普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等代数
解题方法与技巧

武同锁　林　鹄　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”重点规划教材配套辅导

国家工科数学教学基地　国家级精品课程使用教材配套辅导

Nucleus

新核心

理工基础教材

高等代数解题方法与技巧

武同锁　林　鹄　编著

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共6章，主要包括矢量代数与解析几何，一元多项式与行列式，矩阵及其在线性方程组和二次型理论中的应用，线性空间与线性变换，双线性函数与二次型，域上多元多项式环等内容．本书通过解答典型例题，阐释基本理论、思维方式和解题技巧；特别强调代数和几何的结合，强调各个知识点之间的联系和整合．在强调思想方法的同时，也重视技巧的训练，将思维与方法渗入到例题与习题中，使读者在学习高等代数知识的同时，掌握高等代数的思维方法，提高运用综合知识解决问题的能力和技巧．

本书适合理工科本科生使用，也适合有较好基础的数学爱好者．

图书在版编目(CIP)数据

高等代数解题方法与技巧／武同锁，林鹄编著．
—上海：上海交通大学出版社，2016
ISBN 978-7-313-14161-3

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①武…　②林…　Ⅲ．①高等代数—高等学校—题解　Ⅳ．①O15-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第287712号

高等代数解题方法与技巧

编　　著：武同锁　林　鹄
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路951号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：韩建民
印　　制：上海颛辉印刷厂　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×960 mm　1/16　　印　　张：18.75
字　　数：331千字
版　　次：2016年5月第1版　　印　　次：2016年5月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-14161-3/O
定　　价：46.00元

前　言

学习高等代数的过程大体上可以分为两个阶段：第一个阶段，常见于一个51学时的工科线性代数教程，其核心在于理解概念(向量组的秩和矩阵的秩，矩阵的等价、相似与合同，等等)，重点是计算(解方程组、求逆矩阵、计算行列式，用相似对角化方法求部分矩阵的矩阵多项式、用Cayley-Hamilton定理求一般矩阵的矩阵多项式，以及化二次型为标准型(亦即实对称矩阵的正交相似对角化)等)，掌握Gauss消元法的各种应用，逐步掌握一些基本的矩阵技巧(包括矩阵分块技巧). 第二个阶段，在第一阶段扎实的基础上，学习和深刻理解线性空间(包括内积空间)、线性变换(包括正交变换)、Jordan标准型理论，以及学习和了解一元和多元多项式的基本理论和技巧.

对于工科学生来说，由于课时限制，通常没有机会进入第二阶段的学习. 另一方面，对于学时相对较多的学生(例如数学系和交大致远学院的学生)来说，由于高等代数的体系庞大，且高等代数第二阶段的内容具有相当的抽象性以及“不接地气”(相对于高等数学和数学分析来说)，他们往往在学习过程中也会有很多困惑和疑虑. 编写本书的目的，就是针对这两种现象，为学生们进一步学习、复习和提高提供一些素材，也提供一些思考的方法和技巧. 在本书中，我们尝试强调代数和几何的结合，强调各个知识点之间的联系和整合(例如，强调Gauss消元法在第一阶段的几乎所有计算中的类似应用；强调正定矩阵和实空间内积的本质联系；强调矩阵和线性变换的本质联系；强调正交矩阵与正交线性变换、标准正交基、欧式空间的内积的本质联系，等等)；我们在强调思想方法的同时，也重视技巧的训练. 这些想法已被渗透到书中各个具体的例子中，希望读者通过这些具体例子，在技巧上得到进一步的训练和提高，在思想方法上有所升华.

本书是在编者十余年来为上海交通大学致远学院、数学系和其他学院本科生讲课所积累素材的基础上编写的，为此要感谢历届听课的同学，他(她)们的热情和追求经常使得教学过程成为一种享受；他们的独立思考和提问，不时闪现智慧的火花，促成教学相长的实现，同时也直接或间接地促成了本书中的一些想法或例题的产生. 本书第二作者主要负责前三章的部分编写工作，完成了全部校稿. 本书的编写还得到了上海交大数学系和上海交大出版社的大力支持和帮助，编者就此机会表示感谢.

