經濟學名著翻譯叢書第一六七種

數理經濟學基本論

(下冊)

Alpha C. Chiang 著

鍾資梓 譯

臺灣銀行經濟研究室編印

數理經濟學基本論

Fundamental Methods of Mathematical Economics

Alpha C. Chiang 著

鍾 寶 梅 譯

經濟學名著翻譯叢書第一六七種

數理經濟學基本論（下册）

中華民國七十四年二月出版

原著者 Alpha C. Chiang

翻譯者 鍾　寶　梅

編印者 臺灣銀行經濟研究室
臺北市重慶南路

發行者 臺　灣　銀　行
臺北市重慶南路

經售者 中央文物供應社
臺北市重慶南路一段一〇六號

中　華　書　局
臺北市重慶南路一段九十四號

印刷者 臺灣省政府印刷廠
臺中縣大里鄉中興路

第五部分　動態分析

第十三章　動態經濟學與微積分

「動態」(dynamics) 一詞，運用於經濟分析上，不同的經濟學家作不同的解釋。包爾模 (Baumol) 教授，于其「動態經濟學」(Economic Dynamics) 一書①，曾討論多種型態的動態分析，而每一種皆有不同的涵意。又， Machlup 教授于一篇關于語義學之有趣的文章中②，曾列舉一系列此一詞所含各種不同的意義，其中毫不留情地指出一項顯示人性的說法：「基本上，『靜態』係指他人所寫的較低劣；而『動態』則指自己的，較高一等的理論。

然而，近年來，動態一詞幾已有一項特殊的用法；目前其指一種特定的分析方法，旨在研討變數之特定時間過程或過一段相當的時間後，用以決定是否這些變數趨于收斂至某（均衡）數值。此項探討是極重要的，因其填補了我們研究靜態與比較靜態間之一道鴻溝。于比較靜態分析中，我們一逕假定經濟調整過程中，最後必達于均衡。于動態分析，我們正視「均衡可達性」問題，而非任意作假設。

動態分析之一項重要特質在于變數之具日期 (dating)，即將時間因素考慮在內。惟此可有兩種處理方式：時間可視爲連續的變數或分離的 (discrete) 變數。于前一種情況，指變數在任何時點皆有其變化（如，連續複利）；至于後者，係指變數唯在一段期間內方有所變化（如，每6個月末計算利息一次）。于某些研討領域中，往往唯有其中之一個時間觀念較適當，惟正如前已描述，當分離的時期變得愈來愈短時，連續的情況通常可視爲分離情況的極限。

我們將首先討論連續時間的情況，此乃適用微積分與微分方程之數學技巧。然後，于第16與17章中，我們轉向討論分離時間之情

況，乃利用差分方程之方法。

13.1 動態與積分

于一靜態模型中，一般而言，旨在尋求滿足某些特定均衡條件之內生變數值。運用于最適化問題中，則爲求令特定標的函數達於極大化（或極小化）之選擇變數值——以一次條件爲均衡條件，假定二次條件得以滿足的話。而于動態模型中，則爲某變數基於已知的變動型態（如，已知瞬間變動率），其間經歷時間過程之描述。

舉一實例以說明之。假設人口數H隨時間之變動率爲

$$\frac{dH}{dt}=t^{-1/2} \tag{13.1}$$

則問題爲：對應于（13.1）式之人口數 $H=H(t)$ 之時間過程爲何呢？即，函數 $H(t)$ 之特定形式應爲何，以使人口數 H 隨著時間 t 之變動率如（13.1）式所設定者？

讀者已知：若知函數 $H=H(t)$ 之形式，則可依微分法求其導來式 dH/dt 。但是目前的問題反之：我們欲由已知之導來函數求出原始（primitive）函數。在數學上，我們須運用與微分，或微分學完全相反之方法。

其有關的方法即稱積分（integration）或積分學（integral calculus），將于下探討之。暫時我們先觀察函數 $H(t)=2t^{1/2}$ ，其導來式形式確如（13.1）式所示，故顯然可爲該問題之解。麻煩的是，尚有相似函數，如 $H(t)=2t^{1/2}+15$ 或 $H(t)=2t^{1/2}+99$，或更一般化的

$$H(t)=2t^{1/2}+c \text{（}c=\text{任何常數）} \tag{13.2}$$

皆具如（13.1）式之導來式。因而，除非可由其他方式確定常數 c 值，我們無法決定唯一的時間過程。欲達此目的，需有進一步關于模型之資料，即通常所稱之起始條件（initial condition）或界限條件（boundary condition）。

