发现数学丛书

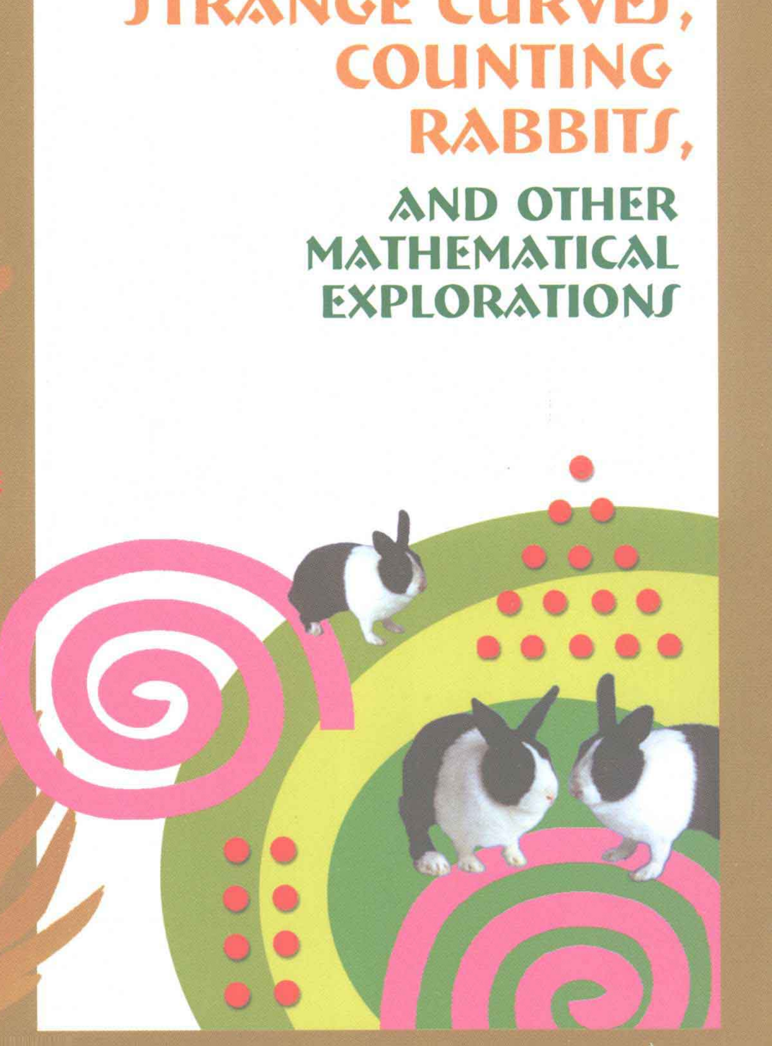
〔美〕基思·鲍尔 著

汪晓勤 柳留 译

怪曲线、数兔子

及其他数学探究

STRANGE CURVES, COUNTING RABBITS, AND OTHER MATHEMATICAL EXPLORATIONS



上海科技教育出版社

发现数学丛书

〔美〕基思·鲍尔 著
汪晓勤 柳留 译

怪曲线、数兔子
及其他数学探究

STRANGE CURVES, COUNTING RABBITS, AND OTHER MATHEMATICAL EXPLORATIONS

上海科技教育出版社

责任编辑　卢　源　装帧设计　汤世梁

发现数学丛书

怪曲线、数兔子及其他数学探究

[美]基思·鲍尔　著

汪晓勤　柳　留　译

上海世纪出版股份有限公司
上 海 科 技 教 育 出 版 社　出版发行

（上海市冠生园路 393 号　邮政编码 200235）

网址 www.ewen.cc　www.sste.com

各地新华书店经销　常熟市华顺印刷有限公司印刷

ISBN 978－7－5428－5212－0/N·805

图字 09－2008－266 号

开本 850×1168　1/32　印张 7.75　字数 200 000

2011 年 11 月第 1 版　2011 年 11 月第 1 次印刷

定价：18.00 元

序　言

大约 10 年前，我的一位大学校友斯特里特(Michael Streat)问我，是否有兴趣给他所任教中学的数学俱乐部做一次演讲。我欣然同意。一两个月后，我访问了这所学校，并做了一个有关皮克定理(Pick's Theorem，一个古老的趣味数学问题)的演讲。在随后几年，我又在各中学里，以及给前来我校(伦敦大学学院)参观的中学生们做了许多此类“通俗”演讲。本书是基于这些演讲，并增加了一些我本人碰巧很喜欢的话题写成的。有些话题纯属趣味性内容——它们只是供人娱乐的数学。另一些话题涉及数学家、物理学家和工程师们每天都要用到的重要数学思想，因而显得较为“严肃”。虽然本书以娱乐为主旨，但我的写作目的不仅仅是为了娱乐，我还希望能传达过去几年学校里不教的若干思想，并尽可能少用技术细节来表达。我刻意选择了一些能说明不同数学分支的材料。从概率论、数论或几何学中选取合适的话题总是容易的，但对这门学科的另一部分材料常常需要作一些小改动。尤其是第 6 章和第 9 章，我就试图提供某种平衡。

