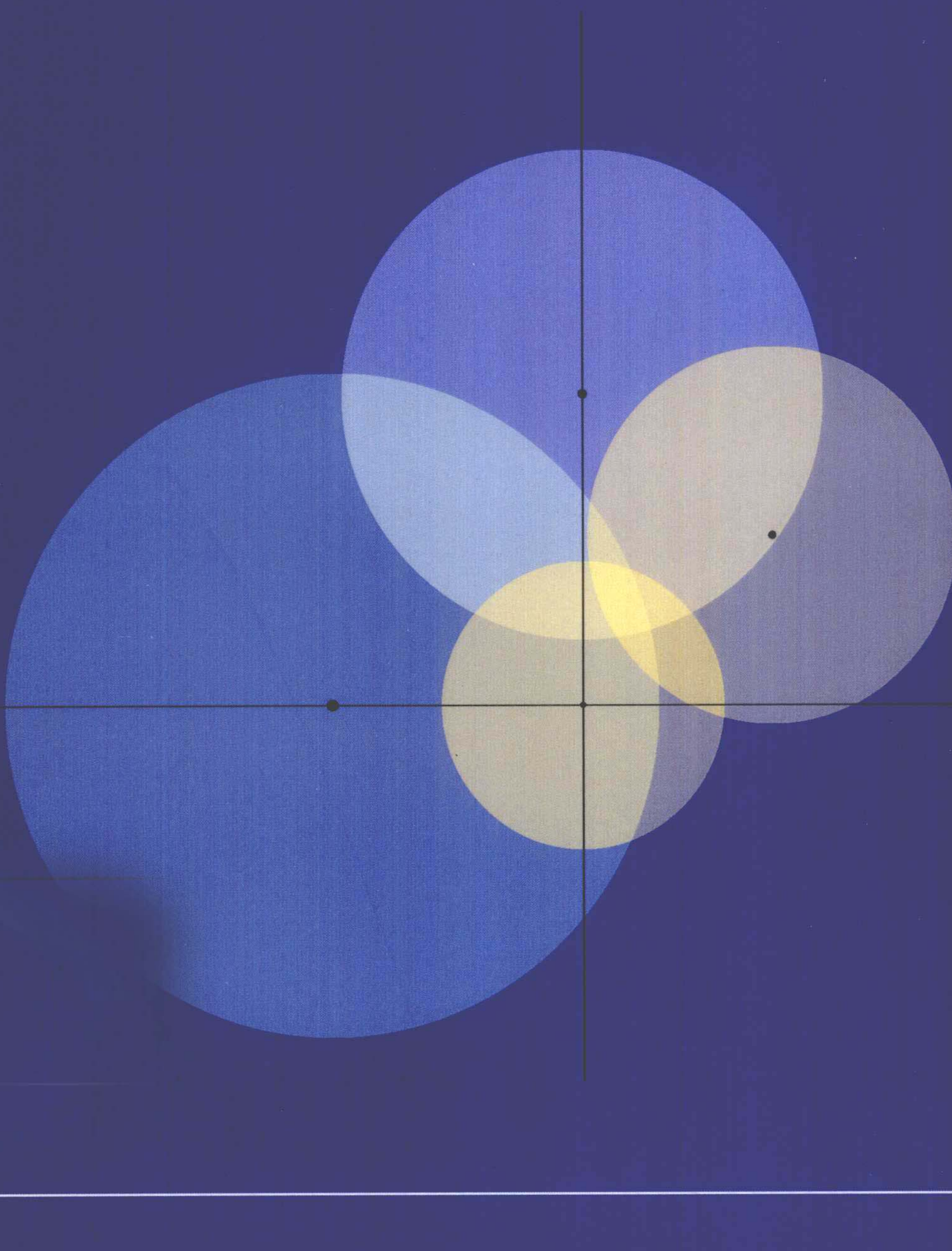
平均值与
Γ函数不等式

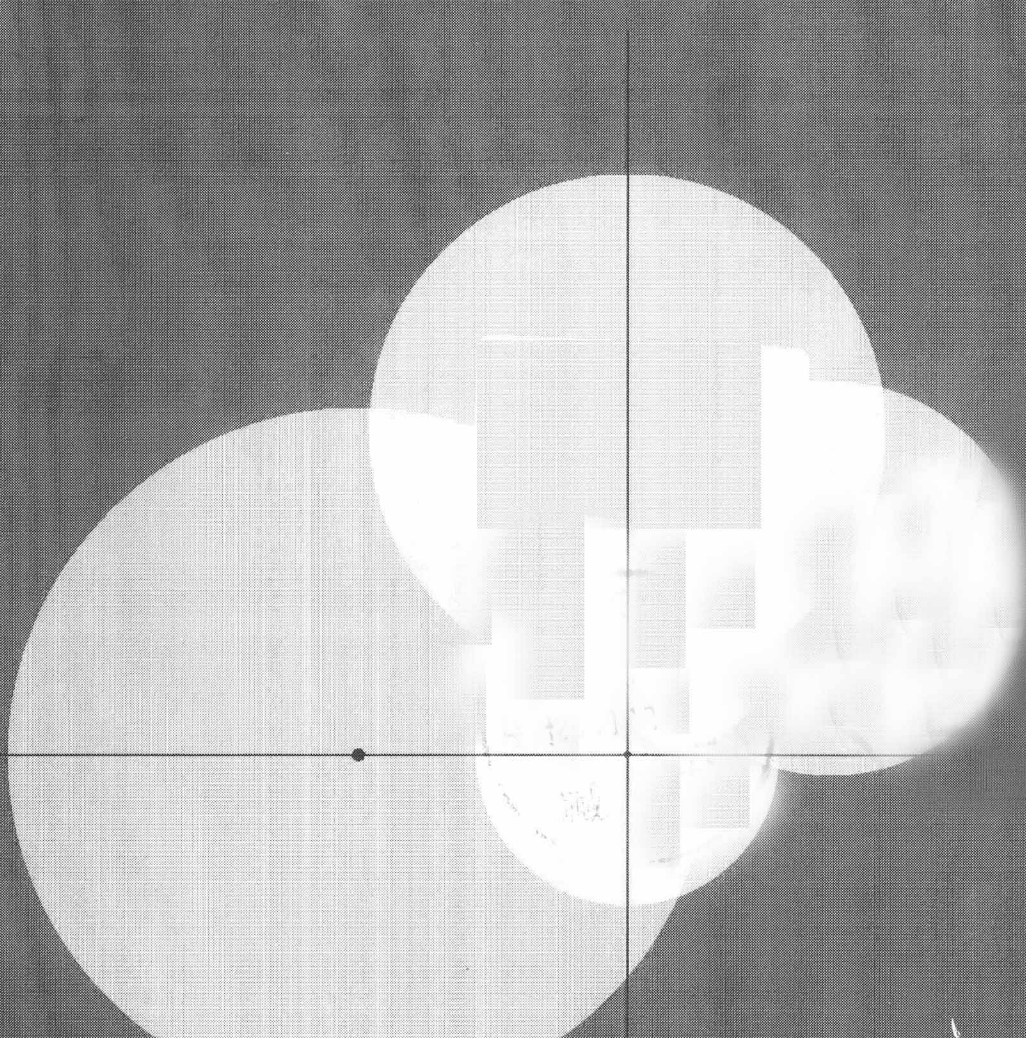
陈超平 著



大象出版社

平均值与Γ函数不等式

陈超平 著



大象出版社

图书在版编目(CIP)数据

平均值与 Γ 函数不等式/陈超平著. —郑州:大象出版社,
2009.09

ISBN 978-7-5347-5733-4

Ⅰ.平… Ⅱ.陈… Ⅲ.不等式 Ⅳ.0178

中国版本书图馆 CIP 数据核字(2009)第 172246 号

内 容 简 介

本书是作者参考国内外的有关文献,结合作者的研究工作编写而成的. 全书分三章,包括:平均值不等式、函数不等式以及 Euler 常数不等式.

本书可供大学数学系的高年级学生、研究生、教师以及相关的科学工作者阅读参考.

责任编辑 宋海波

文字编辑 宋海波

出　　版 大象出版社(郑州市经七路 25 号　邮政编吗 450002)

网　　址 WWW. daxiang. cn

发　　行 全国新华书店

印　　刷 郑州市今日文教印制有限公司

版　　次 2009 年 9 月第 1 版　　2009 年 9 月第 1 次印刷

开　　本 890×1240　1/16

印　　张 8.5

字　　数 275 千字

定　　价 18.00

若发现印、装质量问题,影响阅读,请与承印厂调换。

印厂地址　郑州市花园路 85 号

邮政编码　450000　　　电话　0371-65582658

前　　言

1934 年著名数学家 G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 G. Polya 出版了第一部《不等式》专著,从此,数学不等式理论及其应用成为一门新兴的数学学科. 不等式一直是 20 世纪活跃而又有吸引力的研究领域,特别是该世纪 90 年代以来不等式的研究得到了迅猛的发展. 