普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（上册）

主　编　高　洁　郭夕敬
副主编　唐春艳　肖亿军　宋　靓

清华大学出版社

高等数学

（上册）

主　编　高　洁　郭夕敬
副主编　唐春艳　肖亿军　宋　靓

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据编者多年的教学实践经验，参照最新制定的"工科类、经济管理类本科教学基础课程教学基本要求"，以及教育部最新颁布的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关高等数学部分的内容编写而成，分为上、下两册.

上册的内容包括极限与函数的连续性、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程，书后附习题答案与提示、代数公式、常用三角函数值及公式、极坐标系、常用曲线、积分表.

本书可作为普通高等学校非数学类专业本科一年级学生的教材，也可作为高年级学生考研辅导参考书使用.

版权所有，侵权必究. 侵权举报电话：010-62782989　13701121933

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/高洁，郭夕敬主编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-40432-3

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①高… ②郭…　Ⅲ. ①高等数学一高等学校一教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 122496 号

责任编辑：汪　操
封面设计：傅瑞学
责任校对：刘玉霞
责任印制：沈　露

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：清华大学印刷厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　张**：24.25　　**字　　数**：527 千字
版　　次：2015 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 8 月第1 次印刷
印　　数：1～6500
定　　价：39.00 元

产品编号：062055-01

前言

随着科学技术的迅猛发展，数学正日益成为各学科进行科学研究的重要手段和工具. 高等数学是近代数学的基础，是理科、工科各专业和经济、管理类等专业的必修课，也是在现代科学技术、经济管理、人文科学中应用最广泛的一门课程. 通过学习高等数学课程，学生可以掌握处理数学问题的思想和方法，培养逻辑推理能力、空间想象能力、计算能力、抽象概括能力，养成分析问题和解决问题的科学思维方式，为学习后续课程奠定基础.

本书依据教育部制定的理工类、经济类和管理类各专业《高等数学课程基础要求》，以及教育部最新颁布的《全国研究生入学统一考试的数学考试大纲》中有关高等数学部分的内容要求编写而成，分为上、下两册，以微积分学为核心. 上册介绍了微积分研究的对象——函数，及微积分学研究的重要基础——极限理论，在此基础上建立了一元函数微积分学的连续、导数、微分、不定积分、定积分的概念、理论和应用，并介绍了求解微分方程的方法. 下册介绍了空间解析几何和向量代数、多元函数微积分学的基本概念和理论，以及无穷级数的部分内容. 本书的内容既充分考虑到大学一年级各专业学生学习“高等数学”的需求，又考虑到知识点的综合应用，因此也可以作为高年级学生考研辅导参考书使用. 本书中选修内容用楷体标出. 除主编和副主编外，陈创泉、黄旭和廖益文参加了本书的编写工作，在此对他们表示感谢.

本书具有以下特点：

(1) 文字通俗易懂，便于学生课后阅读；

(2) 内容详略得当，适用于少学时教学；

(3) 体系完整严谨，分层次编排内容；

(4) 例题取材多样化，激发学生兴趣；

(5) 引入数学建模思想，理论与实践相结合.

要学好高等数学这门课程，第一要完成从中学到大学学习方法的转变，培养独立思考的学习习惯；第二要提高分析问题、解决问题的能力，从学习中体会到逻辑严谨、环环相扣的数学之美；第三要付出坚持不懈的努力，才能达到“蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的学习境界！