若已知起始人口數 $H(0)$——即，H 于 $t=0$ 時之值，如 $H(0)=100$——則可決定上述 c 值。令 (13.2) 式中之 $t=0$，可

$$H(0)=2(0)^{1/2}+c=c$$

得惟若 $H(0)=100$，則 $c=100$，且 (13.2) 式變爲

$$H(t)=2t^{1/2}+100 \tag{13.2'}$$

其常數不爲任意的。以一般式表之，對任何已知起始人口數 $H(0)$ 而言，其時間過程爲

$$H(t)=2t^{1/2}+H(0) \tag{13.2''}$$

是故，于本例中，于任何時點之人口數 H 將爲起始人口數 $H(0)$ 與另一項含時間變數 t 者之和。此一時間過程確實描繪出變數 H 隨著時間之變動過程，故其亦爲此動態模型之解。〔(13.1) 式亦爲 t 之函數，爲何不能亦視之爲一解？〕

以上所學人口例子雖然極其簡單，却是能彰顯經濟動態問題之精義。已知變數隨著時間之變動行爲，則我們可求出描繪變數時間過程之函數。其間會有一個或更多個任意常數出現，惟若已知充分之起始條件，則可確定這些任意常數值。

如上引用較簡單的問題中，其解可利用積分法求之，乃處理由已知導來函數求出原始函數之方法。于較爲複雜的情況，亦可採用極其密切相關的數學技巧，即微分方程 (differential equations) 法。因微分方程式之定義爲任何含微分式或導來式之方程式俱屬之，(13.1) 式當然即爲其一；因此之故，于求解之時，事實上我們已解得一微分方程式，雖然其爲相當簡單之一例。

現在繼續研討積分學之基本概念。我們既已討論微分時係以 x（而非 t）爲自變數，爲對稱起見，此處亦用 x。然而，于目前討論中，爲達于簡便之目的，分別以 $F(x)$ 與 $f(x)$ 代表原始與導來函數，而非利用分號以作兩者之區別。

13.2　不定積分

積分之本質 前已提及，積分恰與微分過程相反。若由微分一起始函數 $F(x)$ 可得導來式 $f(x)$，則對 $f(x)$ 積分後可得 $F(x)$，如果事先已知積分過程中之任意常數值。稱函數 $F(x)$ 爲函數 $f(x)$ 之一積分式 (integral)（或反導來式 antiderivative）。此兩類過程因而可比擬爲研究一家族之兩種方式：積分即像探求函數 $f(x)$ 之出身來歷般，至于微分則若尋找函數 $F(x)$ 之子嗣般。惟注意其間的差異：由（可微分的）起始函數 $F(x)$ 僅可產生唯一的後代，即，獨一無二的導來式 $f(x)$，而導來函數 $f(x)$ 則可透過積分，探尋到無數個可能的父母般，因爲若 $F(x)$ 爲 $f(x)$ 之一積分式，則正若于 (13.2) 式所示，所有 $F(x)$ 加上任一常數皆然。

我們需介紹某特定符號以表示 $f(x)$ 關于 x 之積分。最標準式爲

$$\int f(x)dx$$

最左端符號——如將英文字母 S 拉長者（爲一加總符號，將于下述說明之）——稱爲積分符號 (integral sign)，至于 $f(x)$ 則稱積分因子 (integrand)（應被積分之函數），而 dx 部分——類似微分運算符號 d/dx 中之 dx——告訴我們，係對變數 x 進行運算。然而，讀者亦可視 $f(x)dx$ 爲一整體，并解釋其爲原始函數 $F(x)$之微分式。〔即，$dF(x)=f(x)\ dx$〕。那麼，置于前端之積分符號乃可視爲與產生微分式之微分過程相反之指示。以此一新符號，我們可寫爲

$$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \Rightarrow \int f(x)dx=F(x)+c \quad (13.3)$$