除了原有的国际性杂志大量发表有关不等式研究的新成果外,又出现了 5 个国际性不等式专业杂志:Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Journal of Mathematical Inequalities, Mathematical Inequalities and Applications, Journal of Inequalities and Applications, Archives of Ineaualities and Applications. 70 年代以来, 国际上每四年召开一次一般不等式国际学术会议,并出版专门的会议论文集. 1994 年中国成立了"中国不等式研究小组", 创办了《不等式研究通讯》. 1998 年澳大利亚成立了一个"数学不等式及其应用研究组"(Research Group in Mathematical Inequalities and Applications),创办了自己的杂志 RGMIA Research Report Collection. 以上表明数学不等式理论及其应用这门学科充满了生机. 关于不等式的历史和发展,见祁锋[浅谈数学不等式理论及其应用,焦作大学学报,2003,(2): 59 -64]和匡继昌[一般不等式研究在中国的新进展,北京联合大学学报,2005,19 (1):29 -37]的两篇论文.

本书主要是作者研究工作的汇集,不拘泥知识的系统性,而是以作者的研究工作为线索,充分展示平均值与函数若干问题研究的现状和最新进展.

囿于作者水平,书中错误在所难免,恳切希望读者批评指正.

本书得到河南省教育厅自然科学研究项目资助.

陈超平

2009 年 4 月

目 录

第一章 平均值不等式

§1.1 平均值介绍

1.1.1 Stolarsky平均和Gini平均

定义1.1.1. 设$\mathbb{R}_+$表示正实数集. 两个正数x,y的平均定义为$M:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$的二元连续函数, 并且满足:

(i) $M(x,y)=M(y,x)$ (对称性);

(ii) $\min(x,y)\leqslant M(x,y)\leqslant\max(x,y)$ (平均值性质);

(iii) $M(x,x)=x$ (自反性).

明显地, 由(ii)可以推出(iii), 反之不真. 有时(ii)被更弱的条件代替[1].