编　者

2015 年 4 月

目录

第 1 章　极限与函数的连续性 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　极限的概念、无穷小与无穷大 …… 14
1.3　极限的运算法则 …… 23
1.4　极限存在准则、无穷小的比较 …… 29
1.5　连续函数 …… 38
第 2 章　导数与微分 …… 48
2.1　函数的导数 …… 48
2.2　求导法则 …… 54
2.3　高阶导数、隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 …… 63
2.4　函数的微分 …… 70
第 3 章　微分中值定理与导数的应用 …… 77
3.1　微分中值定理 …… 77
3.2　洛必达法则 …… 82
3.3　泰勒公式 …… 89
3.4　函数的单调性和极值 …… 93
3.5　曲线的凹凸性、函数图形的描绘 …… 102
3.6　微分学在经济学中的应用 …… 108
第 4 章　不定积分 …… 115
4.1　不定积分的概念与性质 …… 115
4.2　换元积分法 …… 119
4.3　分部积分法 …… 126
4.4　几种典型函数的不定积分 …… 130
第 5 章　定积分及其应用 …… 137
5.1　定积分的概念和性质 …… 137

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

5.2　微积分基本定理 …… 143
5.3　定积分的换元积分法与分部积分法 …… 148
5.4　反常积分 …… 155
5.5　定积分的应用 …… 161
第6章　常微分方程 …… 174
6.1　微分方程的基本概念 …… 174
6.2　一阶微分方程 …… 178
6.3　二阶常系数齐次线性微分方程 …… 187
6.4　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… 192
习题答案及提示 …… 198
附录Ⅰ　代数公式 …… 220
附录Ⅱ　常用三角函数值及公式 …… 221
附录Ⅲ　极坐标系 …… 224
附录Ⅳ　常用曲线 …… 226
附录Ⅴ　积分表 …… 228

第 1 章

极限与函数的连续性

高等数学是一门以函数为主要研究对象的数学学科. 在实际生活中,大量的实际问题要求获得变量与变量之间的依赖关系,由此产生了函数概念. 极限理论是研究函数的基础. 本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质,其中有些内容在中学课程中已经学习过,但有必要巩固和进一步加深.

1.1 函　　数

1.1.1 区间和邻域

高等数学中讨论的量在实数集中取值,全体实数的集合记为 $\mathbf{R}$. 实数集与数轴上的点集一一对应,因此不严格区别数和点.

1. 区间

区间是高等数学中常用的数集,借助于集合符号将其表示如下:

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,各种区间定义如下:

开区间　　$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}$;

闭区间　　$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$;

左开右闭区间　　$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}$;

左闭右开区间　　$[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}$.

这些区间统称为**有限区间**,$b-a$ 称为这些**区间的长度**,a 与 b 分别称为这些区间的**左端点**和**右端点**. 开区间 (a,b) 和闭区间 $[a,b]$ 如图 1.1(a)与(b)所示.

下列区间统称为**无限区间**:

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\};$$
$$[a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}.$$

其中 $+\infty$(读作正无穷大)表示数轴正方向无穷远处,$-\infty$(读作负无穷大)表示数轴负方向

无穷远处，$-\infty$和$+\infty$都不是具体的数. 区间$(a,+\infty)$和$(-\infty,b]$如图 1.1(c)和(d)所示.

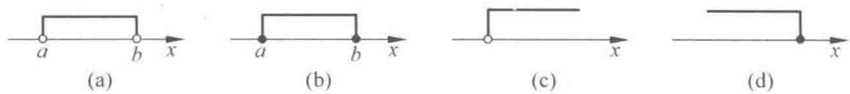

图 1.1

2. 邻域

邻域也是高等数学中常用的数集.

设 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，称与点 a 的距离小于 δ 的点组成的数集

$$\{x\mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为**点 a 的 δ 邻域**. 点 a 称为邻域的中心. δ 称为邻域的半径，如图 1.2(a)所示.

在点 a 的 δ 邻域中去掉中心点 a 所得到的数集

$$\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

称为**点 a 的去心邻域**($0<|x-a|$表示 $x\neq a$)，如图 1.2(b)所示.

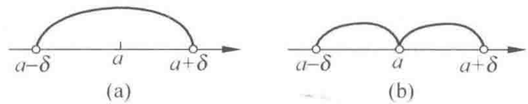

图 1.2

1.1.2 函数的概念

在我们所研究的基本问题中，常常会遇到不同的量，有些量在整个过程中不发生变化，即取固定的数值，这种量称为**常量**；有些量在整个过程中是变化的，即可以取不同的数值，这种量称为**变量**.