在本书写作过程中，所用材料也变化颇多。一开始，本书分成几个独立的章节，但不久，开始出现贯穿数章的主题，某些章节中的思想也会应用于别的章节。也许本该如此。数学并非一些孤立珍品的大杂烩，而是各种思想出色地交互作用形成的博大而连贯的整体。正是在那些意外产生交互作用的地方，诞生了众多数学中的美和力量。

我希望高年级的中学生、趣味数学的众多爱好者及那些正在寻找话题供资优生进一步学习的教师们都能读到这本书。每

章的内容都可以演化成一两个趣味数学讲座,但为了让本书具有更强的可读性,我在每一章中加入了一些问题及其解答。(有些问题会比别的问题更难。较难的问题用星号标出。)数学家们普遍赞同,如果你要了解和欣赏数学,那么你就必须去**做**它——仅仅看看书是不行的。事实上,最好的办法是编制适合自己的题目并加以解决。如果读者能提出书中所没有的新思想,那将是对我撰写本书的最好回报。

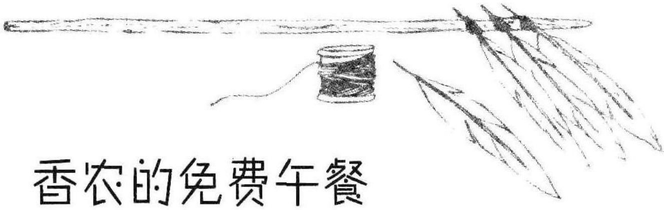
致　谢

我要感谢所有那些以各种不同方式帮助我撰写本书的人。十分感谢我的老师、大学同事和我所阅读的书籍的作者们，最重要的是他们激起了我对数学的热情。我的好几位同事还特意为我提供了资料，尤其是希尔(Richard Hill)、利德(Imre Leader)、普赖斯(David Preiss)和斯科特(Alex Scott)。非常感谢阿特斯坦(Shiri Artstein)，他校对了个别章节，提出许多修改意见，甚至在时间紧迫时帮我打过手稿。

PUP的爱尔兰(David Ireland) 实际上是本书的发起人：如果不是他老是到我们系寻觅藏在抽屉里的书籍，那么我什么也不会写的。

最后，要感谢我的妻子库苏佳娃(Sachiko Kusukawa)，她容忍我一直霸占着电脑(以及其他许多东西)。

目　　录



第1章　香农的免费午餐

1.1　国际标准书号代码

随手拿起任何一本新近出版的简装书，在封底都能找到一个数——国际标准书号(International Standard Book Number，缩写为ISBN)。(精装书的书号有时印在封面上。)ISBN是用来在全世界出版的书目中识别书的。本书[1]的国际标准书号是

0－691－11321－1。

(对于我们来说连字符并不重要，我保留它们只是为了让数更好读。)这个数具有令人惊奇的性质。在表1.1中，ISBN数码按纵向写在第一栏。1到10诸数写在第二栏。第三栏是同行前两栏各数的乘积；例如，在第二行，前两个数是6和2，因此第三栏中的数是$6 \times 2 = 12$。完成第三栏后，把该栏所得10个数相加，得110，把它写在最底下。

---

① 指英文版原书，非中译本。——译注

表 1.1 ISBN 的特殊性质

ISBN	乘数	积
0	1	0
6	2	12
9	3	27
1	4	4
1	5	5
1	6	6
3	7	21
2	8	16
1	9	9
1	10	10
	总和	$110 = 11 \times 10$

令人惊奇的是，和数 110 能被 11 整除。事实上，总和能被 11 整除并非偶然：不论你用哪本书，结果都是如此。用你自己喜欢的书亲手试一试吧。（若 ISBN 的末尾是 X，则将其看作 10。）

你首先可能会想，这是一个数学戏法：无论我写下什么数，最终的总和总是能被 11 整除。为证明事实**并非**如此，设想将 ISBN 的最后一个数 1 改成 2，看看结果会怎样。第三列的最底下一项会由 10 变为 20，于是总和增加 10，变成 120，而它不能被 11 整除。因此，总和**能被** 11 整除这一事实依赖于 ISBN 是一个特殊的数。所有的 ISBN 都是特殊的数。问题是“为什么”。为什么出版商们只选用这样的特殊号码来识别他们的书呢？