设x和y是正数, r和s是实数. x,y的(r,s)阶Stolarsky平均$E(r,s;x,y)$定义为[2],[3]: 对于$x=y$, $E(r,s;x,x)=x$; 对于$x\neq y$,

$$E(r,s;x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{r}{s}\cdot\dfrac{y^s-x^s}{y^r-x^r}\right)^{1/(s-r)}, & rs(r-s)\neq 0,\\ \exp\left(-\dfrac{1}{r}+\dfrac{x^r\ln x-y^r\ln y}{x^r-y^r}\right), & r=s\neq 0,\\ \left(\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{y^r-x^r}{\ln y-\ln x}\right)^{1/r}, & r\neq 0, s=0,\\ \sqrt{xy}, & r=s=0.\end{cases}\tag{1.1.1}$$

有时我们也将$E(r,s;x,y)$写成$E_{r,s}(x,y)$. Stolarsky平均也称为双参数平均[4]. Stolarsky平均满足定义1.1.1中的条件(i)和(ii), 而且, $E(r,s;x,y)$在区域

$$\{(r,s,x,y)|r,s\in\mathbb{R},x,y\in\mathbb{R}_+\}\tag{1.1.2}$$

上是连续的. 事实上, 函数

$$(r,s,a,b)\mapsto E(r,s;x,y)$$

在区域(1.1.2)上是无穷次可微的[5]. Stolarsky平均E满足下面性质:

(i)E关于参数r和s是对称的, 即$E(r,s;x,y)=E(s,r;x,y)$;

(ii)E关于变量x和y是对称的, 即$E(r,s;x,y)=E(r,s;y,x)$;

(iii)E是关于变量x和y的一次齐次函数, 即

$$E(r,s;tx,ty)=tE(r,s;x,y),\quad t>0.$$

Stolarsky平均E包含几个特殊平均, 例如:

$$E(r,2r;x,y)=M_r(x,y)\text{是}r\text{阶幂平均(或Hölder平均)},$$
$$E(r,r;x,y)=I_r(x,y)\text{是}r\text{阶指数平均},$$
$$E(r,0;x,y)=L_r(x,y)\text{是}r\text{阶对数平均}.$$

在$E(r,s;x,y)$中取$r=1$, $s=r+1$, 我门获得两个正数x,y的广义对数平均$L_r(x,y)$: 对于$x=y$, $L_r(x,y)=x$; 对于$x\neq y$,

$$L_r(x,y)=\left[\frac{y^{r+1}-x^{r+1}}{(r+1)(y-x)}\right]^{1/r},\quad r\neq -1,0;$$
$$L_{-1}(x,y)=\frac{y-x}{\ln y-\ln x}=L(x,y);$$
$$L_0(x,y)=\frac{1}{e}\left(\frac{y^y}{x^x}\right)^{1/(y-x)}=I(x,y),$$

$L(x,y)$和$I(x,y)$分别称为两个正数x,y的对数平均和指数平均(或恒等平均). 清楚地,

$$L_1(x,y)=A(x,y),\quad L_{-2}(x,y)=G(x,y),$$

$A(x,y)$和$G(x,y)$分别是x,y的算术平均和几何平均. 特别地,

$$\lim_{r\to-\infty}L_r(x,y)=\min\{x,y\},\quad \lim_{r\to+\infty}L_r(x,y)=\max\{x,y\}.$$

当$x\neq y$时, $L_r(x,y)$是关于$r\in(-\infty,+\infty)$的严格递增函数, 于是我们获得

$$G(x,y)<L(x,y)<I(x,y)<A(x,y),\quad x\neq y.$$

H. Alzer[6], 杨任尔和曹冬极[7] 将对数平均推广为单参数平均$J_r(x,y)$: 对于$x=y$, $J_r(x,y)=x$; 对于$x\neq y$,

$$J_r(x,y)=\frac{r(y^{r+1}-x^{r+1})}{(r+1)(y^r-x^r)},\quad r\neq 0,-1;$$
$$J_0(x,y)=L(x,y);$$
$$J_{-1}(x,y)=\frac{[G(x,y)]^2}{L(x,y)}.$$

当$x\neq y$时, $J_r(x,y)$是关于$r\in(-\infty,+\infty)$的严格递增函数. 单参数平均$J_r(x,y)$是Stolarsky平均E的特殊情形. 两个正数的许多平均是E的特殊情形, 例如:

$$E(r,2r;x,y)=M_r(x,y)\text{为幂平均(或Hölder平均)},$$
$$E(1,r+1;x,y)=L_r(x,y)\text{为广义对数平均},$$
$$E(1,1;x,y)=I(x,y)\text{为指数平均},$$
$$E(1,2;x,y)=A(x,y)\text{为算术平均},$$
$$E(0,0;x,y)=G(x,y)\text{为几何平均},$$
$$E(-2,-1;x,y)=H(x,y)\text{为调和平均},$$
$$E(0,1;x,y)=L(x,y)\text{为对数平均}.$$

设x和y是正数, r和s是实数. x,y的Gini平均$G(r,s;x,y)$定义为[8]:

$$G(r,s;x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{x^s+y^s}{x^r+y^r}\right)^{1/(s-r)}, & r\neq s;\\ \exp\left(\dfrac{x^r\ln x+y^r\ln y}{x^r+y^r}\right), & r=s\neq 0;\\ \sqrt{xy}, & r=s=0.\end{cases}\tag{1.1.3}$$

有时我们也将$G(r,s;x,y)$写成$G_{r,s}(x,y)$. Gini平均满足定义1.1.1中的条件(i)和(ii), 而且, $G(r,s;x,y)$在区域(1.1.2)上是连续的. Gini平均关于它的参数r和s, 关于它的变量x和y是对称的, 并且是关于变量x和y的一次齐次函数. 值得提到的是

$$G(r,0;x,y)=M_r(x,y),$$

即Gini平均包含幂平均. Alzer和Ruscheweyh[9] 证明了仅有幂平均既包含在Stolarsky平均中, 又包含在和Gini平均中.