式中之 c，係任意積分常數 (constant of integration)，正可說明積分因子之多重來源。

更明確而言，積分式$\int f(x)dx$ 乃稱爲 $f(x)$之不定積分式 (indefinite integral)〔與下節將討論的定積分 (definite integral)

相對〕，因其不爲確定的數值。既等于 $F(x)+c$ ，其值一般而言隨著 x 值變（即若 c 值已確定）。故，正若一導來式，不定積分本身爲變數 x 之一函數。

積分之基本法則　正若有一套導來式法則，我們亦可導出一些積分原則。而且，或許是可揣測的是，後者與我們已熟稔的導來式法則密切相關。由以下指數函數之導來式公式。

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n \quad (n\neq-1)$$

例如，我們由上式知 $x^{n+1}/(n+1)$ 爲導來函數 x^n 之原始函數；故，以 (13.3) 式中之 $F(x)$ 與 $f(x)$ 代入，可將之視爲一積分法則。

（法則 I）　（指數法則）$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c \quad (n\neq-1)$

（例 1）　試求 $\int x^3dx$ 此處之 $n=3$ ，因此

$$\int x^3dx=\frac{1}{4}x^4+c$$

（例 2）　試求 $\int x\,dx$ 因 $n=1$ ，而得

$$\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2+c$$

（例 3）　$\int 1\,dx$ 值爲何？欲求此積分式，須由 $x^0=1$ ，故可令指數法則中之 $n=0$ ，可得

$$\int 1\,dx=x+c$$

〔有時 $\int 1\,dx$ 只簡單寫爲 $\int dx$，因 $1dx=dx$〕

（例 4） 試求$\int\sqrt{x^3}dx$ 。因 $\sqrt{x}^3=x^{3/2}$，而得 $n={}^3/_2$；因之，

$$\int\sqrt{x^3}dx=\frac{x^{5/2}}{5/2}+c=\tfrac{2}{5}\sqrt{x^5}+c$$

（例 5） 試求$\int\frac{1}{x^4}dx$。因 $1/x^4=x^{-4}$，而得 $n=-4$ 。故積分式爲

$$\int\frac{1}{x^4}dx=\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+c=-\frac{1}{3x^3}+c$$

讀者應注意，積分結果的正確性皆可以微分加以驗證；若積分是正確的，則積分式之導來式必等于積分因子。已知簡單的指數與對數函數之導來式公式如下

$$\frac{d}{dx}e^x=e^x \quad 與 \quad \frac{d}{dx}\ln\ x=\frac{1}{x} \quad (x>0)$$

由此，可得其他兩項基本積分法則。

（法則Ⅱ） （指數法則）$\int e^x dx=e^x+c$

（法則Ⅲ） （對數法則）$\int\frac{1}{x}dx=\ln\ x+c\ \ (x>0)$

有趣的是，于法則Ⅲ中之積分因子爲 $1/x=x^{-1}$ ，其爲指數函數 x^n 中 $n=-1$ 之一特殊形式。此一特別的積分因子于指數法則下是不能成立的，而于此處以對數法則處理之。

如上述，對數法則係于 $x>0$ 之限制條件下方能成立，因對不爲正數之 x 值而言，其對數不存在。將此一法則以較一般化形式表示，即可以處理負的 x 值時，則爲

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+c \quad (x\neq 0)$$

其亦涵指 $(d/dx)\ln|x|=1/x$ ，與 $(d/dx)\ln x=1/x$ 相同。

讀者應知以 $|x|$（其限制條件爲 $x \neq 0$）取代 x（其限制條件爲 $x > 0$）與上述公式幷未衝突。

又，關于符號表示方面，有時亦可以將 $\int \frac{1}{x} dx$ 寫爲 $\int \frac{dx}{x}$。

運算法則　上述三法則已足以闡釋所有積分法則之本質。每項法則皆對應某一微分公式。又，最末總是要加上一常數（即使後來可利用起始條件消去之）以表示有一整系列的原始函數可得某種形式之積分因子。