设想你从出版商那里订购一本书。你在订单上写下或在电脑上输入 ISBN 时，出了点小错；例如，你不小心把第五个数字 1 写成了 2。第三栏的总和会如何变化呢？第三栏的第五项由 5 变为 10。于是，总和增加 5，结果不能被 11 整除。当出版商收到你的订单，他/她（或计算机）能看出你所订的图书号码并非正确的特殊号码：并不存在你所订号码的书。因此，出版商知道

你出错了,他们并不会误寄他书(书很重,邮费昂贵),而会要求你重下订单。

ISBN 不过是查错码的一个例子而已。ISBN 不但为图书信息(出版商、书名等)编码,而且还能自动检测错误:如果你不小心改动了一个数字,任何一个信息接收者都能看出错误来。同样,如果你不小心颠倒了相邻两数(这是人们常犯的错误),结果也是如此。在继续读下去之前,请尝试以下问题。

问题 1.1 你能找出代码具有的哪个特征能让它检测出相邻数字的颠倒吗?

本问题的答案就在于表 1.1 中的第二栏。因为出现在第二栏的是不同的乘数 1,2,…,10,所以 ISBN 可以检测出数字颠倒的错误。不妨设第四和第五位上有相邻两数 a 和 b,则第四和第五行如表 1.2 所示。

表 1.2

ISBN	乘数	积
⋮	⋮	⋮
a	4	$4a$
b	5	$5b$
⋮	⋮	⋮

现若将 a 和 b 对调,则相应行的各数变为表 1.3。

表 1.3

ISBN	乘数	积
⋮	⋮	⋮
b	4	$4b$
a	5	$5a$
⋮	⋮	⋮

第三列的总和将增加 a 并减少 b,因为 a 对应的数由原来的 $4a$ 变成了 $5a$,而 b 对应的数由原来的 $5b$ 变成了 $4b$。因此,总和改

变了 $a-b$。新的总和不能被 11 整除,除非 $a-b=0$(此时 a 和 b 相同,对调后并无差别)。

编码基于能否被 11 整除,而不是被 10 整除(尽管 10 似乎更自然些)①,其主要原因是那些乘数可用于区分 ISBN 中的不同数字。和 11 不同,10 并非素数。如果我们用 10 除,那么,某些数就会成为"陷阱" 。假设第五行如表 1.4。

表 1.4

ISBN	乘数	积
⋮	⋮	⋮
3	5	15
⋮	⋮	⋮

如果你不小心把 ISBN 中的 3 改成了 7,那么第三栏的 15 就变成了 35——改变了 20。因 20 是 10 的倍数,故被 10 整除的标准检测不出所作过的改动。问题出在 $10=5\times2$,故若以 2、4、6 或 8 的差额来改动 ISBN,则第三栏改变 10 的倍数。若使用素数 11,就不会出现上述情况。

我第一次遇到查错码时,简直开心得不得了。就像仔细选择交流信息所用的"语言"那样,你可以自动减少误解的可能性。如你所想,这种数学思想在我们这个传递电子信息的时代具有广泛的应用。但在某些方面,查错码是人类最古老的思想。从某种意义上说,人类的一切语言都是代码,这些代码包含本质的信息及额外的语法和句法,使听者能够确定所讲的意思。本例有助于说明一点,就是查错码与密码学无关,后者乃是一种可以隐藏信息以免为敌人所知的代码。查错码的意义在于准确地传递信息,而不是秘密地传递信息。

① 除了这里所描述的优点外,基于素数的编码还有一些结构上的优点,但这些优点远比 ISBN 所需更加微妙。——原注

1.2 二进制信道

当航天探测器(就是类似图 1.1 所示的那种设备)将信息(火星或木星的照片)发回地球时,它们必须以某种方式对信息进行编码,通常编成一个由 0 和 1 所构成的序列。无线电波将信息传回地球时不可避免地会受到大气层的干扰,故地面上接收到的信号与所发送的信号不尽相同。传递信号的**信道**并不完全准确。

解决该问题的一种方法是用一长串的 1(如 10 个 1)

