{n^q}=0$. 因此，$\alpha$ 为零，或者 α 为单位根.

例 1.13 设 $f(x)$是 $\mathbf{C}[x]$中一个非零多项式. 证明：若对 $\mathbf{C}$ 中任意数 a，都有 $f(x-a)=f(x)$，则 $f(x)$是一个非零常数.

证一(反证法) 假定 $f(x)$不是一个非零常数，设$\partial(f(x))=n\geqslant 1$，则 $f(x)$在复数域中有根. 设 ω 是 $f(x)$在复数域上的任意一个根，则对任意 $a\in\mathbf{C}$，都有 $f(\omega)=f(\omega-a)=0$，即 $\omega-a$ 也都是 $f(x)$的复根. 由 a 的任意性知，$f(x)$有无穷多根，矛盾.

证二 由条件得 $f(0)=f(-a)$，$\forall a\in\mathbf{C}$. 若 $f(x)$不是一个非零常数，设其次数为 $n\geqslant 1$，则说明多项式 $f(x)-f(0)$在 $\mathbf{C}$ 中有无穷多根. 矛盾.

例 1.14 设 $f(x)\in P[x]$，证明：如果对 $\forall a,b\in\mathbf{C}$，都有 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，则 $f(x)=kx$，其中 k 是 $\mathbf{C}$ 中的一个数.

证 对任意 $0\neq a\in P$，取 $k=\dfrac{f(a)}{a}\in P$，则 $f(a)-ka=0$. 令 $u(x)=f(x)-kx$，则

$$u(a)=f(a)-ka=0,$$

即 a 是 $u(x)$的一个根. 因为 $f(a+b)=f(a)+f(b)$，所以对于 $x=2a$，有

$$u(2a)=f(2a)-k(2a)=f(a)+f(a)-k(2a)=2(f(a)-ka)=0,$$

亦即 $2a$ 也是 $u(x)$的一个根，依此类推，$a,2a,3a,\cdots$都是 $u(x)$的根. 又因为当 $t\neq s$ 时，$ta\neq sa$，所以 $u(x)$只能是零多项式，即 $f(x)-kx=0$，从而 $f(x)=kx$.

注 取 $k=f(1)$也可，$f(m)=mf(1)=km$，$\forall m\in\mathbf{N}_+$($\mathbf{N}_+$表示正整数集合).

例 1.15 证明：设 $f(x)\in P[x]$满足条件 $f(0)=0$，且 $f(x^2+1)=f^2(x)+1$，则 $f(x)=x$.

证 由条件 $f(0)=0$ 与 $f(x^2+1)=f^2(x)+1$，得

$$\begin{gathered}
f(1)=f(0^2+1)=f^2(0)+1=1,\\
f(2)=f(1^2+1)=f^2(1)+1=1+1=2,\\
f(5)=f(2^2+1)=f^2(2)+1=4+1=5,\\
f(26)=f(5^2+1)=f^2(5)+1=25+1=26,\\
\vdots
\end{gathered}$$

因此，存在无限多个数使 $f(x)$与 x 的值相等，于是 $f(x)=x$.

例 1.16 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

解 在复数范围内，有

$$x^n-1=(x-\omega_0)(x-\omega_1)\cdots(x-\omega_{n-1}),$$

其中 $\omega_k=\cos\dfrac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2k\pi}{n}\left(=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}\right)$，$k=0,1,\cdots,n-1$ 为单位圆周上的 n 等分点(从

(1,0)开始).

在实数范围内,因为对于 $1\leqslant k\leqslant n-1$,有

$$\bar{\omega}_k=\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\left(=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{n}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2(n-k)\pi}{n}}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$=\cos\frac{2(n-k)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2(n-k)\pi}{n}=\omega_{n-k},$$

所以 $$\omega_0=1,$$

$$\omega_k+\omega_{n-k}=\omega_k+\overline{\omega_k}=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$=2\cos\frac{2k\pi}{n}=2\mathrm{Re}\omega_k\quad(\text{实部}),$$

$$\omega_k\omega_{n-k}=\omega_k\overline{\omega_k}=|\omega_k|^2=\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\right)=1.$$

于是当 $1\leqslant k\leqslant[(n-1)/2]$ 时,有

$$(x-\omega_k)(x-\omega_{n-k})=(x-\omega_k)(x-\bar{\omega}_k)=x^2-(\omega_k+\omega_{n-k})x+\omega_k\omega_{n-k}$$

$$=x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1.$$

因此,当 n 为奇数时,$\frac{n-1}{2}$ 为整数,于是

$$x^n-1=(x-1)\prod_{k=1}^{(n-1)/2}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1\right);$$

当 n 为偶数时,$\omega_0=1,\omega_{n/2}=-1$,于是

$$x^n-1=(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n/2-1}\left(x^2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\cdot x+1\right).$$

1.4 最大公因式

命题 1.4.1 设 $f(x),g(x)\in P[x]$,若存在 $d(x)\in P[x]$,满足

(1) $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式,

(2) $d(x)$ 能被 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的每一个公因式整除,

那么 $d(x)$ 称为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

定理 1.4.1 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x),g(x)$ 一定存在最大公因式,且除零次因式的差异外是唯一的.记 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的唯一首项系数为 1 的最大公因式为

$$(f(x),g(x))\quad 或\quad d(x)=\gcd\{f(x),g(x)\}.$$

定理 1.4.2 对于任意的 $f(x),g(x)\in P[x]$,存在一个最大公因式 $d(x)\in P[x]$,它可以表示成 $f(x),g(x)$ 的一个组合,即有 $P[x]$ 中的多项式 $u(x),v(x)$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

注 两个多项式的最大公因式与所讨论的数域为 P 或为它的任何一个扩展域