然而，爲處理更複雜的積分因子，以下兩個關于積分式的運算法則亦很有用。

（法則Ⅳ）　（總和之積分）　有限個函數和之積分式爲這些函數個別積分之和。擧兩函數之情況爲例，即

$$\int [f(x)+g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

此法則爲基于下列事實之自然結果

$$\underbrace{\frac{d}{dx}[F(x)+G(x)]}_{A} = \underbrace{\frac{d}{dx}F(x) + \frac{d}{dx}G(x)}_{B} = \underbrace{f(x)+g(x)}_{C}$$

因爲 $A=C$，由 (13.3) 式，可寫爲

$$\int [f(x)+g(x)]dx = F(x)+G(x)+c \tag{13.4}$$

惟，由 $B=C$ 之事實，亦可得

$$\int f(x)dx = F(x)+c_1 \quad 與 \quad \int g(x)dx = G(x)+c_2$$

是故（由兩式相加）可得

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = F(x)+G(x)+c_1+c_2 \tag{13.5}$$

因常數 c, c_1, 與 c_2 可爲任意數值，令 $c=c_1+c_2$. (13.4)　式與

(13.5) 式之右端則相等，因而，其左端式亦必相等。法則 Ⅳ 由此得證。

（例 6） 試求 $\int (x^3+x+1)dx$。依法則 Ⅳ，此積分因子可表示爲三個積分式之總和：$\int x^3\,dx+\int x\ dx+\int 1\ dx$。此三個積分式值已于例 1，2 與 3 求得，我們僅須將其結果合併而得

$$\int (x^3+x+1)dx=\left(\frac{x^4}{4}+c_1\right)+\left(\frac{x^2}{2}+c_2\right)+(x+c_3)$$

$$=\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+c$$

于最後解答中，我們乃將三個加下標之常數加總而得唯一常數 c。

一般運算時，積分過程中產生之任意積分常數，于最後解中皆將之合併爲一任意常數。

（例 7） 試求 $\int \left(e^x+\frac{1}{x}\right)dx$。由法則 Ⅳ，此式可寫爲得依法則 Ⅱ 與 Ⅲ 所得兩積分式數值之和：

$$\int (e^x+\frac{1}{x})dx=\int e^x dx+\int \frac{1}{x}dx=e^x+\ln|x|+c$$

注意于此例中，我們直接寫出 c，而非先寫 c_1 與 c_2，然後再合併爲 c。

（法則 Ⅴ） （一倍數之積分式）某積分因子 k 倍之積分式（k 爲一常數）等于該積分因子積分式之 k 倍。以符號表之，

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)dx$$

在運算過程中，此法則乃謂一相乘常數可析出積分符號外邊（注意：若爲一變數項則不能！）。欲證明此一法則，我們僅須說明

k 倍 $f(x)$ 即將 $f(x)$ 加 k 次即可；因此，由法則Ⅳ，

$$\int kf(x)dx=\int\underbrace{[f(x)+f(x)+\cdots+f(x)]}_{k項}dx$$

$$=\underbrace{\int f(x)dx+\int f(x)dx+\cdots+\int f(x)dx}_{k項}=k\int f(x)dx$$

（例８）　試求$\int -f(x)dx$，此時 $k=-1$，故

$$\int -f(x)dx=-\int f(x)dx$$

即，某函數負號之積分式等于該函數積分式前再加一負號。

（例９）　試求$\int 2x^2dx$。析出２，并運用法則Ⅰ，可得

$$\int 2x^2dx=2\int x^2dx=2\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)=\frac{2}{3}x^3+c$$

（例10）　試求$\int 3x^3\ dx$。于此例中，析出相乘常數而得

$$\int 3x^2\ dx=3\int x^2dx=3\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)=x^3+c$$

注意，于前一例相比較，于最後解中 x^3 項前幷無任何分式。此一結果乃因３（積分因子的相乘常數）正好等于２（函數之指數）加上１。參考指數法則（法則Ⅰ），可知于此例中之相乘常數（$n+1$）正好與分式 $1/(n+1)$ 消掉，因此可得（$x^{n+1}+c$）爲其解。

一般而言，當積分因子爲（$n+1$）x^n 時，實無須先析出常數（$n+1$），然後對 x^n 積分；而可代之以，直接寫出 $x^{n+1}+c$ 爲其解。

（例11）　試求$\int\left(5e^x-x^{-2}+\frac{3}{x}\right)dx$。由此例可說明法則Ⅳ與Ⅴ；實際上，亦可爲首三個法則之例：

$$\int\left(5e^x-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}\right)dx=5\int e^x dx-\int x^{-2}dx+3\int\frac{1}{x}dx$$