1. 函数的定义

同一过程中的几个变量之间往往是互相依赖的关系. 现在针对两个变量的情况举几个例子.

例 1.1.1 考查不同半径的圆的面积.

设圆的半径为 r，面积为 A，则有

$$A=\pi r^2,\quad r>0.$$

这里圆周率 π 是个常量，圆的半径 r 和面积 A 都是变量. 当变量 r 在区间$(0,+\infty)$内任取一个数值时，变量 A 按照上面的对应法则有唯一的数值与之对应.

例 1.1.2 某市的出租车按如下办法收费：当乘车里程不超过 2.5km 时，收费 10 元，当里程超过 2.5km 时，每 km 加收 2 元.

设乘车里程为 $x$km，则乘车费

$$y=\begin{cases}10, & 0<x\leqslant 2.5,\\ 10+2(x-2.5), & x>2.5.\end{cases}$$

这里乘车里程 x 和乘车费 y 是两个变量. 当变量 x 在区间 $(0,+\infty)$ 内任取一个数值时,变量 y 按上面的对应法则就有唯一的数值与之对应.

一般地,变量 y 与变量 x 之间的这种对应关系就是函数关系.

定义 1.1.1 设 D 是一个非空数集. 如果存在一个对应法则 f,使得对于每一个数 $x\in D$,按照对应法则 f 有唯一的数值 $y\in\mathbf{R}$ 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,D 称为函数 $y=f(x)$ 的**定义域**.

为了简化书写,本书引入几个逻辑符号,其中符号"$\forall$"(Any 首字母的变形)表示"对每一个"、"对任何的". 函数定义中"对每一个数 $x\in D$"可以简写成"$\forall x\in D$".

关于函数的定义,作以下几点说明:

(1) 用变量的说法,当变量 x 取值 $x_0\in D$ 时,变量 y 有唯一的数值 y_0 与 x_0 相对应. 此时称函数在点 x_0 处有定义,称 y_0 为函数在点 x_0 的**函数值**,记为 $f(x_0)$. 称全体函数值组成的数集

$$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$$

为函数的**值域**. 函数定义中变量 y 与变量 x 的对应法则 $y=f(x)$ 称为**函数关系**.

(2) 对于用代数式表示的函数,当不考虑函数中的变量所表示的实际意义时,我们约定函数的定义域是使算式有意义的自变量能取到的所有数值所组成的数集,也称其为函数的自然定义域.

例 1.1.3 确定函数 $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}-\lg(5-x)$ 的定义域.

解 为使函数有意义,应有

$$x-1\geqslant 0,\quad x-2\neq 0,\quad 5-x>0,$$

所以函数的定义域 $D=[1,2)\cup(2,5)$.

(3) 构成函数的要素是:定义域 D 和函数关系 $y=f(x)$. 如果两个函数的定义域相同,函数关系也相同,那么它们是相同的函数.

例如函数 $A=\pi r^2,r>0$ 和 $y=\pi x^2,x>0$ 是相同的函数.

再如函数 $y=\lg x^2$ 和 $y=2\lg x$,显然当 $x>0$ 时 $\lg x^2=2\lg x$,但是由于它们的定义域分别是

$$D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty),\quad D_2=(0,+\infty),$$

$D_1\neq D_2$,所以二者不是相同函数.

(4) 函数的定义强调了函数值的唯一性,即自变量每取一个值,对应的函数值是唯一的. 相反,对于一个函数值,所对应的自变量的值可能不唯一.

设函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 W. 若对 $\forall y\in W$,相应的自变量 x 的值是唯一

的,则称 x 与 y 是**一一对应**的.

例如,函数 $y=x^2$(图 1.3(a))中 x 与 y 不是一一对应的,而函数 $y=x^3$(图 1.3(b))中 x 与 y 是一一对应的.