本书作者尽力使内容准确可靠. 欢迎读者提出宝贵的建议，或指出书中的错误与不妥，有关问题可发电子邮件至 tswu@sjtu. edu. cn

编者

2016 年 1 月

常 用 符 号

$=:$或$\triangleq$：定义，或记为；

C_n^i 或$\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}$：从给定的 n 个元素中任取 i 个元素的取法(组合数)；

$\deg f(x)$：多项式 $f(x)$的次数；

$\mathbf{A}(i)$：矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 列；

$(i)\mathbf{A}$：矩阵 $\mathbf{A}$ 的第 i 行；

$|\mathbf{A}|$或 $\det(\mathbf{A})$：方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式；

$\mathbf{A}^*$：方阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，其(i, j)位置元为 a_{ji} 在 $\mathbf{A}$ 中的代数余子式 A_{ji}；

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$：矩阵 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵；

$\overline{\mathbf{A}}$：矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的共轭 $\overline{\mathbf{A}}=:(\overline{a_{ij}})_{n\times n}$；

$\mathbf{A}^\star$：$\overline{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}$；

$\boldsymbol{\sigma}^\star$：内积空间 $\mathbf{V}$ 上线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的共轭线性变换，满足

$$[\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\beta}]=[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}^\star(\boldsymbol{\beta})], \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in \mathbf{V};$$

$\mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$：对角矩阵；

$\mathrm{diag}\{\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n\}$：分块对角矩阵；

$GL_n(\mathbf{F})$：数域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶可逆矩阵全体；

$M_n(\mathbf{F})$或 $\mathbf{F}^{n\times n}$：数域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶矩阵全体；

$O_n(\mathbf{F})$：数域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶正交矩阵全体；

$U_n(\mathbf{F})$：数域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶酉矩阵全体；

$\mathbf{F}^{n\times 1}$或 $\mathbf{F}^n$：数域 $\mathbf{F}$ 上 n 维列向量全体；

$\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_u \overset{l}{\Rightarrow} \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_v$：每个向量 $i=1, \cdots, v$, $\boldsymbol{\beta}_i$ 都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_u$ 线性表出；

$\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\lambda}$ 或 $\mathbf{V}_{\lambda}^{\mathbf{A}}$：方阵 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间，$\mathbf{V}_{\mathbf{A}}^{\lambda}=:\{\boldsymbol{\alpha}\mid \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}\}$(简记为 $\mathbf{V}_{\lambda}$)；

$\dim({}_{\mathbf{F}}\mathbf{V})$：数域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 $\mathbf{V}$ 的维数；

$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩；

$im(\boldsymbol{\sigma})$或 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{V})$：线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的像子空间；

$ker(\boldsymbol{\sigma})$：线性空间 $\boldsymbol{V}$ 上线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的核子空间：

$$ker(\boldsymbol{\sigma}) =: \{\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\alpha}) = 0_V\}$$

$\boldsymbol{\beta} \perp \boldsymbol{W}$：欧氏空间中的向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与子空间 $\boldsymbol{W}$ 中所有向量正交；

$\mathrm{r}(\boldsymbol{\sigma})$：线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的秩，亦即 $\dim({}_{\mathbf{F}}im(\boldsymbol{\sigma}))$；

$N\deg(\boldsymbol{\sigma})$：线性变换 $\boldsymbol{\sigma}$ 的零化度(null degree)，亦即 $\dim({}_{\mathbf{F}}ker(\boldsymbol{\sigma}))$；

$\mathrm{r}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t\}$：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_t$ 的秩；

$\boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{V}$：线性空间 $\boldsymbol{U}$ 与 $\boldsymbol{V}$ 的直和.

目　　录

1　矢量代数与解析几何

1.1　主要概念与公式

1.1.1　矢量代数

1. 点积(内积)

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos(\theta)$,其中,$\theta$ 为两矢量的夹角.约定 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 的长度乘以矢量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上投影矢量的代数长.

2. 叉积

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\sin(\theta)\cdot\boldsymbol{d}$,其中,$\theta$ 为两矢量的夹角,$|\boldsymbol{d}|=1$, $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}\perp\boldsymbol{b}$,且三个矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ 构成右手系.注意叉积具有如下的反交换性:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

在右手直角坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$下,若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的分量分别是(x_1, y_1, z_1)与(x_2, y_2, z_2),则有如下计算叉积的(行列式)公式:

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}.$$

3. 混合积

$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$.

混合积的绝对值是由三矢量(起点放在同一点后)所确定的平行六面体的体积.混合积具有如下的周期性:

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}].$$

在右手直角坐标系$[O,\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$之下,如果 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的分量是(x_i, y_i, z_i),则有如下计算混合积的(行列式)公式:

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}.$$

1.1.2 若干重要的标准方程

1. 直线

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v};$$

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w}.$$

其中,$\boldsymbol{v}=(u, v, w)$ 是直线的方向矢量.