K. B. Stolarsky[2], Leach和Sholander[10] 证明了当$x\neq y$时Stolarsky平均$E_{r,s}(x,y)$关于r和s是严格递增的, 其它证明请参阅相关文献[11],[12],[13],[14],[15],[16]. 对于$x\neq y$, Gini平均$G_{r,s}(x,y)$关于r和s也是严格递增的[17],[18]. 1983年, E. B. Leach和M. C. Sholander[19] 建立了Stolarsky平均的比较定理, 1988年, Zs.Páles[20] 给出了这个定理的简化证明. Gini平均的比较定理请参阅相关文献[21],[22]. Neuman和Páles[23]研究了Stolarsky平均和Gini平均之间的比较问题. Stolarsky平均和Gini平均关于r和s的对数凸性以及关于(r,s)Schur凸性, 请参阅相关文献[2],[10],[17],[24],[25],[26]. Stolarsky平均和Gini平均的Minkowski不等式请参阅相关文献[5],[27],[28].

定义1.1.2. *设$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n),y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. 若*

$$\sum_{i=1}^{k}x_{[i]}\leqslant\sum_{i=1}^{k}y_{[i]},k=1,2,\ldots,n-1,$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{[i]}=\sum_{i=1}^{n}y_{[i]},$$

则称x被y所控制, 或说y控制了x, 记作$x\prec y$, 这里$x_{[1]}\geqslant x_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$和$y_{[1]}\geqslant y_{[2]}\geqslant\cdots\geqslant y_{[n]}$分别是$x$和$y$的分量按照递减次序的重排.

定义1.1.3. *设$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $\phi:\Omega\to\mathbb{R}$. 若在Ω上$x\prec y\Rightarrow\phi(x)\leqslant\phi(y)$, 则称$\phi$是$\Omega$上的Schur凸函数. 若$-\phi$是$\Omega$上的Schur凸函数, 则称$\phi$是$\Omega$上的Schur凹函数.*

下面两个引理在证明Stolarsky平均和Gini平均的单调性、对数凸性和Schur凸性时起着重要的作用. 引理1.1.1的证明请参阅文献[26], 引理1.1.2的证明请参阅文献[24],[29].

引理1.1.1. *设I是一个开区间, 那么连续可微函数$f:I^2\to\mathbb{R}$是Schur凸的当且仅当f是对称的并且满足*

$$(x-y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)\geqslant 0,\quad x,y\in I,x\neq y.$$

引理1.1.2. *设f是区间I上的连续函数, 并定义f的算术平均:*

$$F(r,s)=\begin{cases}\dfrac{1}{s-r}\displaystyle\int_r^s f(t)\,\mathrm{d}t, & r\neq s,\\ f(r), & r=s.\end{cases}$$

则下面结果成立:

(i)如果函数f 在I上是递增(减)的, 那么F是关于r和s的递增(减)函数.

(ii)如果f在I上是二次可微的凸(凹)函数, 那么F是关于r和s的凸(凹)函数.

(iii) 函数F在I^2上是Schur凸的当且仅当函数f在区间I上是凸的.

定理1.1.1. Stolarsky平均和Gini平均分别有下面积分公式

$$\ln E(r,s;x,y)=\frac{1}{s-r}\int_r^s \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.4}$$

$$\ln G(r,s;x,y)=\frac{1}{s-r}\int_r^s \ln J_t(x,y)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.5}$$

这里

$$I_t(x,y)=E(t,t;x,y),\quad J_t(x,y)=G(t,t;x,y). \tag{1.1.6}$$

证明. 因为E关于参数r和s是对称的, 关于变量x和y也是对称的, 不妨假定$x>y$和$s>r$. 我们分三种情形来证明(1.1.4).

情形(i): 如果$0<r<s$或$r<s<0$, 那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-r}\int_r^s \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{s-r}\int_r^s\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^t\ln x-y^t\ln y}{x^t-y^t}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-r}\left[\ln\left(\frac{x^t-y^t}{t}\right)\right]_r^s\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-r}\left(\ln\frac{x^s-y^s}{t}-\ln\frac{x^r-y^r}{t}\right)=\ln E(r,s;x,y).\end{aligned}$$

情形(ii): 如果$0=r<s$或$r<s=0$, 那么我们可以利用积分的连续性取极限来证明(1.1.4). 例如

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}\int_0^s \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t&=\lim_{r\to0^+}\left[\frac{1}{s-r}\int_r^s\left(-\frac{1}{t}+\frac{x^t\ln x-y^t\ln y}{x^t-y^t}\right)\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{s}\lim_{r\to0^+}\left[\ln\left(\frac{x^t-y^t}{t}\right)\right]_r^s\\&=\frac{1}{s}\left(\ln\frac{x^s-y^s}{s}-\lim_{r\to0^+}\ln\frac{x^r-y^r}{r}\right)\\&=\frac{1}{s}\left(\ln\frac{x^s-y^s}{s}-\ln(\ln x-\ln y)\right)=\ln E(0,s;x,y).\end{aligned}$$

情形(iii): 如果$r<0<s$, 那么

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s-r}\int_r^s \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-r}\left(\int_r^0 \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t-\int_0^s \ln I_t(x,y)\,\mathrm{d}t\right)\\&=\frac{1}{s-r}\left[\left(\ln\frac{x^s-y^s}{s}-\ln(\ln x-\ln y)\right)-\left(\ln\frac{x^r-y^r}{r}-\ln(\ln x-\ln y)\right)\right]\\&=\ln E(r,s;x,y).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-r}\int_r^s \ln J_t(x,y)\,\mathrm{d}t&=\frac{1}{s-r}\int_r^s\frac{x^t\ln x+y^t\ln y}{x^t+y^t}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-r}\left[\ln(x^t+y^t)\right]_r^s\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-r}\ln\frac{x^s+y^s}{x^r+y^r}=\ln G(r,s;x,y).\end{aligned}$$

□

定理1.1.1的上述证明属于P. Czinder和Zs. Páles[30], 定理1.1.1的其它证明请参阅相关文献[17],[30]. Stolarsky平均和Gini平均有另一种积分表示式.