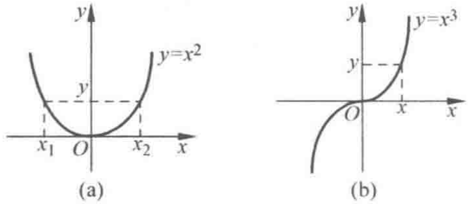

图 1.3

最后说一下关于函数的记号. 如果在同一场合出现多个函数,常用不同的字母来区别它们. 如函数 $y=g(x)$,$y=F(x)$,$y=\varphi(x)$等. 有时还直接用表示因变量的字母将函数写成 $y=y(x)$.

2. 函数的图形

表示函数的方法很多,如表格法、图形法、公式法,其中图形法更便于直观地了解函数.

设函数 $y=f(x)$,$x\in D$. 对 $\forall x\in D$,对应的函数值为 $y=f(x)$,以 x 为横坐标,y 为纵坐标,就得 xOy 平面上的一个点(x,y),称 xOy 平面上的平面点集

$$C=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

为函数 $y=f(x)$的**图形**(图 1.4).

一般地,函数 $y=f(x)$的图形是 xOy 平面上的一段曲线.

例 1.1.4 (1) 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$(图 1.5).

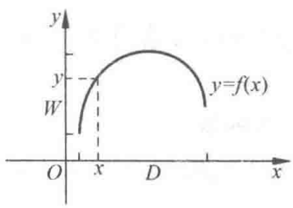

图 1.4

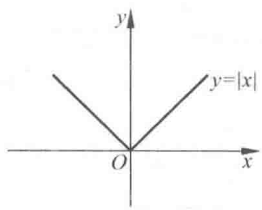

图 1.5

(2) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0.\end{cases}$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$（图 1.6）.

(3)“最大整数部分”函数

$$y=[x].$$

规定 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数，比如：当 $x=3.6$ 时，$[x]=3$；当 $x=-3.6$ 时，$[x]=-4$ 等. 函数 $y=[x]$ 的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$（图 1.7）.

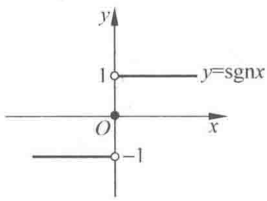

图 1.6

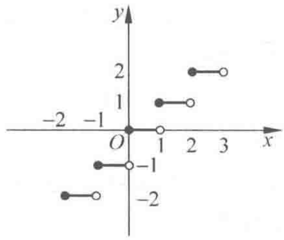

图 1.7

本例中出现的这种类型的函数称为**分段函数**. 要注意，分段函数是用多个式子表示的一个函数，而不是多个函数.

1.1.3 函数的基本性质

下面列出函数的几个基本性质，具有这些性质的函数图形有明显的几何特征.

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果存在 K_1，使得对 $\forall x\in D$，都有

$$f(x)\leqslant K_1,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的上界.

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果存在 K_2，使得对 $\forall x\in D$，都有

$$f(x)\geqslant K_2,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 D 上的下界.

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$. 如果存在正数 M，使得对 $\forall x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**，否则称函数 $f(x)$ 在 D 上无界.

例如，函数 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内来说，数 1 是它的一个上界，数 -1 是它的一个下界（当然，大于 1 的任何数也是它的上界，小于 -1 的任何数也是它的下界），又

$$|\sin x|\leqslant 1$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

对$\forall x\in(-\infty,+\infty)$都成立,故 $f(x)=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的.

用逻辑符号"$\exists$"(Exist 首字母的变形)表示"存在"、"有一个",用符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价"、"充分必要". 上述定义可以简写成:

函数在 D 上有界$\Leftrightarrow\exists M>0$,使得对$\forall x\in D$,都有$|f(x)|\leqslant M$.

应当注意,任何定义本身都是充分必要条件.