2. 平面

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0,$$

或

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

其中,$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$ 是平面的法矢量,它垂直于平面上的任一矢量.

3. 柱面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$(椭圆柱面);

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$(双曲柱面);

$y^2=2px$(抛物柱面).

4. 锥面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$(二次锥面,由一条直线绕另一条相交直线旋转而得到).

5. 椭球面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

6. 单叶双曲面

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

7. 双叶双曲面

$-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

8. 抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

9. 双曲抛物面(马鞍面)

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

1.1.3 距离公式

1. 点 P_1 到直线 L: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{v}$ 的距离为

$$d=\left|(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\times\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right|.$$

2. 两条直线 L_i: $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_i+t\boldsymbol{v}_i$ 为异面直线(不相交也不平行),充要条件为 $[\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\neq 0$. 异面时,二直线的距离公式为

$$d=\frac{|[\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]|}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}=\frac{1}{|\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2|}\left|\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \end{vmatrix}\right|.$$

3. 点 P_0 到平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_0)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}.$$

1.1.4 直纹面

在所有二次曲面中,有一类曲面是由直线族生成的,称作直纹面. 柱面与锥面显然是直纹面;单叶双曲面和马鞍面也是直纹面. 值得注意的是,只有单叶双曲面上有平行(而不重合)的直线.

1.1.5 注记

可用配方法或者直角坐标变换法将二次型化为标准形(不含交叉项). 值得注意的是,配方法所对应的是仿射坐标变换;而求直角坐标变换 $X=\boldsymbol{P}Y$($\boldsymbol{P}$ 是正交矩阵)涉及求实对称矩阵的特征值、特征向量,以及 Schmidt 正交化和单位化过程. 详见第 3 章有关内容.

1.2 例题与解答

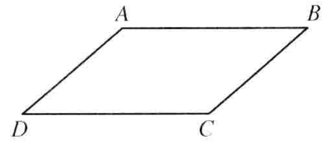

图 1－1

例 1.1 求证：平行四边形的两条对角线的交点平分两条对角线.

证明 如图 1－1 所示,考虑平行四边形$\square ABCD$：假设线段 AC, BD 的中点分别为 M, N,则有

$$\boldsymbol{DM}=\boldsymbol{DC}+\frac{1}{2}\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{DC}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{CD}+\boldsymbol{DA})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{DC}+\boldsymbol{DA})=\boldsymbol{DN},$$

因此有 $M=N$.

例 1.2 假设 A, B 为空间中不同的两点,O 为任意一点. 则：

(1) 点 C 在 A, B 确定的直线上,当且仅当存在满足 $\lambda+\mu=1$ 的实数 λ, μ,使得 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}$.

(2) 点 C 在 A, B 确定的线段上,当且仅当存在满足 $\lambda+\mu=1$, $0\leqslant\lambda\leqslant1$ 的实数 λ, μ,使得 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}$.

(3) 如果点 C 在 A, B 确定的直线上,且 $C\neq B$,则有 $\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{\mu}{\lambda}$（$(\lambda,\mu)$ 称作点 C 关于点 A, B 的重心坐标).

证明 如图 1－2 所示.

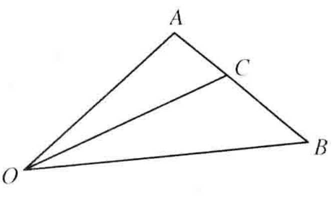

图 1－2

必要性 假设 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}$,其中 $\lambda+\mu=1$,则有

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{AO}+\boldsymbol{OC}=(\lambda-1)\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}=\mu\boldsymbol{AB}.$$

因此,C 在 A, B 确定的直线上.

充分性 假设 $\boldsymbol{AC}=k\boldsymbol{AB}$,则有

$$\boldsymbol{OC}=\boldsymbol{OA}+\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{OA}+k(\boldsymbol{OB}-\boldsymbol{OA})=(1-k)\boldsymbol{OA}+k\boldsymbol{OB}.$$

因此取 $\lambda=1-k$, $\mu=k$,则完成(1)的证明.

注意,$C\neq B\Leftrightarrow 1-k\neq0$,所以 $C\neq B$ 时,有

$$\frac{\mu}{\lambda}=\frac{k\cdot AB}{(1-k)\cdot AB}=\frac{AC}{CB}.$$

这就证明了(3).