定理1.1.2. *下面积分表示式成立:*

$$\ln E_{r,s}(x,y) = \frac{1}{s-r}\int_r^s u(t;x,y)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.7}$$

$$\ln G_{r,s}(x,y) = \frac{1}{s-r}\int_r^s v(t;x,y)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.8}$$

这里

$$u(t) \triangleq u(t;x,y) = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\coth\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) - \frac{1}{t} + \ln\sqrt{xy}, \tag{1.1.9}$$

$$v(t) \triangleq v(t;x,y) = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\tanh\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) + \ln\sqrt{xy}. \tag{1.1.10}$$

证明. 我们知道$E_{r,s}(x,y)$和$G_{r,s}(x,y)$是关于它们的变量x,y的一次齐次函数, 即

$$E_{r,s}(\lambda x,\lambda y) = \lambda E_{r,s}(x,y), \quad G_{r,s}(\lambda x,\lambda y) = \lambda G_{r,s}(x,y), \quad \lambda > 0.$$

于是,

$$E_{r,s}(x,y) = \sqrt{xy}\,E_{r,s}\left(\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \sqrt{xy}\,E_{r,s}(e^p,e^{-p}),$$

$$G_{r,s}(x,y) = \sqrt{xy}\,G_{r,s}\left(\sqrt{\frac{x}{y}},\sqrt{\frac{y}{x}}\right) = \sqrt{xy}\,G_{r,s}(e^p,e^{-p}),$$

这里$p = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}$. 因此,

$$\begin{aligned}
\ln E_{r,s}(x,y) &= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}\left[\ln\frac{e^{ps}-e^{-ps}}{ps} - \ln\frac{e^{pr}-e^{-pr}}{pr}\right]\\
&= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}\int_{pr}^{ps}\left[\coth(u) - \frac{1}{u}\right]\mathrm{d}u\\
&= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}\int_r^s\left[p\coth(pt) - \frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{s-r}\int_r^s\left[\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\coth\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) - \frac{1}{t} + \ln\sqrt{xy}\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ln G_{r,s}(x,y) &= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}[\ln\cosh(ps) - \ln\cosh(pr)]\\
&= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}\int_{pr}^{ps}\tanh(u)\,\mathrm{d}u\\
&= \ln\sqrt{xy} + \frac{1}{s-r}\int_r^s p\tanh(pt)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{s-r}\int_r^s\left[\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\tanh\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) + \ln\sqrt{xy}\right]\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□

定理1.1.2的上述证明来自于文献[31]. 比较(1.1.4)和(1.1.7)我们获得

$$\begin{aligned}
u(t) \triangleq u(t;x,y) = \ln I_t(x,y) &= -\frac{1}{t} + \frac{x^t\ln x - y^t\ln y}{x^t - y^t}\\
&= \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\coth\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) - \frac{1}{t} + \ln\sqrt{xy}.
\end{aligned} \tag{1.1.11}$$

比较(1.1.5)和(1.1.8)我们得到

$$\begin{aligned}v(t) \triangleq v(t;x,y) &= \ln J_t(x,y)\\&= \frac{x^t\ln x + y^t \ln y}{x^t+y^t}\\&= \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\tanh\left(t\ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right)+\ln\sqrt{xy}.\end{aligned}\tag{1.1.12}$$

定理1.1.3. 设$x,y>0$, 并且$x\neq y$, 并设$u(t)$和$v(t)$分别由(1.1.11)和(1.1.12)定义. 则下面结果成立:

(i) 对于$t\in\mathbb{R}$,

$$u(t)+u(-t)=2u(0),\quad v(t)+v(-t)=2v(0).\tag{1.1.13}$$

(ii)$u(t)$和$v(t)$是关于$t\in\mathbb{R}$的严格单调递增函数.

(iii)函数$u(t)$和$v(t)$在$(-\infty,0)$内是严格凸的, 在$(0,+\infty)$内是严格凹的.

证明1. 简单计算给出

$$\begin{aligned}u(t)+u(-t) &= \frac{x^t\ln x+y^t\ln y}{x^t+y^t}+\frac{x^{-t}\ln x+y^{-t}\ln y}{x^{-t}+y^{-t}}\\&=\frac{x^t\ln x+y^t\ln y}{x^t+y^t}+\frac{y^t\ln x+x^t\ln y}{x^t+y^t}\\&=\ln(xy)=2u(0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v(t)+v(-t) &= -\frac{1}{t}+\frac{x^t\ln x-y^t\ln y}{x^t-y^t}+\frac{1}{t}+\frac{x^{-t}\ln x-y^{-t}\ln y}{x^{-t}-y^{-t}}\\&=\frac{x^t\ln x-y^t\ln y}{x^t-y^t}+\frac{y^t\ln x-x^t\ln y}{y^t-x^t}\\&=\ln(xy)=2v(0).\end{aligned}$$

对$u(t)$求导数得到

$$\begin{aligned}u'(t) &= \frac{1}{t^2}-\frac{(x/y)^t[\ln(x/y)]^2}{[(x/y)^t-1]^2}\\&=\frac{u^t}{t^2}\left[\frac{1}{u^t}-\left(\frac{\ln u^t}{u^t-1}\right)^2\right]\quad\left(设\frac{x}{y}=u\neq1\right)\\&=\frac{u^t}{t^2}\left[\frac{1}{G(u^t,1)^2}-\frac{1}{L(u^t,1)^2}\right]\\&>0,\quad t\neq0,\end{aligned}$$