1111111111

来取代单个 1,并用 10 个 0

0000000000

来取代单个 0。若你在地面接收站收到序列

1101110111

你就知道这并不是所发送的那个序列,并且可以断定真正的信号全由 1 组成。这样,你就能断定正确的信号是 1 而不是 0。这种用一长串二进制位来代替每一个二进制数码(或位)的过程就构成了一种代码,尽管它比较粗糙。与 ISBN 一样,某些信号是“不允许”出现的,因此,如果你收到这样的信号,就可以断定某处出现了错误。不管怎样,这种代码比 ISBN 的作用还要大一点——它为你**纠正**错误提供了极大的可能性,而不仅仅是**检测**它。幸好如此,因为出版商可以让你重新订购一本书,但你却不能让卫星在离开火星飞往木星后,重拍一次火星照片。我们称这种代码为“重复码”,它是**纠错码**的一个简单例子。

重复码的问题在于它极其浪费。为传送 1 字位信息,卫星必须发送 10 字位的数据,传输率只有 10%。当你试图复原航天探测器传来的信息时,获得高传输率至关重要,因为探测器访问每个星球的时间很短暂,且能量有限。这看起来就像在数学

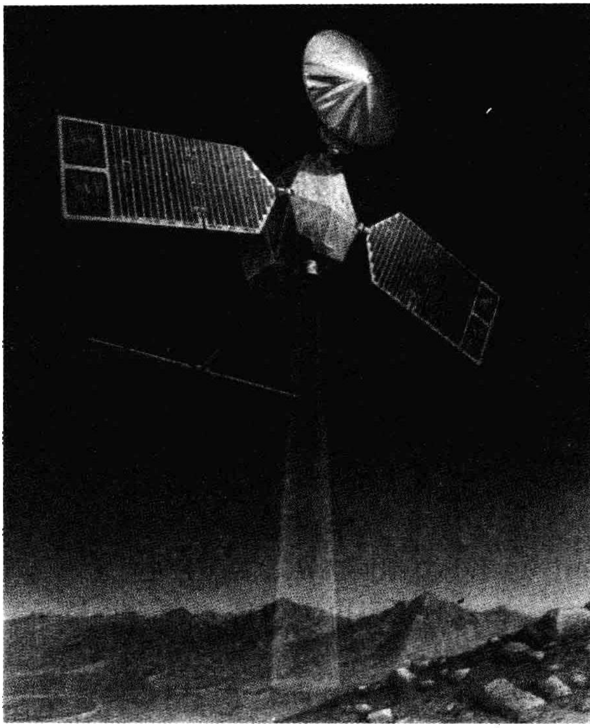


图 1.1 美国宇航局定于 2005 年发射的火星探测卫星的效果图

中经常应验的"没有免费午餐"原则的一个例子。如果你想要一个高的精确度，就必须牺牲传输速度。

然而，数学家香农（Claude Shannon）于 1948 年发现，速度和精确度并非鱼和熊掌——如果你找对饭馆，午餐可以是免费的。香农发现，如果非常仔细地设计代码，就有可能达到几乎完美的精确度，并且能以某一固定速率传输（只取决于信道的质量）。例如，如果你的传输信道有 90% 的精确度，那么，**只要你仔细设计代码**，在传输率均为 50% 的情况下，你可以达到任意的精确度。香农的发现惊世骇俗。很难相信，在同一传输率下，只要正

确选择代码,你就能达到越来越高的精确度。[①]

不过,这里有个小小的弊端。高效代码的问题在于它们必定很复杂,这就意味着将收到的信息解码很耗时。(这里的困难不在于如何"破译"代码;是你编的码,你自然知道**如何**解码。问题是,对于一个复杂的代码,解码过程很耗时。)对于太空任务而言,这并不是个大问题,因为信号抵达地球时,可以先记录下来,然后慢慢译解。然而,如果是人与人之间的信息传递,那么接收者希望很快就能得到消息。因此,选择满足需要的代码至关重要。

香农定理告诉你,高效的代码是存在的,但它并没有告诉你如何去设计这样的代码,更没告诉你如何设计方便易用的代码。因此,继香农的开拓性工作之后,人们开始着手编制理想的代码。

1.3 寻求好代码

"设计一个代码"指的是什么?发明一种代码需要什么样的决策?当你设计一种代码时,你必须选择自己的"字母表"。例如,你的信息是由0、1构成的,还是像ISBN那样由十进制数码构成的?不过,重要的问题是哪些符号串可用,哪些符号串不可用。例如,在前面提到的重复码中,信息被分割成由10个二进制数码组成的符号串。可用的符号串是

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

和

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

而所有其他的10位符号串都不可用。信息所分割成的符号串称为"字"。你必须选定每个"字"的长度,并确定哪些字"可

① 按照现代标准,对香农结果的证明还算简单,但这超出了本书范围。——原注