〔由法則Ⅳ與Ⅴ〕

$$=(5e^x+c_1)-\left(\frac{x^{-1}}{-1}+c_2\right)+(3\ln|x|+c_3)$$

$$=5e^x+\frac{1}{x}+3\ \ln\ |x|\ +c$$

當然，此項結果之正確與否仍可以微分驗證之。

有關替代之法則 此處我們將再介紹兩項積分法則，以簡化積分過程，于適當的情況下，以新變數取代原積分變數。只要此一新的積分變數使得積分過程較爲簡單，則此法則便很有用。

（法則Ⅵ）（替代法則） $f(u)(du/dx)$ 關于變數 x 之積分式爲 $f(u)$ 關于變數 u 之積分式：

$$\int f(u)\frac{du}{dx}dx=\int f(u)du=F(u)+c$$

式中已以 $\int du$ 之運算取代 $\int dx$ 之運算。

此項法則，爲微積分中連鎖法則之另一面，實可以連鎖法則證明之。已知一函數 $F(u)$ ，其中 $u=u(x)$ ，由連鎖法則可知

$$\frac{d}{dx}F(u)=\frac{d}{du}F(u)\frac{du}{dx}=F'(u)\frac{du}{dx}=f(u)\frac{du}{dx}$$

因 $f(u)(du/dx)$ 爲 $F(u)$ 之導來式，由 (13.3) 式可知前者之積分式（反導來式）必爲

$$\int f(u)\frac{du}{dx}\ dx=F(u)+c$$

事實上，讀者可注意到，此項結果亦可由左端式中消去兩個 dx 式而得。

（例12） 試求$\int 2x(x^2+1)\,dx$。其解可先乘出積分因子而求得：

$$\int 2x(x^2+1)\,dx=\int(2x^3+2x)\,dx=\frac{x^4}{2}+x^2+c$$

但我們可依代入法則求之。令 $u=x^2+1$；則 $du/dx=2x$，或 $dx=du/2x$。以 $du/2x$ 代替 dx 可得

$$\int 2x(x^2+1)\,dx=\int 2xu\frac{du}{2x}=\int u\;du=\frac{u^2}{2}+c_1$$

$$=\frac{1}{2}(x^4+2x^2+1)+c_1=\frac{1}{2}x^4+x^2+c$$

其中 $c=\frac{1}{2}+c_1$。以 du/dx 代替 $2x$（而非 $du/2x$ 代 dx）亦可得相同的結果。

（例13） 試求$\int 6x^2(x^3+2)^9dx$。此例之積分因子已不易乘出，故較可顯示替代法則之有效性。令 $u=x^3+2$；則 $du/dx=3x^2$ 故

$$\int 6x^2(x^3+2)^9dx=\int\left(2\frac{du}{dx}\right)u^9\;dx=\int 2u^9du$$

$$=\frac{2}{10}u^{10}+c=\frac{1}{5}(x^3+2)^{10}+c$$

（例14） 試求$\int 8e^{2x+3}\;dx$。令 $u=2x+3$；則 $du/dx=2$ 或，$dx=du/2$。因此，

$$\int 8e^{2x+3}\,dx=\int 8e^u\frac{du}{2}=4\int e^u\;du=4e^u+c=4e^{2x+3}+c$$

（例15） 試求$\int\frac{2x^3+1}{x^4+2x}dx$ 令 $u=x^4+2x$；則

$$\frac{du}{dx}=4x^3+2$$

故可得

$$\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x}dx=\int \frac{\frac{1}{2}(du/dx)}{u}dx=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{2}\ \ln|u|+c$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^4+2x|+c$$