定义中的$|f(x)|\leqslant M$,就是$-M\leqslant f(x)\leqslant M$. 当函数 $f(x)$在 D 上有界时,函数的图形介于两条水平直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间(图 1.8).

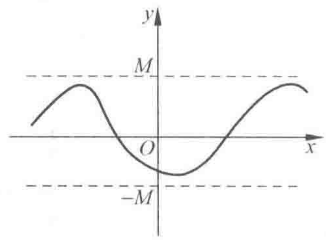

图 1.8

如函数 $f(x)=x^2$,在区间$(-\infty,+\infty)$上无界,而在区间$[0,1]$上有界.

可见,函数 $f(x)$的有界性不仅与函数的表达式有关,还与所讨论的数集 D 有关.

容易证明,函数 $f(x)$在 D 上有界的充分必要条件是 $f(x)$在 D 上既有上界又有下界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$,$x\in D$,区间 $I\subset D$. 如果$\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**(或**单调减少**)的.

例如 $f(x)=\sin x$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上是单调增加的,在$\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$上是单调减少的(图 1-20(a)).

单调增加或单调减少的函数统称为**单调函数**,I 称为**单调区间**(图 1.9 与图 1.10). 单调增加函数的图形是沿 x 轴正向上升的,单调减少函数的图形是沿 x 轴正向下降的.

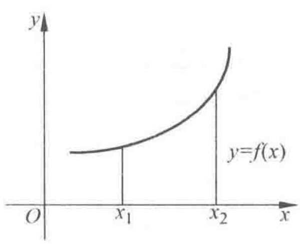

图 1.9

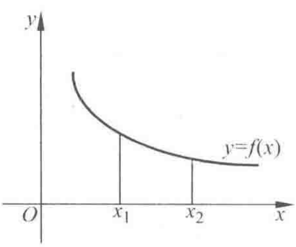

图 1.10

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$,$x\in D$,D 关于原点对称. 如果$\forall x\in D$,都有

$$f(-x)=f(x)\quad(\text{或 } f(-x)=-f(x)),$$

则称 $f(x)$为**偶函数**(或**奇函数**)(图 1.11).

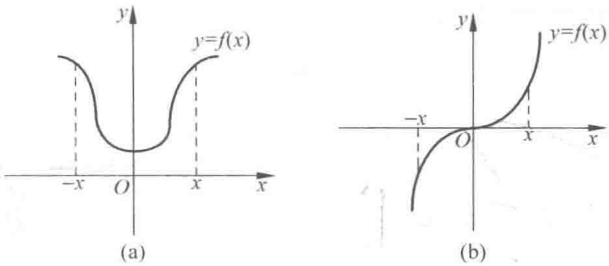

图　1.11

偶函数的图形关于 y 轴是对称的，奇函数的图形关于原点是对称的．例如，$y=x^2$ 是偶函数，$y=x^3$ 是奇函数，而 $y=x^2+x^3$ 既不是奇函数，又不是偶函数．

例 1.1.5　证明 $f(x)=x\sqrt{1+x^2}$ 是奇函数．

证明　函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$ 关于原点对称．由于对 $\forall x\in D$，

$$f(-x)=(-x)\sqrt{1+(-x)^2}=-x\sqrt{1+x^2}=-f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数．　□

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$，$x\in D$，如果 $\exists T>0$，使得 $\forall x\in D$，都有 $x+T\in D$，并且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 是**周期函数**，并称使 $f(x+T)=f(x)$ 成立的最小正数 T（若存在）为 $f(x)$ 的**周期**（图 1.12）．

周期函数的图形在每个长度为 T 的区间上形状是相同的．如函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数，而 $y=\tan x$，$y=\cot x$ 都是以 π 为周期的函数．