(2)显然成立.

例 1.3 假设 A, B, C 为空间中不共线的三点,O 为任意一点. 则:

(1) 点 C 在 A, B, C 确定的平面上,当且仅当存在满足 $\lambda+\mu+\eta=1$ 的实数 λ, μ, η,使得 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}+\eta\boldsymbol{OC}$.

(2) 点 C 在 A, B, C 确定的三角形内,当且仅当存在满足 $\lambda+\mu+\eta=1$, $0\leqslant\lambda, \mu, \eta\leqslant 1$ 的实数 λ, μ, η,使得 $\boldsymbol{OC}=\lambda\boldsymbol{OA}+\mu\boldsymbol{OB}$.

证明 思路完全同于前例,可使用图 1-3. 需注意:点 D 在不共线的三点 A, B, C 确定的平面 π 上,当且仅当 $\boldsymbol{AD}$ 是矢量 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{BC}$ 的一个线性组合.

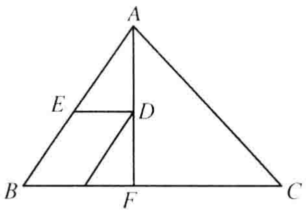

图 1-3

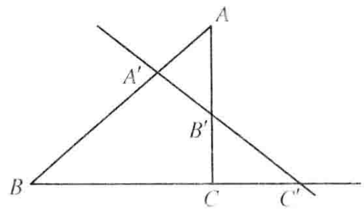

图 1-4

例 1.4 (Menelaus 定理)假设 $XY=-YX$, $\triangle ABC$ 是任意给定的三角形,而 A', B', C'分别是三条边所在直线上的三个两两互异的点(见图 1-4),则三点 A', B', C'共线,当且仅当有

$$\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'C}=-1.$$

证明 在 A, B, C 所确定的平面外任意选定一点 O. 假设以 O 为起点,以 A, B, C, A', B', C'为终点的矢量分别为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$, $\boldsymbol{c}'$,则空间中任意矢量可以表达成 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的唯一一个线性组合. 根据例 1.2 可知,存在 λ_i, μ_i,使得 $\lambda_i+\mu_i=1$, 且有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}'&=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{b}'&=\lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{c},\\ \boldsymbol{c}'&=\lambda_3\boldsymbol{b}+\mu_3\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

则有 A', B', C'三点共线$\Leftrightarrow$存在数 λ, μ 使得 $\lambda+\mu=1$, $\boldsymbol{b}'=\lambda\boldsymbol{a}'+\mu\boldsymbol{c}'\Leftrightarrow$存在数 λ, μ 使得

$$\lambda+\mu=1,\ \lambda_2\boldsymbol{a}+\mu_2\boldsymbol{c}=\lambda\lambda_1\boldsymbol{a}+(\lambda\mu_1+\mu\lambda_3)\boldsymbol{b}+\mu\mu_3\boldsymbol{c}$$

$\Leftrightarrow$存在数λ, μ使得

$$\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda\lambda_1=\lambda_2\\ \lambda\mu_1+\mu\lambda_3=0\\ \mu\mu_3=\mu_2\end{cases}, \tag{1-1}$$

注意到$\dfrac{AA'}{A'B}=\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}$等式子成立,所以有

$$\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'C}=\frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdot\frac{\mu_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\mu_3}{\lambda_3}.$$

必要性 如果A', B', C'共线,则有

$$\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'C}=\frac{\lambda\lambda_1}{\mu\mu_3}\cdot\frac{\mu_1}{\lambda_1}\cdot\frac{\mu_3}{\lambda_3}=-1.$$

充分性 假设有

$$\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AA'}{A'B}\cdot\frac{BC'}{C'C}=-1,$$

亦即有$\dfrac{\lambda_2}{\mu_2}\cdot\dfrac{\mu_1}{\lambda_1}\cdot\dfrac{\mu_3}{\lambda_3}=-1$. 此时$x=\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $y=\dfrac{\mu_2}{\mu_3}$是线性方程组

$$\begin{cases}x+y=1\\ x\lambda_1=\lambda_2\\ x\mu_1+y\lambda_3=0\\ y\mu_3=\mu_2\end{cases} \tag{1-2}$$

的一个解. 事实上,式(1-2)中的后三式显然成立. 至于第一个式子,有

$$1=\lambda_2+\mu_2=x\lambda_1+y\mu_3+(x\mu_1+y\lambda_3)=x+y.$$

因此,A', B', C'共线.