并且

$$u'(0)=\lim_{t\to0}u'(t)=\frac{1}{12}[\ln(x/y)]^2>0.$$

求$u(t)$的二阶导数得到

$$\begin{aligned}u''(t) &= \frac{1}{t^3}\left[(u^{2t}+u^t)\left(\frac{\ln u^t}{u^t-1}\right)^3-2\right]\\&=\frac{1}{t^3}\left[(z^2+z)\left(\frac{\ln z}{z-1}\right)^3-2\right]\quad(设u^t=z)\\&\triangleq\frac{1}{t^3}f(z),\end{aligned}\tag{1.1.14}$$

并且

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\frac{\ln z}{z-1}\right)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4z+1)}\left[\frac{3(z^2-1)}{z^2+4z+1} - \ln z\right] \\ &\triangleq \left(\frac{\ln z}{z-1}\right)^2 \frac{1}{(z-1)^2(z^2+4z+1)} g(z), \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

$$g'(z) = -\frac{(z-4)^4}{z(z^2+4z+1)} < 0. \tag{1.1.16}$$

从(1.1.14), (1.1.15)和(1.1.16), 我们获得

$$u''(t) \lessgtr 0 \quad 依照 \quad t \gtrless 0.$$

求$v(t)$的一阶和二阶导数得到

$$v'(t) = \frac{(x/y)^t[\ln(x/y)]^2}{[(x/y)^t+1]^2} > 0, t \in \mathbb{R},$$

$$\begin{aligned} v''(t) &= \frac{[1-(x/y)^t][\ln(x/y)^t]^3}{t^3} \frac{(x/y)^t}{[(x/y)^t+1]^3} \\ &\lessgtr 0 \quad 依照 \quad t \gtrless 0. \end{aligned}$$

证明2 因为

$$t \mapsto \ln\sqrt{\frac{x}{y}} \coth\left(t \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right) - \frac{1}{t} \quad 和 \quad t \mapsto \ln\sqrt{\frac{x}{y}} \tanh\left(t \ln\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$$

是关于$t \in \mathbb{R}$的奇函数, 所以(i)成立是明显的.

根据不等式[4,p.299]

$$\sinh(x) > x, \quad x \neq 0,$$

我们得到

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{4p^2}{(e^{pt}-e^{-pt})^2} = p^2\left\{\frac{1}{(pt)^2} - \frac{1}{[\sinh(pt)]^2}\right\} > 0, \quad t \neq 0,$$

这里$p = \ln\sqrt{\frac{x}{y}}$. 明显地,

$$v'(t) = \frac{4p^2}{(e^{pt}+e^{-pt})^2} = \left[\frac{p}{\cosh(pt)}\right]^2 > 0.$$

这证明了(ii).

根据Lazarevic不等式[4,p.300],[32,p.270]

$$\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)^3 > \cosh(x), \quad x \neq 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned} u''(t) &= \frac{8p^3(e^{pt}+e^{-pt})}{(e^{pt}-e^{-pt})^3} - \frac{2}{t^3} = \frac{2\cosh(pt)}{t^3}\left[\left(\frac{pt}{\sinh(pt)}\right)^3 - \frac{1}{\cosh(pt)}\right] \\ &\gtrless 0 \quad 依照 \quad t \lessgtr 0. \end{aligned}$$

清楚地,

$$v''(t) = -\frac{2p^4}{[\cosh(pt)]^3} \frac{\sinh(pt)}{pt} t \gtrless 0 \quad 依照 \quad t \lessgtr 0.$$

这证明了(iii). □

定理1.1.3的其它证明请参阅文献[17],[30],[31]. 由上面引理和定理, 下面定理1.1.4成立是明显的.

定理1.1.4. (i) Stolarsky平均$E_{r,s}(x,y)$和和Gini平均$G_{r,s}(x,y)$是关于参数r和s的递增函数.

(ii) 如果$r,s \geqslant 0$, 那么Stolarsky平均$E_{r,s}(x,y)$和Gini平均$G_{r,s}(x,y)$关于r和s是对数凹的; 如果$r,s \leqslant 0$, 那么$E_{r,s}(x,y)$和$G_{r,s}(x,y)$关于r和s是对数凸的.

(iii) 对于给定的$x,y>0, x \neq y$, Stolarsky平均$E_{r,s}(x,y)$和Gini平均$G_{r,s}(x,y)$在$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$上是关于$(r,s)$的Schur凹函数, 在$\mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_-$上是关于$(r,s)$的Schur凸函数, 这里$\mathbb{R}_+$和$\mathbb{R}_-$分别表示正实数集和负实数集.

注记1.1.1. Stolarsky平均$E_{r,s}(x,y)$关于(x,y)的Schur凸性请参阅相关文献[33],[34]. 王梓华[35] 利用引理1.1.1证明了Gini平均$G_{r,s}(x,y)$关于(x,y)的Schur凸性.

定理1.1.5 (Stolarsky平均的比较定理[19],[20]). 设r,s,u,v是实数, 并且$r \neq s$, $u \neq v$.

如果$0 \leqslant \min\{r,s,u,v\}$或$\max\{r,s,u,v\} \leqslant 0$, 那么比较不等式

$$E(r,s;x,y) \leqslant E(u,v;x,y) \tag{1.1.17}$$

对所有的$x,y>0$成立当且仅当

$$r+s \leqslant u+v \qquad \text{并且} \qquad e(r,s) \leqslant e(u,v), \tag{1.1.18}$$

这里

$$e(a,b) = \begin{cases} \dfrac{a-b}{\ln(a/b)}, & ab>0,\ a \neq b, \\ 0, & ab=0. \end{cases} \tag{1.1.19}$$

如果$\min\{r,s,u,v\} < 0 < \max\{r,s,u,v\}$, 那么比较不等式(1.1.17)对所有的$x,y>0$成立当且仅当

$$r+s \leqslant u+v \qquad \text{并且} \qquad e(r,s) \leqslant e(u,v), \tag{1.1.20}$$