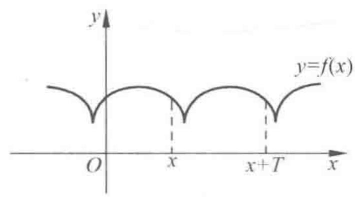

图　1.12

1.1.4　复合函数与反函数

1. 复合函数

设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 是 x 的函数，$u=\varphi(x)$．如果当 x 在某数集上取值时，相应的 $u=\varphi(x)$ 可使 $y=f(u)$ 有定义，那么就得到一个以 x 为自变量，经过变量 u，而以 y 为因变量的函数．称之为由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 u 被称为**中间变量**．

复合函数就是由中间变量的代入而得到的函数．复合函数可能由两个函数构成，也可能由多个函数构成．如函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 构成的，其中 u 是中间变

量，而函数 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 构成的，其中 u 和 v 是两个中间变量.

2. 反函数

设有函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 W. 如果在 $y=f(x)$ 中 x 与 y 是一一对应的，那么 $\forall\, y\in W$，就有唯一的 $x\in D$ 使得 $f(x)=y$. 这样就得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$.

习惯上，用 x 表示自变量，y 表示因变量，而把 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 位置互换，将 $y=f(x)$ 的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$. 以后如果不作特殊说明，我们说 $y=f(x)$ 的反函数是指 $y=f^{-1}(x)$. 显然，$y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域为 W，值域为 D. 例如，$y=x^3$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x}$（图 1.13）. 再如，$y=a^x$ 的反函数为 $y=\log_a x$（图 1.14）.

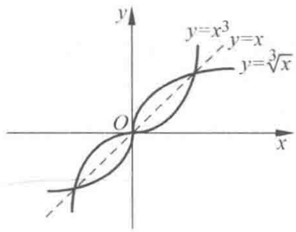

图 1.13

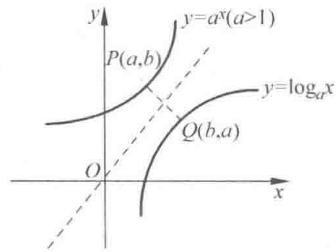

图 1.14

如果把 $y=f(x)$ 及其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一坐标平面上，那么它们关于直线 $y=x$ 是对称的. 这是因为，如果点 $P(a,b)$ 在 $y=f(x)$ 的图形上，则点 $Q(b,a)$ 一定在 $y=f^{-1}(x)$ 的图形上，而点 $P(a,b)$ 与点 $Q(b,a)$ 关于直线 $y=x$ 是对称的.

并非任何一个函数都有反函数，比如 $y=x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$. 由于此函数中 x 与 y 不是一一对应的，因此，该函数无反函数.

根据函数单调性的定义，单调函数 $y=f(x)$ 中 x 与 y 必是一一对应的，由此可得反函数存在定理.

定理 1.1.1（反函数存在定理） 单调函数必有反函数.

1.1.5 初等函数

把常函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数、反三角函数统称为**基本初等函数**.

1. 常函数

形如 $y=c$（c 为常数），$x\in(-\infty,+)$（图 1.15）的函数，称为常函数.

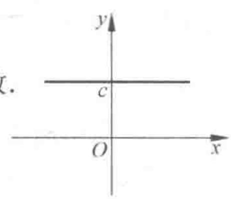

图 1.15

2. 指数函数

形如 $y=a^x$（a 是常数，$a>0$，$a\neq1$），$x\in(-\infty,+\infty)$（图 1.16）的函数，称为指数函数. 特别地，当 $a=\mathrm{e}$ 时（$\mathrm{e}=2.718218\cdots$ 是一个无理数），

$y=e^x$ 是常用的一个指数函数.

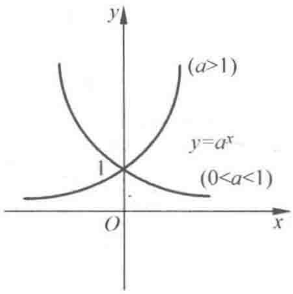

图 1.16

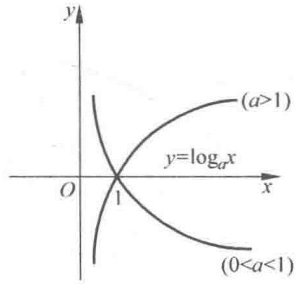

图 1.17

3. 对数函数

形如 $y=\log_a x$(a 是常数,$a>0$,$a\neq1$),$x\in(0,+\infty)$(图 1.17)的函数,称为对数函数. $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数. 特别地,当 $a=e$ 时,称 $y=\log_e x$ 为自然对数,记为 $\ln x$.