例 1.5 (余弦定理)求证:在三角形$\triangle ABC$中,有

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos(C).$$

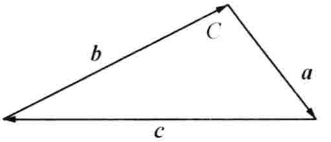

图 1-5

证明 如图 1-5 所示.

由 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$、内积的定义以及性质可得

$$\begin{aligned} c^2 &= \boldsymbol{c}^2 = (-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = a^2+b^2-2\boldsymbol{a}\cdot(-\boldsymbol{b}) \\ &= a^2+b^2-2ab\cdot\cos(C). \end{aligned}$$

例 1.6 (1) 求证：$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}-\boldsymbol{b})=0$.
(2) 利用(1)的结果求证：三角形三边上的高交于一点(垂心).

证明 (1) 利用分配律、交换律直接计算即得.
(2) 如图 1-6 所示.
在空间中任取一点 O,并记 $\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{a}$ 等，由于

$$\boldsymbol{MB}\cdot\boldsymbol{AC}=0,\ \boldsymbol{CB}\cdot\boldsymbol{AM}=0,$$

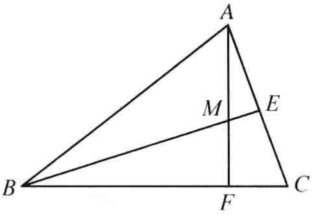

图 1-6

所以有

$$(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{a})=0.$$

由(1)立即得到 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{c})=0$,亦即 $\boldsymbol{BA}\cdot\boldsymbol{CM}=0$,从而 $\boldsymbol{BA}\perp\boldsymbol{CM}$.

例 1.7 (正弦定理)求证：在三角形$\triangle ABC$ 中,有

$$\frac{a}{\sin(A)}=\frac{b}{\sin(B)}=\frac{c}{\sin(C)}.$$

证明 如图 1-7 所示. $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,
所以,$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}=(-\boldsymbol{c})\times(-\boldsymbol{b})$.
对于上述三个向量取长度得到

$$ac\cdot\sin(B)=ab\cdot\sin(C)=bc\cdot\sin(A),$$

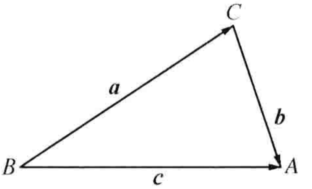

图 1-7

除以 abc 即得正弦定理.

例 1.8 以平行四边形的对角线为相邻两边得到的新平行四边形,其面积是原平行四边形面积的两倍.

证明 如果原平行四边形的相邻两边的矢量为 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$,则平行四边形的面积为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\cdot\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

而新四边形的相邻两边的矢量为 $\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}$, 所以新平行四边形的面积为

$$|(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})|=2|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|.$$

例 1.9 (1) 验证：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2$.

(2) 使用(1)的等式验证 Heron 公式：

$$T^2=s(s-a)(s-b)(s-c),$$

其中，T 是三角形的面积；s 是三角形周长的一半；而 a, b, c 分别是三边的长度.

证明 (1) $\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\cdot\boldsymbol{b}^2\cdot(1-\cos^2((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})))$

$$=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2\cdot\sin^2((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2.$$

(2) 可设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, 则有 $c^2=\boldsymbol{c}\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=a^2+b^2-2\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$, 因此有

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2).$$

按照外积的定义和(1)中的等式有

$$\begin{aligned}4T^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2&=a^2b^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2\\&=\frac{1}{4}[2ab+a^2+b^2-c^2][2ab-a^2-b^2+c^2]\\&=\frac{1}{4}[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]\\&=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b).\end{aligned}$$

因此有

$$T^2=s(s-c)(s-b)(s-a).$$

例 1.10 对于不共面的矢量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$，定义其混合积为 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$，并记之为 $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$，建立仿射坐标系$(O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$. 求证：

(1) 当$(O,\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$依先后次序构成右手系时，$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]>0$，且它是这三个向量所确定的平行六面体的体积；而当 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 依先后次序构成左手系时，混合积$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]<0$.

(2) $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=[\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=-[\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}]$. 特别的，如果 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 中有二者平行，则$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

(3) 如果 $\boldsymbol{a}_i=x_{i1}\boldsymbol{e}_1+x_{i2}\boldsymbol{e}_2+x_{i3}\boldsymbol{e}_3$，则有

$$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3]=\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{vmatrix}\cdot[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3].$$