这里

$$e(a,b) = \frac{|a|-|b|}{a-b}, \quad a \neq b. \tag{1.1.21}$$

定理1.1.6 (Gini平均的比较定理[21],[22]). 设r,s,u,v是实数. 如果$0 \leqslant \min\{r,s,u,v\}$, 那么比较不等式

$$G(r,s;x,y) \leqslant G(u,v;x,y) \tag{1.1.22}$$

对所有的$x,y>0$成立当且仅当

$$r+s \leqslant u+v \qquad \text{并且} \qquad \min\{r,s\} \leqslant \min\{u,v\}. \tag{1.1.23}$$

如果$\min\{r,s,u,v\} < 0 < \max\{r,s,u,v\}$, 那么比较不等式(1.1.22) 对所有的$x,y>0$成立当且仅当

$$r+s \leqslant u+v \qquad \text{并且} \qquad \mu(r,s) \leqslant \mu(u,v), \tag{1.1.24}$$

这里

$$\mu(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|-|y|}{x-y}, & x \neq y, \\ sign(x), & x=y. \end{cases} \tag{1.1.25}$$

如果$\max\{r,s,u,v\} \leqslant 0$, 那么比较不等式(1.1.22)对所有的$x,y>0$成立当且仅当

$$r+s \leqslant u+v \qquad \text{并且} \qquad \max\{r,s\} \leqslant \max\{u,v\}. \tag{1.1.26}$$

定理1.1.7. 设$a>0,b>0$, 并且$a\neq b$, r和s是实数, 则

$$G_{r,s}(a,b)\gtreqless E_{r,s}(a,b)\quad 依照\quad r+s\gtreqless 0. \tag{1.1.27}$$

证明. 设$p=\ln\sqrt{\frac{a}{b}}$. 根据积分表示式(1.1.7)和(1.1.8), 我们得到

$$\ln\frac{G_{r,s}(a,b)}{E_{r,s}(a,b)}=\frac{1}{s-r}\int_r^s w(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.28}$$

这里

$$w(t)=p\tanh(pt)-p\coth(pt)+\frac{1}{t}.$$

清楚地,

$$w(-t)=-w(t). \tag{1.1.29}$$

直接计算给出

$$w(t)=\frac{1}{t}\left[1-\frac{2pt}{\sinh(2pt)}\right]\gtrless 0\quad 依照\quad t\gtrless 0, \tag{1.1.30}$$

因为函数$x\mapsto\frac{x}{\sinh(x)}$在$(-\infty,0)$上是严格递增的, 在$(0,+\infty)$上是严格递减的, 函数$x\mapsto\frac{x}{\sinh(x)}$在$x=0$处取得最小值1.

当$r+s=0$时, 由(1.1.1)和(1.1.3)我们有

$$G_{r,-r}(a,b)=E_{r,-r}(a,b)=\sqrt{ab}.$$

当$r=s\neq 0$时, 我们获得

$$\begin{aligned}
&G_{r,r}(a,b)-E_{r,r}(a,b)\\
&=\frac{1}{r}\left[\frac{x\ln x+y\ln y}{x+y}-\frac{x\ln x-y\ln y}{x-y}+1\right]\quad (记\quad x=a^r,y=b^r)\\
&=\frac{1}{r}\left[1-\frac{2xy(\ln x-\ln y)}{(x+y)(x-y)}\right]=\frac{1}{r}\left[1-\frac{H(x,y)}{L(x,y)}\right]\\
&\gtrless 0\quad 依照\quad r\gtrless 0.
\end{aligned}$$

(1.1.28)联合(1.1.29)和(1.1.30)推出

$$G_{r,s}(a,b)\gtrless E_{r,s}(a,b)\quad 依照\quad r+s\gtrless 0.$$

□

定理1.1.7是Stolarsky平均和Gini平均之间的比较定理[23],[31], 我们提供了另一种证明.

定理1.1.8. Stolarsky平均的Minkowski不等式

$$E_{r,s}(a_1+a_2,b_1+b_2)\leqslant E_{r,s}(a_1,b_1)+E_{r,s}(a_2,b_2) \tag{1.1.31}$$

成立的充要条件是$r+s\geqslant 3$, 并且$\min\{r,s\}\geqslant 1$. 当$(r,s)\neq(1,2),(r,s)\neq(2,1)$时, 上述等号成立的充要条件是$a_1/a_2=b_1/b_2$.

Gini平均的Minkowski不等式

$$G_{r,s}(a_1+a_2,b_1+b_2)\leqslant G_{r,s}(a_1,b_1)+G_{r,s}(a_2,b_2) \tag{1.1.32}$$

仅当$r+s\geqslant 1$和$0\leqslant\min\{r,s\}\leqslant 1$成立.

定理1.1.8的证明请参阅文献[5],[27],[28].

1.1.2 广义Muirhead平均

设$r, s \in \mathbb{R}$，$a, b > 0$. a和b的广义Muirhead平均(或广义对称平均)$\sum_{r,s}(a,b)$定义为[36,p.333],[37]

$$\sum\nolimits_{r,s}(a,b) = \left(\frac{a^r b^s + a^s b^r}{2}\right)^{1/(r+s)}, r+s \neq 0.$$

广义Muirhead平均$\sum_{r,s}(a,b)$满足定义1.1.1中的条件(i) 和(iii), 满足定义1.1.1中的条件(ii)当且仅当$rs > 0$. T. Trif[38] 指出广义Muirhead平均不能被连续拓广到区域(1.1.2), 而且作者研究了广义Muirhead平均关于r和s的单调性定理, 并建立了关于广义Muirhead平均的Minkowski 不等式.