4. 幂函数

形如 $y=x^\mu$(μ 为常数,$\mu\neq0$)的函数,称为幂函数.

以下几个幂函数经常用到:

$$y=x^2,y=\sqrt{x}(\text{图 } 1.18),\quad y=x^3,y=\sqrt[3]{x},y=\frac{1}{x}(\text{图 } 1.19).$$

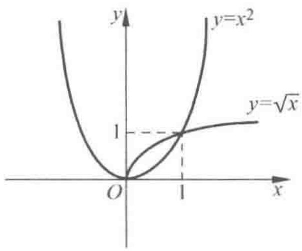

图 1.18

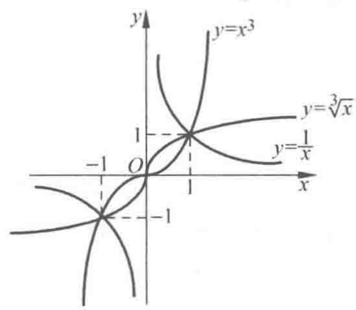

图 1.19

幂函数 $y=x^\mu$ 的定义域和值域要由 μ 的值来确定. 但不论 μ 为何值,$y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内都有定义. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时,由于 $\ln x^\mu=\mu\ln x$,有 $y=x^\mu=e^{\mu\ln x}$.

5. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$,$x\in(-\infty,+\infty)$(图 1.20(a)).

余弦函数 $y=\cos x$,$x\in(-\infty,+\infty)$(图 1.20(b)).

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$,$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 为整数)(图 1.21(a)).

余切函数　$y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}, x\neq k\pi$($k$ 为整数)(图 1.21(b)).

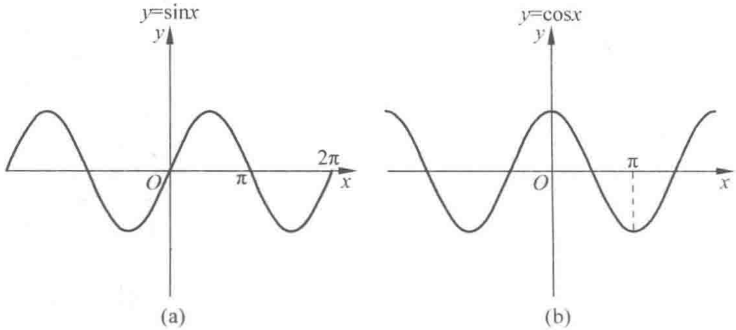

图　1.20

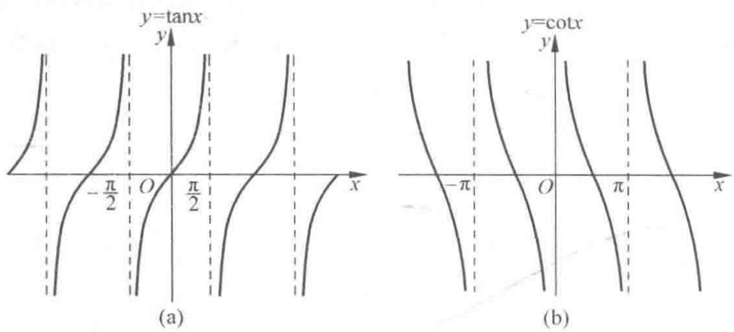

图　1.21

正割函数　$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$($k$ 为整数)(图 1.22).

余割函数　$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}, x\neq k\pi$($k$ 为整数)(图 1.23).