如前述各例所述，只要能將積分因子（爲 x 之一函數）表示爲 $f(u)$（爲 u 之一函數）與 du/dx（爲所取 u 函數之導來式）之乘積——經以適度選擇函數 $u=u(x)$——則此法則很有用。然而，如上三例所示，此一法則亦運用于可將原始積分因子轉變爲 $f(u)(du/dx)$ 之某常數倍數的情況。此將不影響此法則之運用，因常數乘數可析出積分符號，則將餘下如 $f(u)(du/dx)$ 形式之積分因子，如替代法則中所求。惟，若替代變數造成 $f(u)(du/dx)$ 之某變數倍數，如 x 乘以該式，則不能分解出因式，且此項法則不再有用。實際上，沒有以兩個別積分式表示兩函數乘積之積分式的一般公式；亦無以個別積分式表示兩函數商積分式的公式。總而言之，此乃爲何積分較微分難，而且，當積分式實在很複雜時，不如查積分公式表以得其解，而不必直接採取積分過程。

（法則Ⅶ）（部分積分）　v 關于 u 之積分式等于 uv 減去 u 關于 v 的積分式：

$$\int v\ du=uv-\int u\ dv$$

此項法則之精義在于以 $\int dv$ 之運算代替 $\int du$ 之運算。

隱含于此項結果背後的道理是相當簡單的。首先，由微分式乘積法則可得

$$d(uv)=v\ du+u\ dv$$

若將等式兩邊同時積分（即，對每一微分式積分），可得一新的等式

$$\int d(uv)=\int v\,du+\int u\,dv$$

或　$uv=\int v\,du+\int u\,dv$〔左端無需加上常數（爲什麼？）〕

〕然後，經由兩邊同時減去$\int udv$，即可得上述結果。

（例16）　試求$\int x(x+1)^{1/2}dx$。不若例12與例13，本例不適用法則Ⅵ之替代型式（爲什麼？）。然而，我們可考慮已知積分式形式爲$\int v\,du$，并運用法則Ⅶ。最後，令 $v=x$，即指 $dv=dx$，又令 $u=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$，故 $du=(x+1)^{1/2}\,dx$。然後可求得積分式爲

$$\int x(x+1)^{1/2}\,dx=\int v\,du=uv-\int u\,dv$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,x-\int\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}dx$$

$$=\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}x-\frac{4}{15}(x+1)^{5/2}+c$$

（例17）　試求$\int \ln x\,dx$。此處我們不能運用對數法則，因該項法則係處理積分因子 $1/x$，而非 $\ln x$。我們亦不能運用法則Ⅵ。但若令 $v=\ln x$，即指 $dv=(1/x)\,dx$，且令 $u=x$，則 $dv=dx$，而可進行積分如下：

$$\int \ln x\,dx=\int v\,du=uv-\int u\,dv$$

$$=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+c=x(\ln x-1)+c$$

（例18）　試求$\int xe^x dx$。于此例中，我們僅令 $v=x$，且 $u=e^x$，故 $dv=dx$ 與 $du=e^x\,dx$，運用法則Ⅶ，則得

$$\int xe^x\,dx=\int v\,du=uv-\int u\,dv$$

$$=e^x x-\int e^x dx=e^x x-e^x+c=e^x(x-1)+c$$

此項結果之可靠性，正如諸項前例般，可由微分加以驗證。

習　題　13.2

1. 試解下列諸式：

(a) $\int 16x^{-3}\,dx\ \ (x\neq 0)$　　(d) $\int (2x^5-3x^2+2)dx$

(b) $\int 16x^{15}\,dx$　　(e) $\int (ax^2+bx)dx$

(c) $\int (x^5-3x)dx$　　(f) $\int (2ax+b)(ax^2+bx)^7dx$

2. 試解下列諸式：

(a) $\int 13e^x\,dx$　　(d) $\int 3e^{-(2x+7)}\,dx$

(b) $\int \left(e^x+\frac{4}{x}\right)dx\ \ (x\neq 0)$　　(e) $\int 4xe^{x^2+3}\,dx$

(c) $\int \left(5e^x+\frac{3}{x^2}\right)dx\ \ (x\neq 0)$　　(f) $\int xe^{x^2+9}\,dx$

3. 試解下列諸式：

(a) $\int \frac{3dx}{x}\ \ (x\neq 0)$　　(c) $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$

(b) $\int \frac{dx}{x+3}\ \ (x\neq -3)$　　(d) $\int \frac{x}{3x^2+5}dx$

4. 已知 n 個常數 k_i（以 $i=1, 2, \cdots, n$）與 n 個函數 $f_i(x)$，試由法則Ⅳ與Ⅴ導出下式