清楚地,

$$\sum\nolimits_{r,0}(a,b) = M_r(a,b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2}\right)^{1/r}, \quad r \neq 0.$$

当$r + s = 1$时, 等价于$r = \alpha, s = 1 - \alpha$, Muirhead平均(或对称平均)被获得

$$\sum\nolimits_{\alpha,1-\alpha}(a,b) = \frac{a^\alpha b^{1-\alpha} + a^{1-\alpha} b^\alpha}{2}.$$

按照A. O. Pittenger[39] 的观点, 我们将对称平均写成

$$S_\delta(a,b) = \frac{a^{\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}} b^{\frac{1-\sqrt{\delta}}{2}} + a^{\frac{1-\sqrt{\delta}}{2}} b^{\frac{1+\sqrt{\delta}}{2}}}{2}.$$

因为当$a \neq b$时S_δ关于δ是严格递增的[40], 所以对于$a \neq b$, $0 < \delta < 1$, 我们有

$$M_0(a,b) < S_\delta(a,b) < M_1(a,b).$$

对于$a \neq b$, 下面不等式成立

$$S_{1/3}(a,b) < L(a,b) < M_{1/3}(a,b). \tag{1.1.33}$$

(1.1.33)的左边不等式属于A. O. Pittenger[39], 而(1.1.33)右边不等式的证明请参阅相关文献[39],[41]. (1.1.33)左边不等式改进了B.C. Carlson[42] 的一个结果: $S_{1/4}(a,b) < L(a,b)$.

利用积分表示式[43]

$$L(a,b) = \int_0^1 a^t b^{1-t}\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.34}$$

并应用具有两个结点Gausss求积公式

$$\int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4320} f^{(4)}(\xi), \quad 0 < \xi < 1$$

给函数$f(t) = a^t b^{1-t}$, T. Trif[38] 给出了(1.1.33)中第一个不等式非常简短的证明.

被T. Trif的技术激发, 我们这里提供了(1.1.33)中第二个不等式非常简短的证明. 应用Simpson $\frac{3}{8}$规则[44],[45]

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right] \\ - \frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi), \quad \xi\text{介于}a\text{和}b\text{之间},\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

并令$a = 0, b = 1$, $f(t) = x^t y^{1-t} (0 \leqslant t \leqslant 1)$, 我们得到对于$x, y > 0$, 且$x \neq y$,

$$L(x,y) = M_{1/3}(x,y) - \frac{1}{6480} x^\xi y^{1-\xi} (\ln x - \ln y)^4, \quad 0 < \xi < 1,$$

因此,

$$L(x,y) < M_{1/3}(x,y).$$

应用(1.1.35)给函数$f(t) = e^t$, 并分别用$\ln a$和$\ln b$代替a和b, F. Burk[46] 证明了(1.1.33)中第二个不等式.

定理1.1.9. 设$a,b>0$, 并且$a \neq b$, 则广义Muirhead平均$\sum_{r,s}(a,b)$ 在$\mathbb{R}^2_+$上是关于(r,s)的Schur凸函数, 在$\mathbb{R}^2_-$上是关于(r,s)的Schur凹函数.

证明. 直接计算给出

$$\frac{1}{\sum_{r,s}(x,y)}\frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial r} = -\frac{1}{(r+s)^2}\ln\left(\frac{t^r+t^s}{2}\right) + \frac{1}{r+s}\frac{t^r \ln t}{t^r+t^s},$$
$$\frac{1}{\sum_{r,s}(a,b)}\frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial s} = -\frac{1}{(r+s)^2}\ln\left(\frac{t^r+t^s}{2}\right) + \frac{1}{r+s}\frac{t^s \ln t}{t^r+t^s},$$

这里$t = \frac{b}{a}$. 于是我们获得

$$(s-r)\left(\frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial s} - \frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial r}\right) = \frac{\sum_{r,s}(a,b)}{r+s}\frac{(s-r)(t^s-t^r)\ln t}{t^r+t^s} \gtrless 0 \text{依照} r,s \gtrless 0.$$

□

注记1.1.2.

$$\frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial s} + \frac{\partial \sum_{r,s}(a,b)}{\partial r} = \frac{2\sum_{r,s}(a,b)}{(r+s)^2}\left[\frac{r+s}{2}\ln t - \ln\left(\frac{t^r+t^s}{2}\right)\right] < 0.$$

1.1.3 Stolarsky, Gini和广义Muirhead平均的渐近表示式

在涉及到平均值的一些问题的研究中, H. W. Gould和M. E. Mays[47] 利用了平均值的幂级数表示式. 事实上, 在应用中, 我们常常利用规范函数$M(1, 1-x), x \in (0,1)$的幂级数表示式. G. T. Gargo[48] 建立了Stolarsky平均的幂级数表示式:

$$\begin{aligned}
&E_{r,s}(1,1-x)\\
&= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{r+s-3}{24}x^2 + \frac{r+s-3}{48}x^3\\
&\quad - \left[2(r^3+r^2s+rs^2+s^3) - 5(r+s)^2 - 70(r+s) + 225\right]\frac{x^4}{5760}\\
&\quad - \left[2(r^3+r^2s+rs^2+s^3) - 5(r+s)^2 - 30(r+s) + 105\right]\frac{x^5}{3840} + \cdots.
\end{aligned} \tag{1.1.36}$$

下面我们将建立Stolarsky平均、Gini平均和广义Muirhead平均的渐近表示式.

定理1.1.10. 设$a,b>0$, $r,s \in \mathbb{R}$, 那么下面渐近表示式成立:

$$E_{r,s}(x+a,x+b) - x = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2(r+s-3)}{24x} + O(x^{-2}), \quad x \to +\infty, \tag{1.1.37}$$

$$G_{r,s}(x+a,x+b) - x = \frac{a+b}{2} + \frac{(a-b)^2(r+s-1)}{8x} + O(x^{-2}), \quad x \to +\infty. \tag{1.1.38}$$