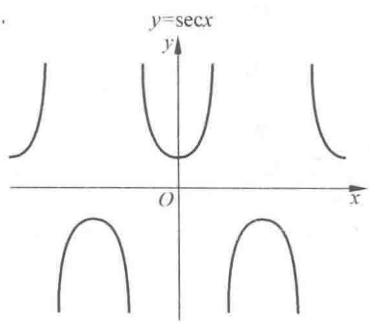

图　1.22

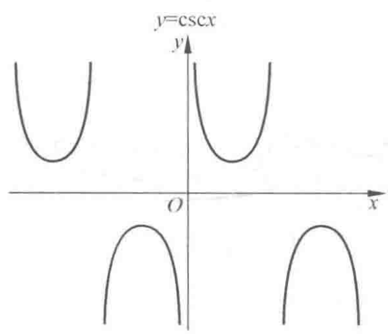

图　1.23

6. 反三角函数

反正弦函数 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$. 它是 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$的反函数(图 1.24).

反余弦函数 $y=\arccos x, x\in[-1,1]$. 它是 $y=\cos x, x\in[0,\pi]$的反函数(图 1.25).

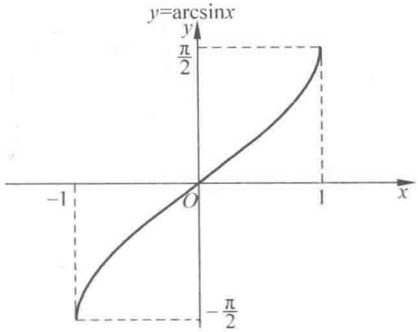

图 1.24

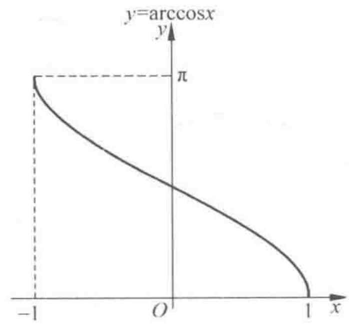

图 1.25

反正切函数 $y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty)$. 它是 $y=\tan x, x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$的反函数(图 1.26).

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty)$. 它是 $y=\cot x, x\in(0,\pi)$的反函数(图 1.27).

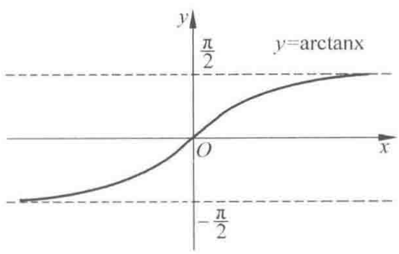

图 1.26

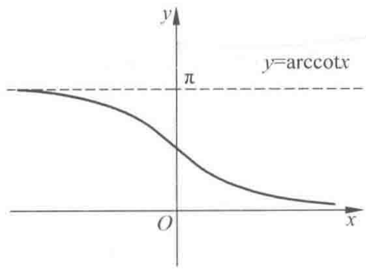

图 1.27

把由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合而得到的并且可以用一个式子表示的函数称为**初等函数**.

例如 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^2 x$, $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 等都是初等函数. 本课程中所讨论的大多数函数都是初等函数.

工程中常用到由 $y=e^x$, $y=e^{-x}$ 所产生的双曲函数,它们是:

双曲正弦函数 $y=\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}), x\in(-\infty,+\infty)$(图 1.28).

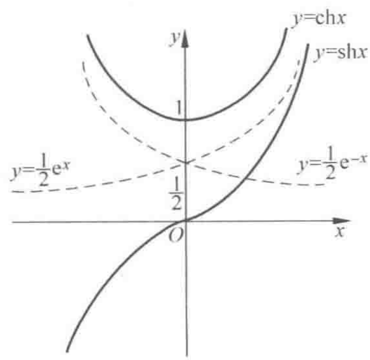

图 1.28

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com